IREM de LILLE
Groupe Enseignement des Mathématiques et lecture de Textes Anciens,
Groupe collège

STAGE DE FORMATION 2007-2008

DE LA MÉTHODE DES AIRES AUX FORMULES
Compte rendu

Les auteurs :

Janine Aspra
Rudolf Bkouche
Sandra Delaunay
Anne-Marie Marmier
Isabelle Martinez-Labrousse
Hélène Nemitz
Christophe Niedzwiedz
Louis Roye

IREM de Lille- Université des Sciences et Technologies
Cité scientifique, Bât. M1, 59 655 Villeneuve d'Ascq cedex.
Tél : 03 20 43 41 81 - Fax : 03 20 33 71 61
irem@univ-lille1.fr – http://irem.univ-lille1.fr

DE LA MÉTHODE DES AIRES AUX FORMULES
IREM de LILLE

Compte rendu d'un stage de formation organisé par les deux groupes *Collège* et *Enseignement des Mathématiques et lecture de Textes Anciens* de l'IREM de Lille.

Mots clés : géométrie, affine, euclidienne - figures, aires, proportions, écriture algébrique, nombres réels – mathématiques chinoises - activités et exercices.

Ce document reprend les textes et fiches distribuées au long de trois jours de stage de formation à l'adresse de professeurs de mathématiques de collège ou lycée. Il comprend des références historiques avec textes, des exposés pour approfondir la réflexion, des activités qui ont été expérimentées et un choix structuré d'exercices à faire en classe ou pour le plaisir.

Tous reconnaissent qu'au collège l'enseignement de l'algèbre et des débuts du calcul littéral, est semé d'embûches. Nous plaçant dans la tradition euclidienne, nous voulons montrer l'importance des problèmes sur les grandeurs dans la constitution de la géométrie et de l'algèbre, avant toute considération de nombres autres qu'entiers. Dans cette perspective historique, l'introduction des lettres et des formules est portée par la géométrie des figures élémentaires.
L'étendue qu'elle soit segment ou portion de plan, est prise ici dans son sens le plus intuitif, nous ne définissons pas la notion d'aire ; nous l'utilisons dans le cadre d'une méthode - énoncée dans les *Eléments* d'Euclide - qui règle les comparaisons et démontre des théorèmes. De nombreuses situations d'enseignement illustrent le fonctionnement de cette méthode. Un détour par les procédés de puzzles des chinois apporte une autre contribution.

Edition
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Lille
Université des sciences et Technologies de Lille – Bât. M1
59 655 Villeneuve d'Ascq Cedex
Tél : 03 20 43 41 81 – Fax : 03 20 33 71 61
irem@univ-lille1.fr – http://irem.univ-lille1.fr

Mars 2009

Format	Nombre de pages	Prix	IREM numéro
21 × 29,7	90	7 euros	LIL 129

ISBN : 978-2-912126-31-3

IREM de LILLE
Groupe Enseignement des Mathématiques et lecture de Textes Anciens,
Groupe collège

STAGE DE FORMATION 2007-2008

DE LA MÉTHODE DES AIRES AUX FORMULES
Compte rendu

Les auteurs :

Janine Aspra
Rudolf Bkouche
Sandra Delaunay
Anne-Marie Marmier
Isabelle Martinez-Labrousse
Hélène Nemitz
Christophe Niedzwiedz
Louis Roye

IREM de Lille- Université des Sciences et Technologies
Cité scientifique, Bât. M1, 59 655 Villeneuve d'Ascq cedex.
Tél : 03 20 43 41 81 - Fax : 03 20 33 71 61
irem@univ-lille1.fr – http://irem.univ-lille1.fr

INTRODUCTION et SOMMAIRE

Deux groupes de l'IREM de Lille – le groupe *EMTA* (*Enseignement des Mathématiques et lecture de Textes Anciens*) et le groupe *Collège* - se sont réunis en 2007-2008 pour concevoir et animer un stage de formation de trois jours, destiné aux professeurs de mathématiques du second degré : *De la méthode des aires aux formules*.

Le groupe *EMTA* travaille à partir d'une lecture de textes mathématiques historiques et ce retour aux sources a pour but de mieux comprendre les mathématiques dans leur élaboration conceptuelle ; chacun peut y puiser aussi des moyens pour son enseignement ou pour approfondir son écoute aux questions et difficultés des élèves. Le groupe *Collège* a pour objet l'enseignement des mathématiques au collège, tant du point de vue de la cohérence du contenu que de l'élaboration de séquences. Notre projet commun était d'apporter des éléments de réflexion à propos de l'enseignement de l'algèbre et des débuts du calcul littéral au collège, que tous reconnaissent comme semé d'embûches. Nous avons décidé de rassembler les documents distribués aux stagiaires, de les compléter parfois, pour dresser un compte rendu lisible de ce stage. Nous voulions tresser ensemble apports historiques, séquences pédagogiques, recherche collective d'exercices destinés à une classe ou pour le plaisir. La forme reste un peu hétérogène, nous nous en excusons, mais c'est un document de travail que nous livrons et pas un livre….

Dans notre enseignement, en premier, il y a les nombres omniprésents, et d'abord les nombres entiers, puis ceux de la calculatrice ; les figures sont souvent données avec des mesures et des nombres. Or, revenir aux origines montre que les problèmes portent d'abord sur les grandeurs sans d'autres nombres que ceux du comptage et qu'une bonne part des mathématiques élémentaires – géométrie et algèbre – émerge des mises en relation, comparaison et calcul sur les grandeurs. Mesurer une grandeur, c'est la mettre en rapport avec une grandeur prise pour unité et, c'est précisément dans les difficultés conceptuelles et techniques pour représenter les rapports de grandeurs par des nombres que s'est forgée la notion de nombre réel. Dans la ligne de l'exposé euclidien sur les proportions de grandeurs, François Viète, à la Renaissance fonde les prémisses de l'algèbre classique en Occident et met en place un calcul avec les lettres qui prendra plus tard toute son autonomie.

Quel est le fil de tension autour duquel s'organisent les propos des uns et des autres ? L'enseignement aux débutants fait une bonne place aux figures planes élémentaires, à leur comparaison, égalité, inégalité, rapports ; l'étendue qu'elle soit segment ou portion de plan, est prise ici dans son sens le plus intuitif, nous ne définissons pas la notion d'aire ; nous l'utilisons dans le cadre d'une méthode - énoncée dans les *Eléments* d'Euclide - qui règle les comparaisons et démontre des théorèmes (c'est le cas, par exemple des théorèmes de Pythagore et Thalès qui sont enseignés au collège). Mesurer met en jeu des raisonnements sur les formes, les grandeurs et les nombres, et les formules de l'aire du rectangle ou du triangle, les approximations de l'aire du cercle sont l'aboutissement d'un travail ; les expressions littérales restent attachées à la géométrie sous-jacente et sont porteuses d'opérations

numériques. Un détour par les mathématiques chinoises, montre comment dans un tout autre contexte, le déplacement raisonné et subtil de pièces de puzzle pour montrer des résultats, peut faire penser à cette approche par la grandeur-aire. Un exposé replace tous ces éléments dans la mathématique actuelle et répond à une question : « L'aire est-elle une notion affine ou euclidienne? ». Le plan du document rend compte de ce déroulement :

I. La méthode des aires aux sources de la tradition euclidienne…….p. 5
En sixième : multiplication et aire du rectangle……..p. 23
Démonstration au collège du théorème de Pythagore…….p. 25

II. Les démonstrations du théorème de Thalès et ses implications……..p. 27
Quelques applications au collège :
« Droite des milieux »…… p. 38
Propriétés des bissectrices…… p. 39

III. La mesure du cercle :
Quadrature du cercle et lunules…… p. 41
Formules :
En suivant Archimède…… p. 44
En suivant A.M Legendre…….p. 48

IV. Regard sur les mathématiques chinoises……p. 50

V. Aires, géométrie affine et géométrie euclidienne…… p. 69

VI. Exercices et activités, à faire en classe ou pour le plaisir……...p. 78

I. LA MÉTHODE DES AIRES

LA SOURCE : EUCLIDE ET LA TRADITION GRECQUE

LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE

On ne sait pas grand-chose d'Euclide, des dates de sa vie ou de son lieu de naissance. Une remarque de Pappus (fin du IIIème siècle) atteste qu'il y a eu à Alexandrie un enseignement mathématique dont Euclide a été le fondateur. Les historiens des sciences le situent aux environs du IIIème siècle avant J.C, à un moment capital du développement des mathématiques ; il hérite des écoles qui l'ont précédé, l'Académie de Platon et le Lycée d'Aristote ; après lui, il y aura Archimède et Apollonius[1].
Dans le prologue à ses commentaires sur le premier livre des *Éléments* d'Euclide, Proclus au Vème siècle trace une histoire des origines des mathématiques et présente Euclide comme le dernier auteur d'*Éléments* s'inscrivant dans une tradition ancienne qu'il porte à son excellence. Il s'agit donc de mettre en ordre des résultats essentiels permettant d'en atteindre d'autres ; ces *Éléments* ne représentent pas la somme des connaissances d'une époque, mais le réservoir des connaissances fondamentales ; ils entrent dans une construction, et font progresser la connaissance vers de nouvelles propositions suivant les principes d'une science démonstrative héritée d'Aristote et exposée dans les *Seconds analytiques*. Il n'y a donc rien d'élémentaire à cela au sens de simple ou facile. Proclus, d'ailleurs, précise les sens respectifs de « Éléments » et « élémentaire » par une analogie : la fonction des *Éléments* est comparable à celle des lettres de l'alphabet avec lesquelles la langue est construite.

Le livre I[2] s'ouvre sur une série de *définitions* d'objets géométriques élémentaires, qui expriment ce qu'est la chose définie sans rien dire de son existence ou de sa non-existence. Ces définitions ne sont cependant pas arbitraires, certaines servent à décourager les sophistes de l'ancienne Grèce, d'autres parmi les choses définies sont en attente d'existence, que ce soit par les postulats (comme la ligne droite ou le cercle...) ou par construction (comme le carré...).
Dans l'ordre de présentation du premier livre d'Euclide suivent les *demandes* (ou postulats) dont on retiendra entre autres qu'ils assurent la possibilité de tracer une droite et une seulement passant par deux points ainsi que de la prolonger indéfiniment. Les notions communes viennent ensuite qui donnent les règles générales d'argumentation sur les « grandeurs » ou plus généralement « les choses », c'est-à-dire les différentes espèces de la science mathématique, nombres, grandeurs, intervalles de temps, poids ; ces notions ou énoncés sont donc précisément communs à toutes ces espèces et valables pour toutes. Les *notions communes* sont la syntaxe du discours en quelque sorte et dans l'architecture logique elles ont la place d'axiomes. Elles traitent de l'égalité et de l'inégalité dont elles explicitent les comportements vis-à-vis de certaines opérations (ajout ou retranchement).
C'est leur usage dans les diverses propositions qui vont donner sens à ces notions et permettre une plus grande formalisation. De la même manière, on voit apparaître dans les démonstrations, un certain nombre de propriétés, dont Euclide ne souligne jamais si elles dérivent ou non des prémisses et qui sont utilisées comme allant de soi parce qu'elles correspondent à une évidence visuelle ou sensible (il en est ainsi par exemple des propriétés de continuité et de tout ce qui concerne l'ordre dans le plan, la convexité etc.).
Pour conclure rapidement, on peut dire que le discours démonstratif euclidien s'appuie sur une axiomatique qui fait appel à une forme de connaissance empirique des objets et qui a un ancrage physique ; sur ce socle, par une démarche logique, se construit une connaissance discursive qui s'en

[1] Les datations approximatives de ces deux savants sont : Archimède (Syracuse : - 287, - 212), Apollonius (Perge : - 262, Alexandrie : - 180)
[2] Voir bibliographie à la fin du document, les citations sont extraites de la traduction faite au XIXème siècle par F. Peyrard. La pagination est celle de l'édition de 1993 en un seul volume.

échappe pour l'enrichir.

LIVRE I, DÉFINITIONS[3]

1. Le point est ce dont la partie est nulle.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. La ligne droite est celle qui est semblablement placée entre ses points.
5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
6. Les extrémités d'une surface sont des lignes.
7. La surface plane est celle qui est également placée entre ses droites.
8. Un angle est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction.
9. Lorsque les lignes, qui comprennent ledit angle, sont des droites, l'angle est dit rectiligne.
10. Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit ; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.
11. L'angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.
12. L'angle aigu est celui qui est plus petit qu'un droit.
13. On appelle limite ce qui est l'extrémité de quelque chose.
14. Une figure est ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites.
15. Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence ; toutes les droites, menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure, étant égales entre elles.
16. Ce point se nomme le centre du cercle

[…]

20. Les figures rectilignes sont celles qui sont terminées par des droites.

[…]

35. Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre

DEMANDES

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.
6. Deux droites ne renferment point un espace.

NOTIONS COMMUNES

1. Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles.
2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.
3. Si à des grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.
4. Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront inégaux.

[3] *Les œuvres d'Euclide*, p. 1-3.

5. Si à des grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.
6. Les grandeurs, qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entre elles.
7. Les grandeurs, qui sont la moitié d'une même grandeur, sont égales entre elles.
8. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.
9. Le tout est plus grand que la partie.

L'ÉGALITE DE GRANDEURS

Principe d'égalité par superposition

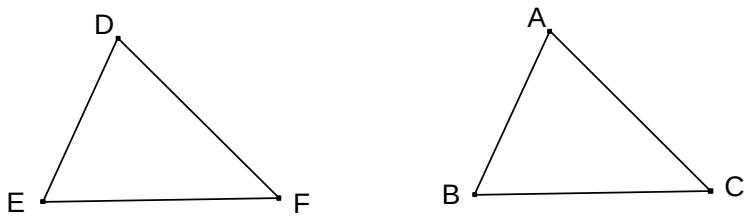
L'égalité n'est pas définie, elle est régie d'abord par la notion commune 8 qui déduit l'égalité de la superposition. Des propriétés non explicitées apparaissent ensuite dans le déroulement des opérations comme allant de soi ; ainsi, ajouter, retrancher sont pratiquées sur les segments (des droites pour Euclide) et les angles de manière évidemment associative.
L'inégalité est régie par la notion commune 9 et une sorte de compatibilité avec l'ajout et le retranchement (notions communes 4 et 5). Sa mise en pratique montre que l'ordre est lié à l'adjonction et qu'il est total. Une sorte de transitivité admise implicitement permet de comparer des grandeurs qui ne sont pas dans la relation du tout et de la partie. Entre grandeurs comparables, il n'y a ainsi que trois cas possibles : être plus grand, être plus petit, être égal.
Si l'on regarde de plus près le contenu des propositions, on voit que l'égalité des figures rectilignes signifie l'égalité des segments et des angles qui les composent, les trois premières propositions utilisent la figure du cercle pour reconnaître l'égalité des segments et rendre possible leur report. Le thème de l'égalité des angles est étroitement associé au thème de l'égalité des triangles.
Les cas d'égalité des triangles vont permettre d'éviter de faire les superpositions et vont restreindre les vérifications d'égalité à quelques unes, suffisantes pour s'assurer de toutes. On a pu remarquer que la cinquième demande dite « postulat des parallèles » diffère des autres demandes, dans son contenu et son expression, les 26 premières propositions du livre I qui traitent de l'égalité des figures par superposition et présentent les cas d'égalité des triangles, n'y font pas appel. Signalons pour finir, que le livre I concerne surtout la géométrie plane mais que les cas d'égalité des triangles sont démontrés sans que les triangles soient dans un même plan.
Le premier cas d'égalité est énoncé dans la proposition 4 dont on verra que la démonstration n'est qu'une paraphrase de l'acte de superposition des deux triangles (pris comme des plaques matérielles) puis de la coïncidence des figures superposées. Les objets mathématiques n'auraient-ils plus ce caractère immuable que leur conféraient Platon et Aristote ? Euclide évitera ensuite toute référence au mouvement-superposition et il faut bien remarquer que, dans cette démonstration, le déplacement de la figure n'est pas de l'ordre de l'expérience réelle, il est opéré dans la pensée ; mais c'est l'expérience sensible du mouvement des corps solides qui permet par la pensée, de faire varier les figures de position sans que cela influe sur leur forme et leur grandeur.

LIVRE I, PROPOSITION IV[4]

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux seront égaux chacun à chacun.
Soient les deux triangles ABC, DEF ; que ces deux triangles aient les deux côtés AB, AC égaux aux deux côtés DE, DF, chacun à chacun, le côté AB égal au côté DE, et le côté AC au côté DF, et qu'ils aient aussi l'angle BAC égal à l'angle EDF ; je dis que la base BC est égale à la base EF, que le triangle ABC sera égal au triangle DEF, et que les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun ;

[4] *ibid*, p.5, 6. Les lettres grecques utilisées par Euclide sont remplacées par des lettres ordinaires.

l'angle ABC égal à l'angle DEF, et l'angles ACB égal à l'angle DFE.



Car le triangle ABC étant appliqué sur le triangle DEF, le point A étant posé sur le point D, et la droite AB sur la droite DE, le point B s'appliquera sur le point E, parce que AB est égal à DE ; mais AB étant appliqué sur DE, la droite AC s'appliquera sur DF, parce que l'angle BAC est égal à l'angle EDF ; donc le point C s'appliquera sur le point F, parce que AC est égal à DF ; mais le point B s'applique sur le point E ; donc la base BC s'appliquera sur la base EF ; car si le point B s'appliquant sur le point E, et le point C sur le point F, la base BC ne s'appliquait pas sur la base EF, deux droites comprendraient un espace, ce qui est impossible (dem. 6)[5] ; donc la base BC s'appliquera sur la base EF, et lui sera égale ; donc le triangle entier ABC s'appliquera sur le triangle entier DEF, et lui sera égal ; et les angles restans s'appliqueront sur les angles restans, et leur seront égaux, l'angle ABC à l'angle DEF, et l'angle DCB à l'angle DFE.
Donc, si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux seront égaux chacun à chacun. Ce qu'il fallait démontrer.

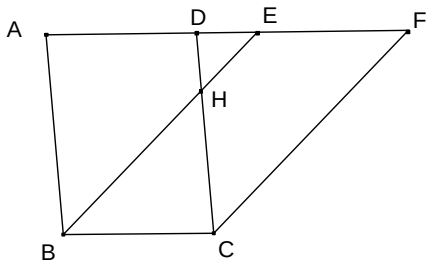
Postulat des parallèles et égalité de grandeurs non superposables

La méthode de superposition et la notion commune 8 fournissent le matériel de base de reconnaissance de l'égalité, à partir de là le travail géométrique va être de développer la théorie de l'égalité pour des grandeurs non superposables ; c'est ce que l'on nomme *méthode des aires* puisqu'en termes modernes cette égalité de grandeurs est l'égalité des aires sans recours aux nombres autres que les entiers.
La *méthode des aires* repose sur une caractérisation angulaire du parallélisme et c'est seulement à cet endroit, proposition 29, que dans le livre I intervient le cinquième postulat, dont on perçoit alors la fonction. Les propriétés (égalités et inégalités) précédentes obtenues sans le secours de ce postulat, permettent de montrer que : *si une droite tombant sur deux droites fait les angles alternes égaux entr'eux, ces deux droites seront parallèles* (prop.27). De là pour toute droite et tout point non situé sur cette droite, il sera possible, par report d'angle, de mener une parallèle à cette droite. La réciproque de cette proposition : *Une droite qui tombe sur deux droites parallèles fait les angles alternes égaux entr'eux*, fait appel au cinquième postulat La démonstration par l'absurde, de quelques lignes, consiste à reprendre l'énoncé du postulat au regard de la figure. Les propriétés caractéristiques des parallélogrammes en termes de côté et d'angle s'en déduisent, et notamment la proposition 34 : *Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux et la diagonale les partage en deux parties égales*. Nous citons les propositions clés de la méthode des aires, 35 et 36 ; les propositions 37 et 38 en découlent aisément, tout triangle étant la moitié d'un parallélogramme.
La *méthode des aires* est méthode de démonstration, on le verra ci-dessous dans les propositions 47 et 48 (le théorème dit de Pythagore et sa réciproque). Elle est aussi quadrature car elle permet de ramener les comparaisons d'aires de figures rectilignes à des comparaisons de segments (propositions 41 à 45).

[5] Notation abrégée, dans le texte, pour dire qu'il est fait appel à la demande 6.

LIVRE I, PROPOSITION XXXV[6]

Les parallélogrammes, construits sur une même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.
Que les parallélogrammes ABCD, EBCF soient construits sur la base BC, et entre les mêmes parallèles AF, BC ; je dis que le parallélogramme ABCD est égal au parallélogramme EBCF.



Car puisque ABCD est un parallélogramme, AD est égal à BC (34)[7] ; par la même raison, EF est égale à BC ; donc AD est égal à EF ; mais la droite DE est commune ; donc la droite totale AE est égale à la droite totale DF (not.2)[8] ; mais AB est égal à DC (34) ; donc les deux droites EA, AB sont égales au deux droites FD, DC, chacune à chacune ; mais l'angle extérieur FDC est égal à l'angle intérieur EAB (29) ; donc la base EB est égale à la base FC (4) ; donc le triangle EAB sera égal au triangle DCF. Retranchons la partie commune DHE ; le trapèze restant ABHD sera égal au trapèze restant EHCF (not.5) ; ajoutons le triangle commun HBC, le parallélogramme total ABCD sera égal au parallélogramme total EBCF. Donc, etc.

LIVRE I, PROPOSITION XXXVI

Les parallélogrammes, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

LIVRE I, PROPOSITION XXXVII

Les triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux

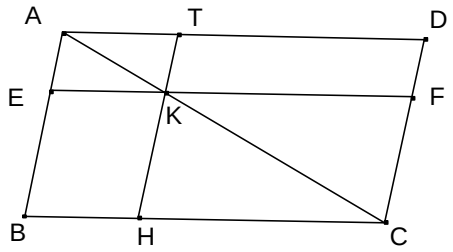
LIVRE I, PROPOSITION XXXVIII

Des triangles, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

La *méthode des aires* permet par étapes (en cinq propositions) de construire pour toute figure rectiligne, un parallélogramme qui lui soit égal, celui-ci étant assujetti à *être inscrit dans un angle rectiligne donné*, l'un de ses côté étant lui aussi donné. La méthode ramène donc la comparaison de certaines grandeurs à la comparaison de segments ; ce qui légitime que, dans les livres suivants, toutes

[6] *Les œuvres d'Euclide*, p. 28.
[7] Notation abrégée, dans le texte, pour dire qu'il est fait appel à la proposition 34 précédente.
[8] Notation abrégée, dans le texte, pour dire qu'il est fait appel à la notion commune 2.

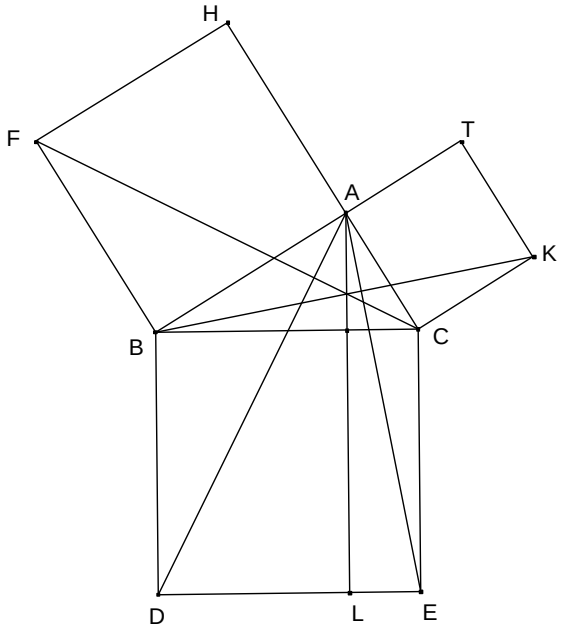
les grandeurs sont représentées par des segments. La proposition 43 est capitale dans cet enchaînement.

> LIVRE I, PROPOSITION XLIII[9]
>
> Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes autour de la diagonale, sont égaux entr'eux.
> Soit le parallélogramme ABCD, que AC soit sa diagonale, qu'autour de AC soient les parallélogramme ET[10], FH, et les parallélogrammes BK, KD qu'on appelle compléments ; je dis que le complément BK est égal au complément KD.
>
> 
>
>
> Car puisque ABCD est un parallélogramme, et que AC est sa diagonale, le triangle ABC est égal au triangle ACD. De plus, puisque EKTA est un parallélogramme, et que AK est sa diagonale, le triangle AEK est égal au triangle ATK ; le triangle KFC est égal au triangle KHC, par la même raison ; donc le triangle AEK avec le triangle KHC est égal au triangle ATK avec le triangle KFC ; mais le triangle entier ABC est égal au triangle entier ADC ; donc le complément restant BK est égal au complément restant HD (not.3). Donc, etc.

La démonstration du Théorème de Pythagore illustre parfaitement la méthode démonstrative euclidienne ; il faut entendre par « quarré du côté » non pas un calcul fait à partir d'un côté, ce qui dans ce cadre n'a aucun sens, mais bien un carré construit ou décrit sur le côté comme l'indique la traduction plus précise de B. Vitrac et comme le confirme la démonstration.

> LIVRE I, PROPOSITION XLVII[11]
> Dans les triangles rectangles, le quarré du côté opposé à l'angle droit est égal aux quarrés des côtés qui comprennent l'angle droit.
>
> Soit ABC un triangle rectangle, que BAC soit l'angle droit ; je dis que le quarré du côté BC est égal aux quarrés des côtés BA, AC.
> Décrivons avec BC le quarré BDEC, et avec BA, AC les quarrés HB, TC ; et par le point A conduisons AL parallèle à l'une ou l'autre des droites BD, CE ; et joignons AD, FC.

[9] EUCLIDE, [Eu 1], tome I, livre I, p. 34.
[10] Les parallélogrammes sont souvent désignés par les deux lettres assignées à deux sommets opposés.
[11] EUCLIDE, [Eu1], p. 38.Vitrac traduit le même énoncé par : *Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit.* [Eu2], p. 282



Puisque chacun des angles BAC, BAH est droit, les deux droites AC, AH, non placées du même côté, font avec la droite BA au point A de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits ; donc la droite CA est dans la direction de AH ; la droite BA est dans la direction de AT, par la même raison. Et puisque l'angle DBC est égal à l'angle FBA, étant droits l'un et l'autre, si nous leur ajoutons l'angle commun ABC, l'angle entier DBA sera égal à l'angle entier FBC (not.4). Et puisque DB est égal à BC, et FB à BA, les deux droites DB, BA sont égales aux deux droites CB, BF, chacune à chacune ; mais l'angle DBA est égal à l'angle FBC ; donc la base AD est égale à la base FC, et le triangle ABD est égal au triangle FBC (4). Mais le parallélogramme BL est double du triangle ABD (41), car ils ont même base BD et ils sont entre les mêmes parallèles BD, AL ; le quarré BH est double du triangle FBC, car ils ont la même base BF et ils sont entre les mêmes parallèles FB, HC ; et les grandeurs qui sont doubles des grandeurs égales sont égales entr'elles ; donc le parallélogramme BL est égal au quarré HB. Ayant joint AE, BK, nous démontrerons semblablement que la parallélogramme CL est égal au carré TC ; donc le quarré entier BDEC est égal aux deux quarrés HB, TC. Mais la quarré BDEC est décrit avec BC, et les quarrés HB, TC sont décrits avec BA, AC ; donc le quarré du côté BC est égal aux quarrés des côtés BA, AC. Donc dans les triangles,etc.

Figures et calcul rhétorique sur les grandeurs

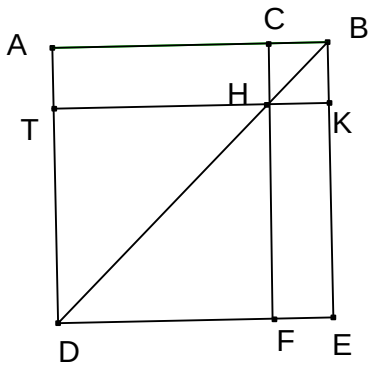
Le livre II des *Éléments* applique la méthode des aires en spécifiant l'angle gabarit choisi, ce sera l'angle droit ; c'est donc de rectangles et carrés dont il est question, et l'on y trouvera une série d'énoncés, à peu près indépendants les uns des autres, qui donnent l'égalité de figures construites comme des puzzles à l'aide de rectangles et carrés. On pourrait écrire ces relations de manière moderne comme des identités algébriques, à condition de traduire par des signes opératoires le discours euclidien sur les grandeurs. Ici, il n'y a pas d'opérations; il n'y a que des manières d'apparier des figures entre elles.

L'une des deux définitions en tête du livre consiste à nommer une nouvelle figure de référence, le gnomon : *que dans tout parallélogramme, l'un quelconque des parallélogrammes décrits autour de la diagonale avec les deux compléments soit appelé gnomon.* De ce terme polysémique retenons

seulement du commentaire de Vitrac[12] qu'il désigne aussi l'équerre, et que par analogie en géométrie, il désigne *la figure qui, ajoutée au carré accroît sa taille sans altérer sa forme.*
On retrouve des références au livre II dans la suite des *Éléments*, à des places où il s'agit de ce que nous appelons actuellement des relations métriques (par ex. livre III sur le cercle et livre XIII sur les solides platoniciens). Il en est ainsi de la proposition 4, comme des propositions 5 et 6, similaires dans leur forme (elles expriment par un rectangle la différence de deux carrés), similaires dans leur devenir géométrique (elles commandent les deux cas de figure sur la puissance d'un point par rapport à un cercle suivant que le point est intérieur ou extérieur au cercle). On pourra lire ci-dessous la proposition 4, dont la traduction algébrique moderne, avec des lettres, est l'identité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

LIVRE II, PROPOSITION IV[13]

Si la droite est coupée à volonté, le quarré de la droite entière est égal aux quarrés des segments, et à deux fois le rectangle contenu sous les deux segments.
Que la droite AB soit coupée à volonté au point C ; je dis que le quarré de AB est égal aux quarrés des segments AC, CB, et à deux fois le rectangle contenu sous AC, CB.



Avec AB décrivons le quarré ADEB ; joignons BD ; par le point C conduisons CHT parallèle à l'une ou l'autre des droites AD, EB, et par le point H conduisons TK parallèle à l'une ou l'autre des droites AB, DE. […Euclide s'applique à démontrer que les quadrilatères CHKB et TDFH sont des carrés et invoque ensuite la proposition 43 du livre I, puis il conclut]. Donc les quatre figures TF, CK, AH, HE sont égales aux quarrés des droites AC, CB et à deux fois le rectangle compris sous AC, CB. Mais les quatre figures TF, CK, AH, HE sont la figure entière ADEB, qui est le quarré de AB ; donc le quarré de AB est égal aux quarrés des droites AC, CB, et à deux fois le rectangle compris sous AC, CB. Donc, etc.

RAPPORTS DE GRANDEURS ET PROPORTIONS

Définir le rapport de deux grandeurs

Comment penser la mesure d'une grandeur par une autre grandeur, quand on dispose uniquement des nombres entiers, au sens de dénombrer, et quels sont les présupposés d'une telle tentative ? D'après les textes précédents, les grandeurs considérées sont des grandeurs comparables pour l'égalité ou l'inégalité (encore faut-il savoir comment le reconnaître !) que l'on sait ajouter ou retrancher (quand cela est possible). Dans ces conditions on peut alors choisir une grandeur-unité de

[12] *Euclide, les éléments*, p. 326.
[13] *Les œuvres d'Euclide*, p. 43.

mesure, et concrètement ou par la pensée, on découpe la grandeur qu'il s'agit de mesurer en sous grandeurs égales à cette unité et on lui associe un nombre quand on le peut, c'est-à-dire, quand « ça tombe juste ». C'est une situation quotidienne de la pratique des artisans qui consiste à comparer les multiples de la grandeur unité avec la grandeur donnée et d'affiner s'il y un reste avec une unité plus petite. Le champ ici est purement spéculatif, et le texte euclidien expose une théorie des proportions de grandeurs.

Faisons un peu de fiction et exprimons les choses algébriquement : pour les Grecs, une grandeur G' mesure une grandeur G plus grande que G', si G est multiple de G' (livre V, déf. 1 et 2 ci-dessous). Si G et H sont mesurées par G', on peut alors les comparer à l'aide des nombres. Il est possible alors de dire que la grandeur G est le même multiple de G' que la grandeur K par exemple l'est de G''. On comprend (mais ce n'est pas le propos d'Euclide) que dans ce point de vue, si deux grandeurs G et H ont une mesure commune, c'est à dire sont mesurées par une même grandeur, cela permet de leur associer un couple d'entiers, unique en un certain sens (la mesure commune n'étant pas unique) et donc au fil d'un processus mathématique scrupuleux, un rationnel qui représente la mesure d'une des grandeurs quand on prend l'autre pour unité.

C'est la comparaison des multiples qui est accessible et déterminante pour exprimer le rapport de deux grandeurs qu'on ne peut, à cette époque, exprimer numériquement. La transcription algébrique du texte (déf. 6), montre que l'égalité de deux rapports de grandeurs est liée au fait que les couples d'entiers ou, parlons moderne, les rationnels sont semblablement placés par rapport à l'un ou l'autre de ces rapports (qu'on identifie alors à un réel). L'inégalité vient du fait que l'un des rationnels échappe à ce classement.

Le livre V des *Éléments* développe cette théorie des rapports de grandeurs. Sur les vingt définitions qui ouvrent le livre nous donnons à lire les huit premières.

On remarquera (déf. 3) que l'existence d'un rapport suppose l'homogénéité des grandeurs selon la quantité. Sont donc exclues des grandeurs comparables suivant d'autres types de relation, la succession ou l'orientation par exemple. De même, il n'est pas possible de produire une grandeur physique, la vitesse, comme rapport d'une distance et d'un temps qui sont hétérogènes.

On notera aussi que la définition 5 délimite le champ d'application de la théorie, celui des grandeurs que nous qualifions d'archimédiennes.[14]

LIVRE V, DÉFINITIONS[15]

1. Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.
2. Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.
3. Une raison, est une certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité.
4. Une proportion est une identité de raisons.
5. Des grandeurs sont dites avoir raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.
6. Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.
7. Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionnelles.
8. Lorsque, parmi ces équimultiples, un multiple de la première surpasse un multiple de la seconde, et qu'un multiple de la troisième ne surpasse pas un multiple de la

[14] En référence à un énoncé quasi équivalent qu'Archimède présente comme postulat dans son traité *De la sphère et du cylindre.*

[15] EUCLIDE, [Eu1], p. 113.

quatrième, on dit alors que la première a avec la seconde une plus grande raison que la troisième avec la quatrième.

Le rapport de grandeurs ou raison, n'est ni nombre ni grandeur, mais participe de la quantité puisque l'égalité et l'inégalité de raisons sont définies. Le livre V, qui compte 25 propositions, expose les manipulations à finalité opératoire portant sur les raisons et donne des règles de calcul sur les rapports de grandeurs. Autorisons nous à écrire les rapports sous une forme algébrique ; pour une proportion A/B = C/D, Euclide distingue ainsi l'inversion, B/A = D/C, la permutation, A/C = B/D, la règle de composition, sans être vraiment définie est utilisée sous la forme : de A/B = K/L et C/D = L/M est déduit la raison composée de A/B et C/D égale à K/M.

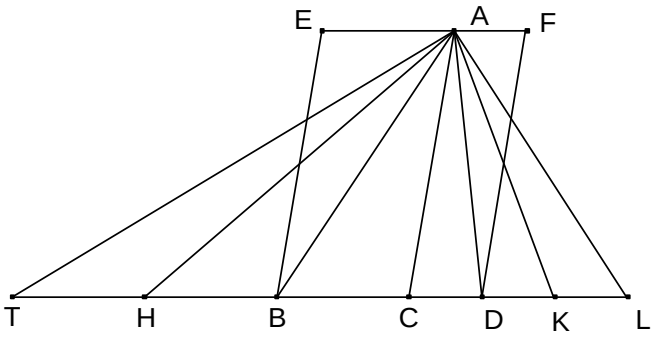
Méthode des aires et proportions

Le livre VI illustre et fait comprendre les enjeux du livre V en l'appliquant aux lignes rectilignes (segments). Il s'ouvre par deux proposition fondamentales pour l'étude des figures semblables: la première dont la démonstration, reproductible, montre comment la définition de l'égalité de raisons est opératoire, la seconde n'est autre que la première configuration de Thalès vue au collège.
Les énoncés des propositions 14 et 16 expriment géométriquement en terme d'aire l'idée de multiplication, la proposition 23 illustre la manière dont Euclide manie la notion de raison composée (aux origines de ce qui deviendra la multiplication de deux raisons ou rapports).
Il est en effet important de noter le cadre euclidien restreint qui sera élargi ensuite. Permutation, inversion et composition, qui sont des manipulations sur des grandeurs (les termes des rapports) deviendront opérations sur les raisons ; on peut voir que dans son *Introduction à l'Art Analytique*, Viète, fondateur de l'algèbre littérale en occident, les donnent comme des règles sur les raisons, tirées d'Euclide, et plus tard, Galilée pourra donner le rapport de deux vitesses comme le produit du rapport des distances et du rapport inverse des temps.

LIVRE VI, PROPOSITION PREMIÈRE[16]

Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.
Soient les triangles ABC, ACD, et les parallélogrammes EC, CF, ayant même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point A sur BD ; je dis que la base BC est à la base CD comme le triangle ABC est au triangle ACD, et comme le parallélogramme EC est au parallélogramme CF.
Prolongeons la droite BD de part et d'autre vers les points T, L ; prenons tant de droites qu'on voudra BH, HT, égales chacune à la base BC, et tant de droites qu'on voudra DK, KL, égales à la base CD ; joignons AH, AT, AK, AL.
Puisque les droites CB, BH, HT sont égales entr'elles, les triangles ATH, AHB, ABC sont égaux entr'eux (38.1) ; donc le triangle ATC est le même multiple du triangle ABC que la base TC l'est de la base BC. Par la même raison, le triangle ALC est le même multiple du triangle ACD que la base CL l'est de la base CD. Donc si la base TC est égale à la base CD, le triangle ATC est égal au triangle ALC ; si la base TC surpasse la base CD, le triangle ATC surpasse le triangle ALC (38.1) ; et si la base TC est plus petite que la base CL, le triangle ATC est plus petit que le triangle ACL. Ayant donc quatre grandeurs, les deux bases BC et CD, et les deux triangles ABC, ACD, on a pris des équimultiples quelconques de la base BC, et du triangle ABC, savoir, la base TC et le triangle ATC ; on a pris aussi d'autres équimultiples quelconques de la base CD et du triangle ACD, savoir, la base CL et le triangle ACL ;

[16] *ibid*, p. 139-140.

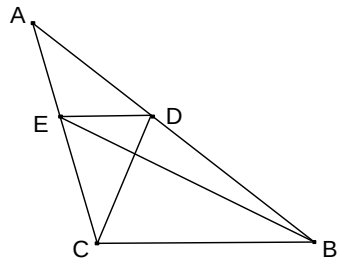


et l'on a démontré que si la base TC surpasse la base CL, le triangle ATC surpasse le triangle ALC ; que si la base TC est égale à la base CL, le triangle ATC est égal au triangle ALC, et que si la base TC est plus petite que la base CL, le triangle ATC est plus petit que le triangle ALC ; donc la base BC est à la base CD comme le triangle ABC est au triangle ACD (déf. 6. 5). […].

PROPOSITION II[17]

Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle ; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.

Menons DE parallèle à un des côtés BC du triangle ABC ; je dis que BD est à DA comme CE est à EA.
Joignons BE, CD.



Le triangle BDE sera égal au triangle CDE (37.1), parce qu'ils ont la même base DE, et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles DE, BC. Mais ADE est un autre triangle ; et des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur (7.5) ; donc le triangle BDE est au triangle ADE comme le triangle CDE est au triangle ADE. Mais le triangle BDE est au triangle ADE comme BD est à DA ; car ces deux triangles qui ont la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point E sur la droite AB, sont entr'eux comme leurs bases (1.6). Par la même raison le triangle CDE est au triangle ADE comme CE est à EA ; donc BD est à DA comme CE est à EA. […]

[17] EUCLIDE, [Eu1], tome 1, p. 141.

LIVRE VI, PROPOSITION XIV[18]

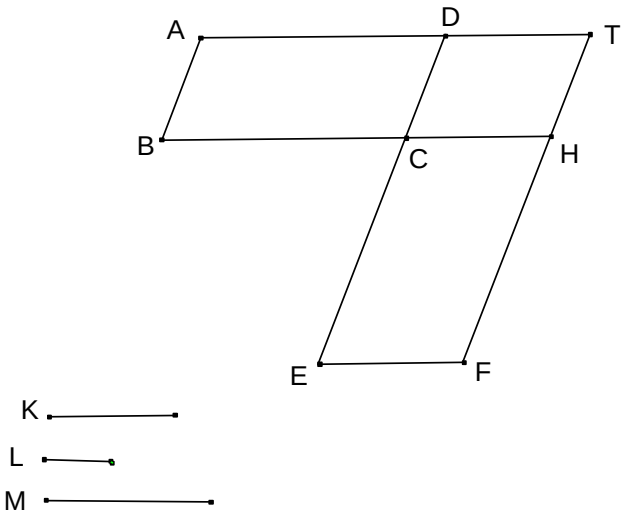
Deux parallélogrammes étant égaux et équiangles, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels ; et les parallélogrammes équiangles dont les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels sont égaux entr'eux.

LIVRE VI, PROPOSITION XVI

Si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous les deux extrêmes est égal au rectangle compris sous les moyennes ; et si le rectangle compris sous les deux extrêmes est égal au rectangle compris sous les moyennes, ces quatre droites sont proportionnelles.

LIVRE VI, PROPOSITION XXIII[19]

Les parallélogrammes équiangles ont entr'eux une raison composée des côtés.
Soient les parallélogrammes équiangles AC, CF, ayant l'angle BCD égal à l'angle ECH ; je dis que la parallélogramme AC a avec le parallélogramme CF une raison composée des côtés, c'est-à-dire celle que BC a avec CH, et de celle que DC a avec CE.
Plaçons ces parallélogrammes de manière que la droite BC soit dans la direction de la droite CH ; la droite DC sera dans la direction de CE (14.1). Achevons le parallélogramme DH ; prenons une droite quelconque K ; faisons en sorte que BC soit à CH comme K est à L, et que DC soit à CE comme L est à M (12.6).



Les raisons de K à L et de L à M seront les mêmes que les raisons des côtés, c'est-à-dire que celle de BC à CH et que celle de DC à CE. Mais la raison de K à M est composée de celle de K à L et de celle de L à M ; donc la droite K a avec la droite M une raison composée des côtés. Et puisque BC est à CH comme le parallélogramme AC est au parallélogramme CT (1.6), et que BC est à CH comme K est à L, K est à L

[18] EUCLIDE, [Eu1], p. 152-153
[19] *ibid*, p. 165.

comme le parallélogramme AC est au parallélogramme CT (11.5). De plus, puisque DC est à CE comme le parallélogramme CT est au parallélogramme CF, et que DC est à CE comme L est à M (1.6), L est à M comme le parallélogramme CT est au parallélogramme CF (11.5). Mais on a démontré que K est à L comme le parallélogramme AC est au parallélogramme CT, et L est à M comme le parallélogramme CT est au parallélogramme CF ; donc, par égalité, K est à M comme le parallélogramme AC est au parallélogramme CF (22.5). Mais la droite K a avec la droite M une raison composée des côtés. […] Donc, etc.

NUMÉRISATION DE LA GÉOMÉTRIE

TRANSFORMATION DE L'ORTHODOXIE EUCLIDIENNE, LE CAS A.M LEGENDRE

Les *Eléments de géométrie* de Legendre à la fin du XVIIIème siècle ont été réédités de nombreuses fois ; transformés et adaptés à l'enseignement, ils ont inspirés les manuels d'enseignement des classes de mathématiques jusque ceux de Rouché et Comberousse et d'Hadamard (fin XIXème) et plus loin, Deltheil et Caire, et, Lebossé et Hemery, cela jusqu'au milieu du XXème siècle (sauf pendant quelques années autour de la réforme de 1902-1905). Ils développent une exposition cohérente de la géométrie élémentaire avant l'élaboration du statut de nombre réel, ce qui est la situation de l'enseignement secondaire)
Legendre reprend l'exposé euclidien comme en témoigne l'ouverture du livre I par l'énoncé de principes comprenant vingt définitions, une explication et cinq axiomes:

DEFINITIONS[20]

I. La géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue. L'étendue a trois dimensions, longueur, largeur et hauteur
II. La *ligne* est une longueur sans largeur. Les extrémités d'une ligne s'appellent points : le point n'a donc pas d'étendue.
III. La *ligne droite* est le plus court chemin d'un point à un autre.
IV. Toute ligne qui n'est ni droite ni composée de ligne droite est une *ligne courbe*.
[…]
V. *Surface* est ce qui a longueur et largeur, sans hauteur ni épaisseur.
VI. Le plan est une surface, dans laquelle prenant deux points, et joignant ces deux points par une ligne droite, cette ligne est toute entière contenue dans la surface.
[…]
XII. Deux lignes sont dites *parallèles*, lorsque, étant situées dans un même plan, elles ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge l'une et l'autre.

Explication des termes et des signes

Axiome est une proposition évidente par elle-même.
Théorème est une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé *démonstration*.
Problème est une question proposée qui exige une *solution*.
[…]

[20] *Eléments de géométrie*, Legendre, p.1-6.

AXIOMES

1. Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.
2. Le tout est plus grand que la partie.
3. Le tout est égal à la somme des parties dans les quelles il a été divisé.
4. D'un point à un autre on ne peut mener qu'une seule ligne droite
5. Deux grandeurs, ligne, surface ou solide, sont égales, lorsqu'étant placées l'une sur l'autre elles coïncident dans toute leur étendue.

Grandeurs et nombres, méthode des aires

Mais il distingue (livre III), *l'égalité* au sens de la superposition et *l'équivalence* au sens de *surfaces égales*. Legendre ne pose pas de postulat des parallèles, il pense démontrer, et la démonstration est erronée, que la somme des angles de tout triangle est égale à 2 droits (ce que l'on sait être équivalent au postulat d'Euclide) et de là que *Deux parallèles sont partout également distantes.*
Par ailleurs, il accepte les opérations sur les rapports de grandeurs par le fait qu'ils se comportent comme des rapports de nombres via le choix d'une unité de mesure. Cette sorte d'explication ne trouvera des termes rigoureux qu'après la définition des nombres réels à partir des nombres entiers. La note placée au début du livre III rend compte de cette difficulté.

N.B[21]. Pour l'intelligence de ce livre et des suivants, il faut avoir présente la théorie des proportions, pour laquelle nous renvoyons aux traités ordinaires d'arithmétique et d'algèbre. Nous ferons seulement une observation, qui est très importante pour fixer le vrai sens des propositions, et dissiper toute obscurité, soit dans l'énoncé, soit dans les démonstrations.
Si on a la proposition A : B :: C : D, on sait que le produit des extrêmes A x D est égal au produit des moyens B x C. Cette vérité est incontestable pour les nombres ; elle l'est aussi pour des grandeurs quelconques, pourvu qu'elles s'expriment ou qu'on les imagine exprimées en nombres ; et c'est ce qu'on peut toujours supposer : par exemple, si A, B, C, D sont des lignes, on peut imaginer qu'une de ces quatre lignes, ou une cinquième, si l'on veut, serve à toutes de commune mesure et soit prise pour unité ; alors A, B, C, D représentent chacune un certain nombre d'unités, entier ou rompu, commensurable ou incommensurable, et la proportion entre les lignes A, B, C, D devient une proportion de nombres.
Le produit des lignes A et D, qu'on appelle aussi leur *rectangle*, n'est donc autre chose que le nombre d'unités linéaires contenues dans A, multiplié par le nombre d'unités linéaires contenues dans D ; et on conçoit facilement que ce produit peut et doit être égal à celui qui résulte semblablement des lignes B et C.
Les grandeurs A et B peuvent être d'une espèce et les grandeurs C et D d'une autre espèce, par exemple, des surfaces ; alors il faut toujours regarder ces grandeurs comme des nombres : A et B s'expriment en unités linéaires, C et D en unités superficielles, et le produit A x D sera un nombre comme le produit B x C. […]

Ayant ramené le travail sur les équivalences à des comparaisons de rectangles, la proposition clef pour le passage de l'égalité aux proportions est que *Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.* Si les bases sont commensurables, c'est évident, sinon un raisonnement par

[21] *Ibid*, p.61.

l'absurde et des considérations d'inégalités en viennent à bout. Legendre donne une sorte de raisonnement d'exhaustion simplifié par l'utilisation d'une quatrième proportionnelle :

PROPOSITION III[22]

Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

Soient ABCD, AEFD, deux rectangles qui ont pour hauteur commune AD ; je dis qu'ils sont entre eux comme leurs bases AB, AE.
Supposons d'abord que les bases AB, AE, soient commensurables entre elles, et qu'elles soient, par exemple, comme les nombres 7 et 4 : si on divise AB en 7 parties égales, AE contiendra 4 de ces parties, élevez à chaque point de division une perpendiculaire à la base, vous formerez ainsi sept rectangles partiels, qui seront égaux entre eux, puisqu'ils auront même base et même hauteur.
Le rectangle ABCD contiendra sept rectangles partiels, tandis que AEFD en contiendra quatre ; donc le rectangle ABCD est au rectangle ADEF comme 7 est à 4, ou comme AB est à AE. Le même raisonnement peut être appliqué à tout autre rapport que celui de 7 à 4 ; donc, quel que soit ce rapport, pourvu qu'il soit commensurable, on aura,

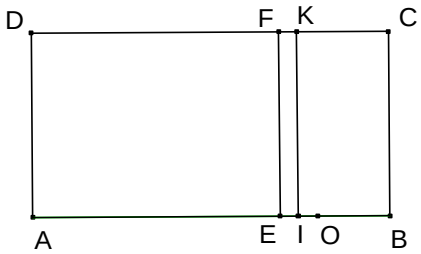
ABCD : AEFD :: AB : AE.

Supposons, en second lieu, que les bases AB, AE, soient incommensurables entre elles, je dis qu'on n'en aura pas moins,

ABCD : AEFD :: AB : AE.

Car si cette proportion n'est pas vraie, les trois premiers termes demeurant les mêmes, la quatrième sera plus grand ou plus petit que AE. Supposons qu'il soit plus grand et qu'on ait,

ABCD : AEFD :: AB : AO.



Divisez la ligne AB en parties égales plus petites que EO, il y aura au moins un point de division I entre E et O : par ce point élevez sur AI la perpendiculaire IK ; les bases AB, AI, seront commensurables entre elles, et ainsi on aura, par ce qui vient d'être démontré,

ABCD : AIKD :: AB : AI.

Mais on a, par hypothèse,

ABCD : AEFD :: AB : AO.

Dans ces deux proportions les antécédents sont égaux ; donc les conséquents sont proportionnels, et il en résulte,

[22] *ibid*, p.63-65.

AIKD : AEFD :: AI : AO.

Mais AO est plus grand que AI ; donc, pour que cette proportion subsistât, il faudrait que le rectangle AEFD fût plus grand que AIKD ; or, au contraire, il est plus petit ; donc la proposition est impossible ; donc ABCD ne peut être à AEFD comme AB est à une ligne plus grande que AE.

Par un raisonnement entièrement semblable, on prouverait que la quatrième terme de la proportion ne peut être plus petit que AE ; donc il est égal à AE.

Donc, quel que soit le rapport des bases, deux rectangles de même hauteur ABCD, AEFD, sont entre eux comme leurs bases AB, AE.

L'aire du rectangle

Ce résultat permet de répondre à la question de la mesure du rectangle, Legendre prend soin de commenter la question du choix de l'unité, et d'interpréter le nombre associé à B/A comme la mesure de B quand on prend A pour unité, avant de convenir de prendre pour unité d'aire le carré dont le côté est l'unité de longueur :

Donc on peut prendre pour mesure d'un rectangle le produit de sa base par sa hauteur, pourvu qu'on entende par ce produit celui de deux nombres, qui sont le nombre d'unités linéaires contenues dans la base, et le nombre d'unités linéaires contenues dans la hauteur.

Cette mesure, d'ailleurs, n'est pas absolue, mais seulement relative ; elle suppose qu'on évalue semblablement un autre rectangle en mesurant ses côtés par la même unité linéaire ; on obtient ainsi un second produit, et le rapport des deux produits est égal à celui des rectangles, conformément à la proposition qu'on vient de démontrer.

Par exemple, si la base du rectangle A est de trois unités et sa hauteur de dix, le rectangle sera représenté par le nombre 3 × 10, ou 30, nombre qui ainsi isolé ne signifie rien ; mais si on a un second rectangle B dont la base soit de douze unités et la hauteur de sept, le second rectangle sera représenté par le nombre 7 × 12, ou 84 : de là on conclura que les deux rectangles A et B sont entre eux comme 30 est à 84 ; donc si on convenait de prendre le rectangle A pour l'unité de mesure dans les surfaces, le rectangle B aurait alors pour mesure absolue 84/30, c'est-à-dire qu'il serait égal à 84/30 d'unités superficielles.[23]

FÉCONDITÉ DU XIX ème SIÈCLE

La théorie des transformations et le programme d'Erlangen, induisant la multiplicité des géométries, l'évolution de la mécanique, puis la construction des nombres réels, vont profondément modifié le paysage.

Les traités de la fin du XIX ème et de la première moitié du XXème intègrent cette évolution : ils introduisent le point de vue des groupes et des invariants. Ils présentent de manière organisée les notions de déplacements et de symétrie en portant souvent une vision mécanique à l'intérieur de la géométrie, héritée de l'idée de mouvement ; mais c'est sur un cadre géométrique déjà constitué qui est celui d'Euclide.

En effet notre expérience de l'espace s'exprime en termes de mouvement de translation et de mouvement de rotation, le cours de géométrie donne alors un statut géométrique à ces déplacements qui permettent le passage d'un solide de l'espace ou d'une figure invariable du plan d'une position initiale à une position finale. Qu'il s'agisse du plan ou de l'espace l'idée de déplacement est reliée à l'égalité des figures au sens de la superposition. Faire coïncider deux figures en amenant l'une F sur l'autre F', c'est effectuer une opération sur les points de F qui les amènent sur les points de F', et on

[23] *Ibid,* p. 66.

va l'effectuer de la manière la plus économique possible, pour cela il s'agit de la connaître sur un minimum de points pour la connaître sur tous. De ce point de vue découle les propriétés d'invariance, le souci d'étudier systématiquement les figures homologues des figures simples et aussi la possiblité de composer et décomposer. L'exercice dans cette géométrie consiste alors à reconnaître des régularités ou des propriétés des figures, en découvrant les transformations qui l'habitent.
Jusqu'à la réforme des mathématiques modernes, la voie moyenne du cours de géométrie reste ainsi dans la problématique euclidienne et introduit sans formalisme au point de vue des groupes et des invariants présenté dans le programme d'Erlangen.

Cas d'isométrie et/ou cas d'égalité

Dans l'histoire de la géométrie (autant que dans la pratique naïve des « commençants »), ce qui est premier ce sont l'égalité et le mouvement, la notion de transformation se construit ensuite au confluent de plusieurs problématiques et vient enrichir le cadre euclidien en le plaçant dans un champ plus vaste.
Au contraire de cela, actuellement, le principe d'égalité par superposition est refusé au collège pour une présentation qui met en avant les isométries planes : réflexions, demi-tours, rotations ; d'une part, il est souvent naturellement ou implicitement utilisé par élèves et professeurs et d'autre part s'en priver entraîne en seconde des contorsions voisines de l'escroquerie dans la présentation des cas d'isométries.
Remarque : dans les premières activités géométriques proposées aux élèves, il y a équerre, règle compas, rapporteur, tous instruments servant à reproduire « du même » par superposition (deux segments de même longueur sont de manière évidente à ce point superposables que ce « même » a été acquis via la superposition avec une règle).
Fonder proprement la géométrie élémentaire n'est pas simple, le recours à une axiomatique est ici exclu. Le qualificatif « isométrique » est introduit pour éviter le mouvement-superposition mais il induit une mesure (et les nombres réels) dont la construction est hors de portée et dont la pratique relève de ce qu'on voulait éviter.
Il y a une exposition cohérente de la géométrie euclidienne basée sur un principe (l'égalité par superposition) et des règles opératoires sur les grandeurs, tout cela étant porté par l'expérience sensible, et sur ce socle le discours démonstratif construit l'édifice. Dans ce discours le mot « égalité » a plusieurs déterminations. Et c'est pratique courante en mathématiques que d'identifier des objets qui relèvent du « même » d'un certain point de vue, tout en conservant le souvenir qu'ils sont distincts, c'est précisément faire le travail d'abstraction ; dans ce champ de formes simples, l'exercice a du bon. L'égalité n'est pas l'identité, ni une chose en soi à acquérir, elle prend consistance et forme au regard des choses mises en comparaison.
Au programme de seconde figurent les triangles isométriques, cette notion est-il dit « *répond à un souci de faire revivre les acquis du collège en évitant les révisions systématiques* ». Mais alors deux triangles isométriques seraient alors deux triangles se correspondant par une isométrie. Sachant que les élèves ne peuvent penser cela convenablement, il est dit que l'enseignant peut choisir sa définition en fonction de sa classe « *deux triangles sont isométriques si l'un est l'image de l'autre par une translation,une symétrie axiale, une rotation ou une succession de telles transformations* » le commentaire continue : *« une autre définition plus intuitive pourrait être « deux triangles sont isométriques s'ils ont des côtés et des angles respectivement égaux » l'objectif est d'atteindre rapidement les cas d'isométrie »… « l'enseignant décidera en fonction de ses élèves et du temps dont il dispose du caractère admis ou démontré des trois cas d'isométrie des triangles »*
Comment pourrait-il faire quand on lui propose deux définitions, correspondant à des problématiques différentes dont aucune n'est accessible à ce niveau ?

UNE RÉINTERPRÉTATION DE LA TRILOGIE « GRANDEUR, NOMBRE, MESURE » à l'usage de l'enseignement.

Dans l'exposé de la géométrie élémentaire hérité d'Euclide, les questions posées par la comparaison des grandeurs et la mesure sous-tendent l'extension des nombres et l'introduction des nombres réels. Tout autre est le point de vue actuel qui sous-entend une connaissance des nombres

réels, ou plutôt de « nombres » préexistant à tout mesurage et réalisés sur les écrans des calculatrices (l'effectivité est donc aux commandes et toute question d'infinitude est évacuée). Quelles bases logiques un peu solides se donner pour l'enseignement de la géométrie élémentaire ? Des livres de préparation aux concours d'enseignement s'appliquent à donner comme bagage aux futurs professeurs, une axiomatique, non minimaliste, exprimée en termes simples, sorte de prémisse sur laquelle construire un exposé cohérent qui ne s'enseigne pas mais sur laquelle s'appuyer ; chacune raconte à sa façon le rapport entre formes géométriques élémentaires, grandeurs et nombres ; dans chacune on retrouve des axiomes d'incidence, d'ordre et de congruence.
Dernièrement le livre de Daniel Perrin *Mathématiques d'école, nombres, mesures et géométrie*, met en avant la notion d'aire et introduit comme axiome une notion de mesure d'aire : μ est une application d'un ensemble P de parties du plan dites quarrables dans l'ensemble R^+ des nombres réels positifs ou nul, simplement additive, invariante par isométrie et homogène (dans un changement d'échelle de coefficient α, l'aire d'une partie quarrable est multipliée par α^2).
Moyennant quoi, il en déduit l'égalité d'aires des parallélogrammes (ou triangles) de même bases situés entre deux mêmes parallèles, la formule de l'aire du rectangle et celle du triangle, ainsi que le rapport des aires de deux triangles.

Anne-Marie Marmier

BIBLIOGRAPHIE

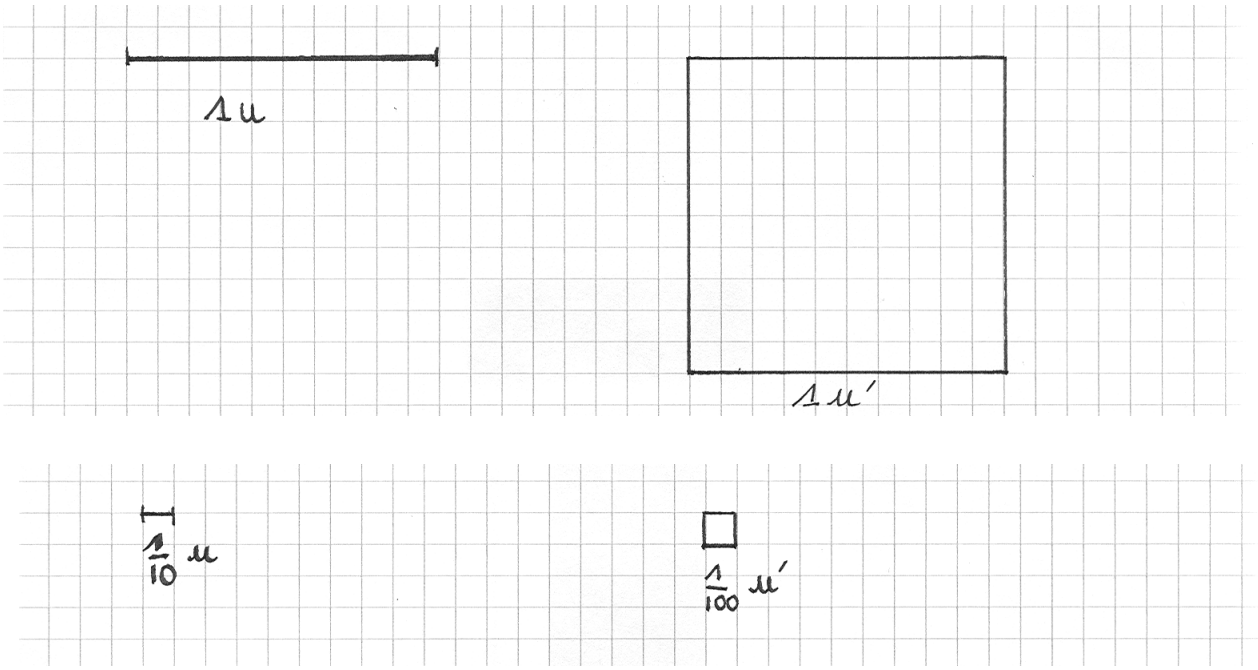
EUCLIDE [Eu1], *Les oeuvres d'Euclide*, traduction F. Peyrard, C.F Patris, Paris, 1819, réédition Blanchard, 1966, 1993.
EUCLIDE [Eu2], *Les Eléments*, volume 1: Introduction générale, Livres I à IV, introduction générale par Maurice Caveing, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, PUF, Paris, 1990
EUCLIDE [Eu3], *Les Eléments*, volume 2: Livres V à IX, traduction et commentaires par B. Vitrac, PUF, Paris, 1994
LEGENDRE A.M. [Le], *Eléments de géométrie*, Firmin Didot, 14ème édition, Paris, 1839.
GERGONDEY R., « Entre calcul et concept », *Textes et Documents pour la Classe*, scérén [CNDP-CRDP], « Les nombres », n°869, février 2004.
PERRIN D., *Mathématiques d'école, nombres, mesures et géométrie*, Cassini, Paris, 2005.
ZEHREN C., BAREIL H. (cood.), « Dossier: la géométrie », bulletin national de l'APMEP, n° 430 et n° 431, 2000.

AU COLLÈGE…

AIRE DU RECTANGLE

En écho à la proposition de Legendre qui donne sens à la formule de l'aire du rectangle (« produit de sa base par sa hauteur »), voici une fiche d'activité de sixième qui détaille à propos de l'aire du rectangle, comment les nombres sont associés aux longueurs et via la multiplication aux aires.

UNITÉS D'AIRE



On choisit une unité de longueur, on obtient une unité d'aire associée.
Si on divise l'unité de longueur par 10, l'unité d'aire associée sera divisée par 100.
Et si on divise l'unité de longueur par 100 ?

AIRE DU RECTANGLE : AVEC DES NOMBRES ENTIERS

1) a) Dessine un rectangle dont la longueur mesure 6cm et la largeur mesure 4cm.
   b) Dessine l'unité d'aire associée à l'unité de longueur choisie.
   c) Quelle est l'aire du rectangle dans cette unité d'aire ?
   d) Quelle opération nous permet de dénombrer ces unités plus facilement.
2) Recommence avec un rectangle dont les dimensions sont 7cm et 8cm.
3) Et si les dimensions du rectangle sont 120m et 345m ?

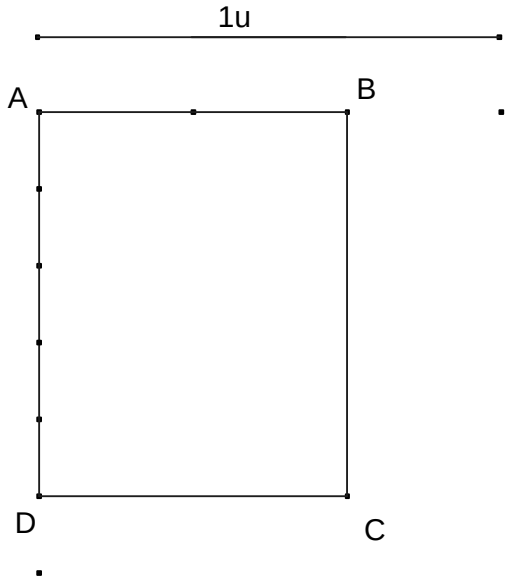
AIRE DU RECTANGLE : AVEC DES NOMBRES DÉCIMAUX NON ENTIERS

1) a) Dessine un rectangle dont la longueur mesure 1,8dm et la largeur mesure 1,2dm.
   b) Dessine l'unité d'aire associée à l'unité de longueur choisie.

c) Peut-on donner l'aire du rectangle en dm^2 ?

d) Peut-on donner l'aire du rectangle en cm^2 ? Quelle opération doit-on faire pour donner la réponse à la question précédente ?

AIRE DU RECTANGLE : AVEC DES NOMBRES RATIONNELS.



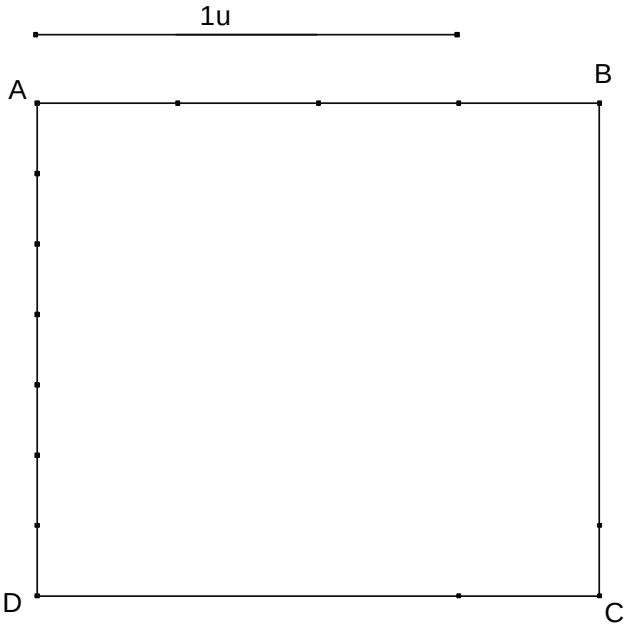
Compléter avec des fractions

L = … u

l = … u

Dessine le carré représentant l'unité d'aire associée à l'unité de longueur u.
Trace les lignes parallèles aux côtés du rectangle passant par les points marqués, un quadrillage rectangulaire apparaît.
Quelle fraction de l'aire du carré unité représente un rectangle du quadrillage ?
Quelle fraction de l'aire du carré unité représente l'aire du rectangle ABCD ?

****



Compléter avec des fractions

L = – u

l = – u

Recommence le travail avec ce rectangle.

Hélène Nemitz

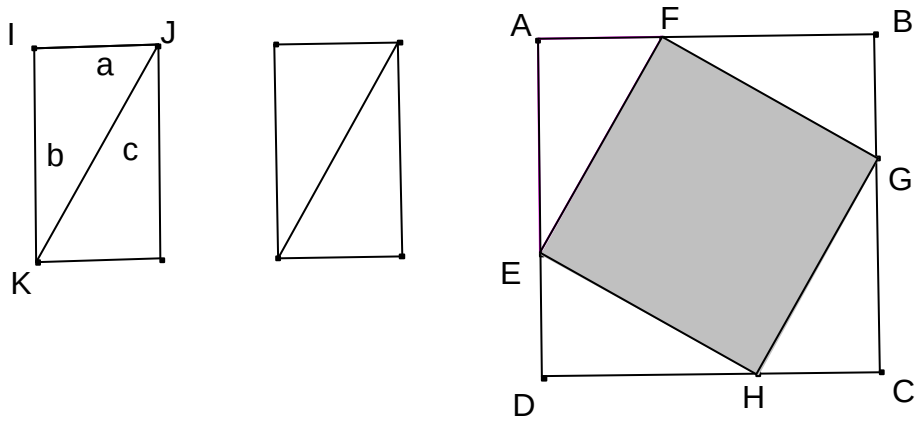
AU COLLÈGE…

LE THÉORÈME DE PYTHAGORE

ÉNONCÉ :
Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

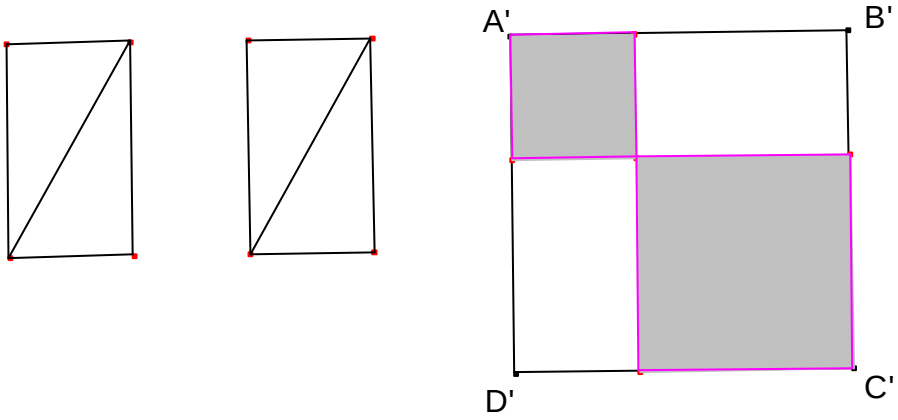
DÉMONSTRATION :
On pourrait mettre à portée la démonstration d'Euclide en introduisant la notion de triangles superposables. Cette démonstration, plus visuelle, utilise les règles opératoires sur les grandeurs (voir p.6), qui vont de soi. Il s'agit ici de faire manipuler les élèves : ils découpent et ils recollent.
Ils découpent 2 fois 4 triangles rectangles dans 2 rectangles de mêmes dimensions.
Ils les placent de 2 manières pour former 2 carrés ABCD et A'B'C'D' identiques, superposables et donc de même aire.

Figure 1:



Démontrons d'abord que le quadrilatère EFGH est un carré.
Par construction le quadrilatère EFGH a ses 4 côtés égaux, c'est donc un losange.
Les angles *(AFE)* et *(BFG)* sont complémentaires donc angle *(EFG)* = 90°.
EFGH est un losange qui possède un angle droit par conséquent c'est un carré.
Son aire est égale à c^2

Figure 2 :



Les carrés ABCD et A'B'C'D' ont leurs côtés égaux et ont donc la même aire. Et il est simple pour nos élèves de voir que l'on retire la même quantité à une même aire.
Dans les figures 1 et 2 les aires des surfaces grisées sont donc égales.
Donc Aire (EFGH) = somme des aires des deux carrés grisés de la figure 2.
Si on retourne dans le triangle IJK on obtient la relation du théorème :

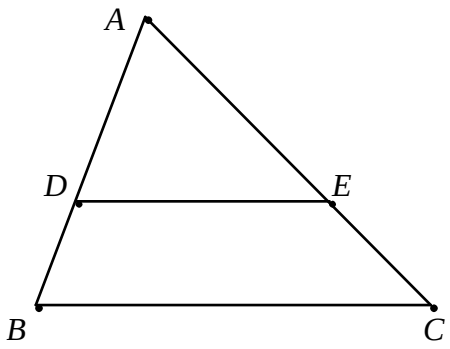
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Janine Aspra

II. LE THÉORÈME DE THALÈS

LES DEUX ÉNONCÉS DU THÉORÈME DE THALÈS

Premier énoncé : *"Si une certaine droite est menée parallèle à l'un des côtés d'un triangle, elle coupera les côtés du triangle en proportion ; et si les côtés du triangle sont coupés en proportion, la droite jointe entre les points de section sera parallèle au côté restant du triangle."*



Autrement dit, si la droite *DE* est parallèle au côté *BC*, on a la relation:

$$AD/DB = AE/EC$$

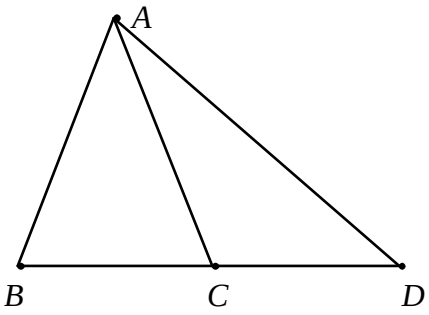
et réciproquement. Euclide considère seulement le cas où les points *B* et *D* d'une part, *C* et *E* d'autre part sont du même côté par rapport à *A*.

Second énoncé : *"Deux sécantes sont coupées en parties proportionnelles par des droites parallèles."*

LES DÉMONSTRATIONS DU THÉORÈME DE THALÈS

LA DÉMONSTRATION EUCLIDIENNE

Elle est fondée sur la méthode des aires.
Proposition : *"Les triangles et les parallélogrammes qui sont sous la même hauteur sont l'un relativement à l'autre comme leurs bases."*



Autrement dit, on a la relation :

aire *ABC*/aire *ACD* = *BC*/*CD*

Cas commensurable : *les segments BC et BD ont une mesure commune*

Il existe une longueur λ telle que :

$BC = p\lambda$ $CD = q\lambda$, p et q étant entiers

Soit alors σ l'aire du triangle de sommet *A* et dont la base est un segment de longueur λ situé sur la droite (*BC*), on montre aisément que

aire (*ABC*) = pσ aire (*ACD*) = qσ.

Ce qui implique la proposition cherchée.

Cas incommensurable : *les segments BC et CD n'ont pas de mesures communes*

On utilise la théorie des proportions du livre V d'Euclide.

En fait on montre les assertions suivantes

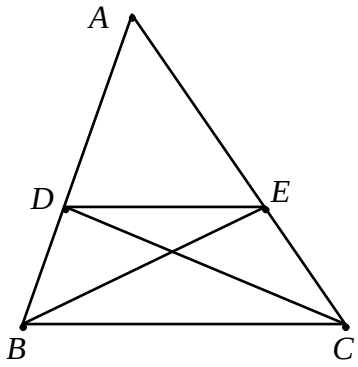
- si p*BC* < q*CD*, alors p.aire (*ABC*) < q.aire (*ACD*)

- si p*BC* = q*CD*, alors p.aire (*ABC*) = q.aire (*ACD*)

- si p*BC* > q*CD*, alors p.aire (*ABC*) > q.aire (*ACD*)

qui implique la relation cherchée
.
On peut alors montrer le premier énoncé du théorème de Thalès :

« Soit ABC un triangle, D un point sur le côté AB, E le point d'intersection E de la parallèle menée par le point D à la droite (BC) avec le côté AC, alors les points E et D sont du même côté de la droite (BC) et les rapports AD/AB et AE/AC sont égaux. »



On veut montrer l'égalité

$$AD/AB = AE/AC$$

On sait, d'après la proposition précédente, que

$$DB/DA = \text{aire } EDB/\text{aire } EDA$$

$$EC/EA = \text{aire } DEC/\text{aire } DEA$$

D'autre part, les triangles *EDB* et *DEC* ayant même base et compris entre les mêmes parallèles sont égaux, ce qui implique l'égalité de rapport

$$AD/DB = AE/EC$$

On en déduit l'égalité cherchée.
Attention : les rapports ne sont pas des nombres et il faut montrer que l'égalité cherchée est conséquence de l'égalité des rapports *DB*/*DA* et *EC*/*EA*.

DÉMONSTRATION DU SECOND ÉNONCÉ

On commence par démontrer la proposition :

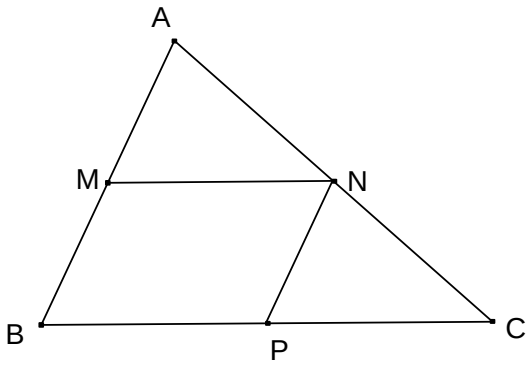
« Si des droites parallèles découpent sur une sécante des segments égaux, elles découpent sur tout autre sécante des segments égaux. »

- Nous démontrerons d'abord la proposition suivante :

« Soit ABC un triangle, la droite passant par le milieu M du côté AB rencontre le côté AC en son milieu. »

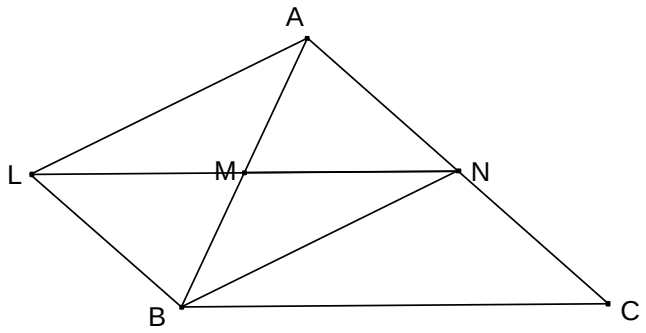
Nous donnerons deux démonstrations, une démonstration utilisant les cas d'égalité des triangles, une définition utilisant les propriétés de la symétrie centrale.

Première démonstration



La parallèle à la droite (*BC*) passant par le point *M* rencontre le côté *AC* en un point *N*. En effet les points *A* et *B* étant de part et d'autre de la parallèle à la droite (*BC*) passant par *M*, les points *A* et *C* sont situés de part et d'autre de cette parallèle, ce qui prouve que le point *N* est situé sur le segment *AC*.
De même la parallèle à la droite (*AB*) passant par *N* rencontre le côté *BC* en un point *P*. Alors le quadrilatère *BMNP* est un parallélogramme et les segments *BM* et *PN* sont égaux.
Les triangles *AMN* et *NPC* sont égaux ; en effet les côtés *AM* et *NP*, égaux au segment *BM*, sont égaux, les angles correspondants *MAN* et *PNC* sont égaux, et les angles *AMN* et *NPC*, tous deux égaux à l'angle *MNP* (angles alternes internes) sont égaux.
Il s'ensuit que les côtés *AN* et *NC* sont égaux, autrement dit que le point *N* est le milieu du segment *AC*.

Seconde démonstration



Les notations étant les mêmes que ci-dessus, soit *L* le symétrique de *N* par rapport à *M*, alors le quadrilatère *ALBN* est un parallélogramme. Il s'ensuit que les segments *BL* et *NA* sont égaux. Les droites (*BL*) et (*NA*) sont parallèles, il s'ensuit que le quadrilatère *BLNC* est un parallélogramme et par conséquent les segments *BL* et *CN* sont égaux. Il s'ensuit que les segments *NA* et *CN* sont égaux, autrement dit que *N* est le milieu de *AC*.

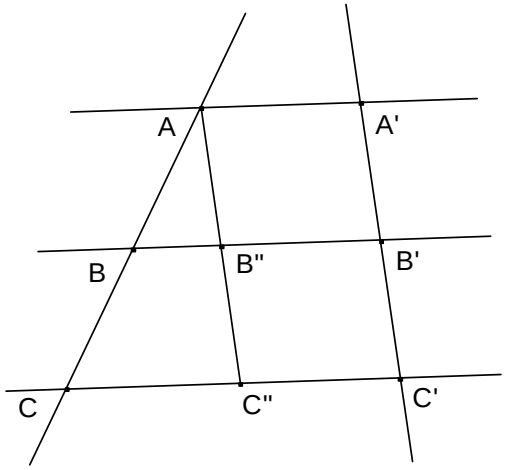
On en déduit aisément la proposition suivante :

Dans un triangle, la droite joignant les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté et égale à sa moitié.

- Avant de montrer le second énoncé du théorème de Thalès nous montrerons la proposition suivante (théorème des divisions égales) :

« Si des parallèles découpent sur une sécante des segments égaux, elles découperont sur toute sécante des segments égaux. »

Il suffit de montrer que si, dans la configuration ci-dessous, les segments *AB* et *BC* sont égaux, alors les segments *A'B'* et *B'C'* sont égaux.

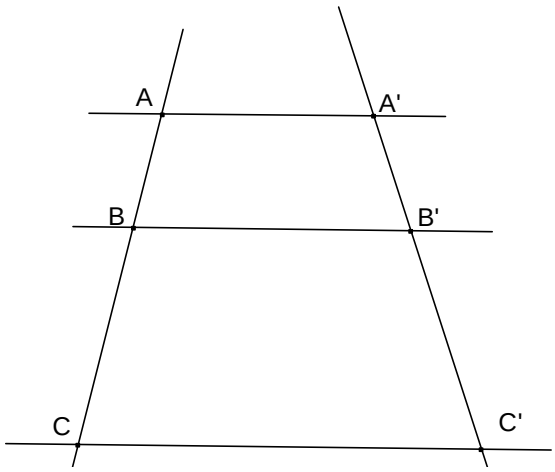


Menons par le point *A* la parallèle à la droite (*A'B'*). Cette parallèle rencontre les droites (*BB'*) et (*CC'*) respectivement en *B"* et *C"*. Alors les segments *AB"* et *B"C"* sont égaux.
Dans les parallélogrammes *AB"B'A'* et *B"C"C'B'*, les côtés *A'B'* et *B'C'* sont respectivement égaux aux côtés *AB"* et *B"C"* et par conséquent sont égaux.

Le théorème des lignes proportionnelles.
On peut alors démontrer le théorème des lignes proportionnelles aujourd'hui appelé théorème de Thalès :

« Des parallèles découpent sur deux sécantes des segments proportionnels.»

Il suffit de considérer la situation suivante :



et de montrer que les rapports *AB*/*BC* et *A'B'*/*B'C'* sont égaux.

On distingue encore deux cas selon que les segments AB et BC sont commensurables ou ne le sont pas.

Les segments AB et BC sont commensurables

Lorsque les segments *AB* et *BC* sont commensurables, on considère une partie commune λ telle que

$$AB = p\lambda \qquad BC = q\lambda$$

On peut alors découper les segments *AB* et *BC* en parties égales de longueur λ et par les points de division on mène les parallèles à la droite (*AA'*). Ces parallèles découpent sur la droite (*A'C'*) des divisions égales de longueur λ' et on a les relations

$$A'B' = p\lambda' \qquad B'C' = q\lambda'.$$

Ce qui prouve l'égalité des rapports *AB*/*BC* et *A'B'*/*B'C'*.

Les segments AB et BC ne sont pas commensurables

On pourrait reprendre la méthode euclidienne.
Nous en donnerons une autre utilisant la notion d'approximation décimale ; pour ce faire nous reprenons une démonstration donnée dans un ouvrage de Géométrie à l'usage des élèves des écoles primaires supérieures[1].

Soit *AB* et *BC* deux segments, pour tout entier n il existe un entier p tel que

$$p\frac{BC}{n} \leq AB < (p+1)\frac{BC}{n}$$

p/n est appelée *la valeur par défaut* à 1/n près du rapport *AB*/*BC*
(p+1)/n est appelée *la valeur par excès* à 1/n près du rapport *AB/BC*
On considère la division de la droite (AB) définie par la suite de segments AA_1, A_1A_2, …, A_kA_{k+1}, …, tous de même longueur *AB*/n. Il existe un entier p et un seul tel que *C* coïncide avec A_p ou soit contenu dans le segment A_pA_{p+1}. On a alors les inégalités

$$p\frac{BC}{n} \leq AB < (p+1)\frac{BC}{n}$$

ce qui prouve que p/n et (p+1)/n sont respectivement les valeurs approchées par défaut et par excès du rapport *AB/BC*.
Les parallèles à la droite (AA') menées par les points A_k découpent sur la droite (A'B') des divisions égales et on montre aisément la relation

$$p\frac{B'C'}{n} \leq A'B' < (p+1)\frac{B'C'}{n}$$

[1]H. Neveu & H. Bellanger, *Cours de Géométrie théorique et pratique*, à l'usage des élèves des Ecoles Primaires Supérieures et des candidats aux Ecoles Nationales d'Arts et Métiers, première partie : géométrie plane, Masson, Paris 1907

ce qui prouve que les valeurs par défaut et par excès à 1/n près des rapports AB/BC et A'B'/B'C' coïncident.
On peut alors définir pour tout entier les valeurs approchées à 10^{-k} près, on note a_k la suite des valeurs approchées par défaut à 10^{-k} près, b_k la suite des valeurs approchées par excès à 10^{-k} près et on a les inégalités :

$$a_kBC \leq a_{k+1}BC \leq \ldots \leq AB \leq \ldots \leq b_{k+1}BC \leq b_kBC$$

On peut noter que la suite des différences $b_k - a_k$ tend vers 0 lorsque k augmente indéfiniment autrement dit que les suites (a_k) et (b_k) sont adjacentes. La théorie des nombres réels implique qu'elles sont convergentes et ont même limite. C'est cette limite qui définit le rapport *AB*/*BC* comme nombre réel.
On montre alors que les nombres réels qui définissent les rapports *AB*/*BC* et *A'B'*/*B'C'* sont égaux.

LES IMPLICATIONS DU THÉORÈME DE THALÈS

DIVISION D'UN SEGMENT EN PARTIES ÉGALES

Si la division d'un segment en deux parties égales est indépendante du postulat des parallèles, la division en n parties égales est une conséquence du théorème des divisions égales.
Soit *AB* un segment que l'on veut diviser en n parties égales. Soit *Ax* une demi-droite, on porte sur cette demi-droite les points A_1, A_2, …, A_n tels que les segments $AA1$, A_1A_2, …, $A_{n-1}A_n$ soient égaux et on mène par les points de division les parallèles à la droite (A_nB) qui découpent sur le segment *AB* n divisions égales.

LES TRIANGLES SEMBLABLES

On dit que deux triangles sont semblables si on peut définir une correspondance entre les sommets tels que les angles correspondants sont égaux et les côtés correspondants sont proportionnels.
Ainsi les triangles ABC et A'B'C' sont semblables si les angles au sommets A et A' (resp. B et B', C et C') sont égaux et si on a les relations

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$$

La similitude est ainsi définie par cinq égalités. Les cas de similitude énonce des conditions suffisantes pour que deux triangles soient semblables. On montre que deux égalités convenables suffisent pour que les triangles soient semblables.
Nous énonçons les trois cas de similitudes :

Soient les triangles *ABC* et *A'B'C'*, alors :
- si les angles A', B', C' sont égaux aux angles A, B, C, alors les triangles sont semblables[2].
- si les angles B'A'C' et BAC sont égaux et si les côtés A'B', A'C' sont proportionnels aux côtés AB, AC, c'est-à-dire si on a la relation

[2]Notons que si les angles A' et B' sont respectivement égaux aux angles A et B, alors les angles C' et C sont égaux.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$$

alors les triangles sont semblables.
- si les côtés A'B', B'C', C'A' sont proportionnels aux côtés AB, BC, CA, c'est-à-dire si on a les relations

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$$

alors les triangles sont semblables.

- Notons d'abord que, un triangle ABC étant donné, si par un point B' du côté AB

on mène la parallèle à la droite (BC) passant par B' et si on note C' le point d'intersection de cette parallèle avec le côté AC, alors les triangles AB'C' et ABC sont semblables.

Il est clair que les angles AB'C' et AC'B' sont respectivement égaux aux angles ABC et ACB et l'on sait que les rapports AB'/AB et AC'/AC sont égaux ; il reste à montrer l'égalité de ces rapports avec B'C'/BC. Pour cela il suffit de mener la parallèle à la droite (AB) passant par C', cette parallèle rencontre le côté BC en D, alors AC'/AC = BD/BC, et puisque le quadrilatère BB'C'D est un parallélogramme, B'C' = BD, ce qui implique l'égalité

AC'/AC = B'C'/BC.

ce qui achève la démonstration.

- Cette situation est générique.

Soient ABC et A'B'C' deux triangles, on notera D le point de la demi-droite AB) tel que AD = A'B', E le point de la demi-droite AC) tel que AE = A'C'.
On peut supposer que A'B' est inférieur ou égal à AB.
- Supposons que les angles A', B', C' sont égaux aux angles A, B, C. Dans les triangles A'B'C' et ADE les angles B'A'C' et DAE sont égaux et les côtés A'B' et A'C' sont respectivement égaux aux côtés AD et AE, ce qui montre que les triangles A'B'C' et ADE sont égaux. Il s'ensuit que les angles ADE et ABC sont égaux ; comme les demi-droites BC) et DE) sont du même côté de la droite (AB), il s'ensuit que les droites (BC) et (DE) sont parallèles, ce qui implique que les triangles ADE et ABC sont semblables, donc les triangles A'B'C' et ABC sont semblables.
- Supposons les angles B'A'C' et BAC sont égaux et que les rapports A'B'/AB et A'C'/AC soient égaux. Dans les triangles A'B'C' et ADE, les angles B'A'C' et DAE sont égaux et les côtés A'B' et A'C' sont respectivement égaux aux côtés AD et AE, ce qui montre que les triangles A'B'C' et ADE sont égaux. On peut alors écrire la relation

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

ce qui prouve que les droites (*DE*) et (*BC*) sont parallèles.
Il s'ensuit que les triangles ADE et ABC sont semblables, donc les triangles A'B'C' et ABC sont semblables.
- Supposons que l'on ait les relations

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$$

On en déduit que les rapports AD/AB et AE/AC sont égaux et par conséquent la droite (DE) est parallèle à la droite (BC), ce qui implique que les triangles ADE et ABC sont semblables. On en déduit les relations

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

ce qui implique que les segments DE et B'C' sont égaux. Ainsi les triangles ADE et A'B'C' ont leur côtés égaux chacun à chacun et par conséquent sont égaux. Il s'ensuit que les triangles A'B'C' et ABC sont semblables.

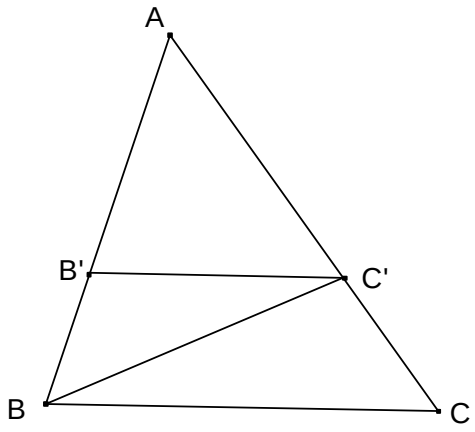
- On peut alors montrer la proposition suivante :

« Les aires de deux triangles semblables sont entre elles comme les carrés de leurs côtés »

De façon précise, soit *ABC* et *A'B'C'* deux triangles semblables, alors

$$\frac{(A'B'C')}{(ABC)} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

On peut toujours supposer que les points *A* et *A'* coïncident, et que les point *B'* et *C'* sont situés respectivement sur les côtés *AB* et *AC*.



On a les relations

$$\frac{(AB'C')}{(ABC')} = \frac{AB'}{AB} \qquad \frac{(ABC')}{(ABC)} = \frac{AC'}{AC}$$

ce qui implique la relation

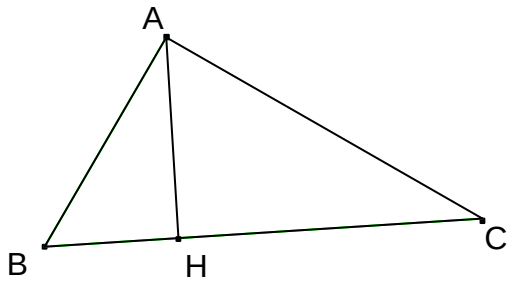
$$\frac{(A'B'C')}{(ABC)} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC}$$

et puisque les rapports *AB'/AB* et *AC'/AC* sont égaux (théorème de Thalès), on en déduit la propriété cherchée.

En particulier le rapport des aires de deux triangles semblables est égal au rapport des carrés des hypoténuses.
.

LES RELATIONS MÉTRIQUES

Relations métriques dans le triangle rectangle



Soient alors un triangle *ABC* rectangle en *A*, *AH* la hauteur, alors les triangles *HBA* et *ABC* sont semblables et les triangles *HAC* et *ABC* sont semblables.
On peut alors écrire les relations :

$$\text{aire}(HBA)/\text{aire}(ABC) = AB^2/BC^2$$

$$\text{aire}(HAC)/\text{aire}(ABC) = AC^2/BC^2$$

et puisque

$$\text{aire}(HBA) + \text{aire}(HAC) = \text{aire}(ABC)$$

ce qui implique

$$AB^2/BC^2 + AC^2/BC^2 = 1$$

soit la relation de Pythagore

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

On peut noter la double lecture de cette démonstration, relation entre mesures ou relations entre aires.

Des relations de similitude entre les triangles *ABC*, *HBA* et *HAC* on obtient les relations :

$$AH^2 = BH.HC$$

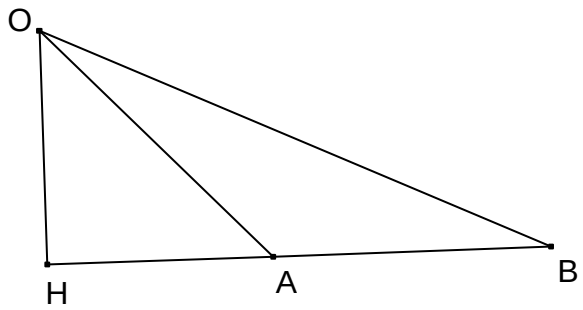
$$AB^2 = BC.BH \qquad AC^2 = BC.CH$$

Notons que les deux dernières relations impliquent la relation de Pythagore.

Relations métriques dans le cercle

Notons d'abord la proposition suivante qui est conséquence du théorème de Pythagore.

Soit la configuration suivante où l'angle en H est droit:



alors

$$OB^2 - OA^2 = HB^2 - HA^2$$

On laisse au lecteur le soin de démontrer les propriétés suivantes :
Soit un cercle de centre O et de rayon r, P un point non situé sur le cercle, la droite (OP) coupe le cercle en deux points A et B, une droite passant par P coupe le cercle en deux points M et N, alors

- Si *P* est extérieur au cercle, alors

$$PM.PN = PO^2 - r^2$$

- Si P est intérieur au cercle, alors

$$PM.PN = r^2 - PO^2$$

Ainsi le produit *PM.PN* ne dépend pas de la position de la droite passant par *P*, on l'appelle la *puissance* de *P* par rapport au cercle.

Rudolf Bkouche

AU COLLÈGE….

DROITE DES MILIEUX

Quand il s'agit en quatrième de montrer les propriétés de ce que la coutume collégienne appelle« la droite des milieux », on peut choisir comme enchaînement :

- *montrer que la droite joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté, et que le segment ainsi déterminé est égal à la moitié de ce troisième côté.*
- *Ou bien à l'inverse, montrer que la droite menée par le milieu d'un côté parallèlement à un autre côté coupe le troisième côté en son milieu, etc.*

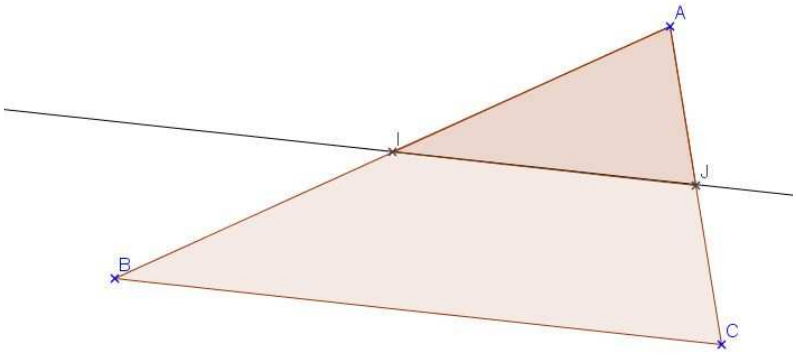
Dans tous les cas, on ne peut éviter de croiser l'organisation de l'ordre dans le plan….Mais il n'est pas facile pour un élève de comprendre qu'un quadrilatère qui a deux côtés parallèles et égaux peut être parallélogramme ou croisé, alors, voici un enchaînement qui utilise la notion d'aire et évite ce genre de considération. Cependant où la question de l'ordre est-elle cachée ?

ABC est un triangle, I le milieu du côté [AB], et la droite passant par I et parallèle au côté [BC] coupe [AC] en J. Le but est de démontrer que J est le milieu de [AC] (théorème : "milieu + parallèle implique milieu"), en justifiant chacune des affirmations suivantes :

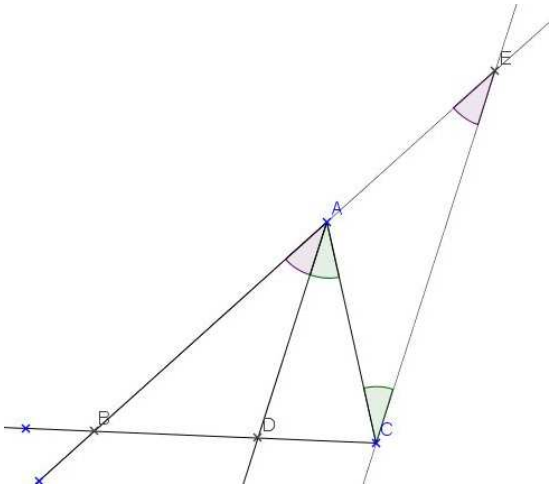
1°) Aire (AIJ) = Aire (BIJ).
2°) Aire (BIJ) = Aire (CIJ).
3°) Aire (AIJ) = Aire (CIJ).
4°) AJ = JC.
5°) J est le milieu de [AC].

Remarques : - Dès lors, la propriété pour la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle d'être parallèle au troisième côté (théorème : "milieux implique parallèle") vient rapidement car par deux points ne passe qu'une et une seule droite, et la démonstration de ce dernier point ne fait pas intervenir de "quadrilatère non croisé".

- C'est aussi l'occasion de réinvestir la propriété des médianes d'un triangle, relativement à l'aire, qui est vue en cinquième.



APPLICATION EN CLASSE DU THÉORÈME DE THALÈS
Une propriété des bissectrices ... et une autre !



Première propriété :
La bissectrice intérieure d'un angle d'un triangle divise le côté opposé en segments (additifs) proportionnels aux côtés adjacents.

...autrement dit

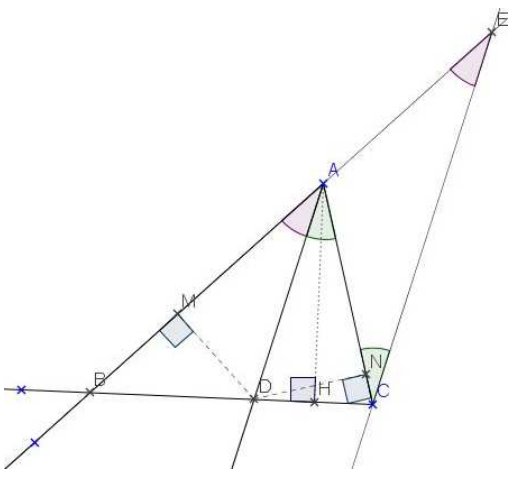
$\frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA}$.

(AD) est la bissectrice intérieure de l'angle (BAC). La parallèle à (AD) passant par C coupe (BA) en E.

1°) Démontrer angle(ACE) = angle(DAC)
2°) Démontrer que angle(BEC) = angle(BAD).
3°) En déduire que angle(ACE) = angle(ABC), puis que ACE est isocèle en A.
4°) Démontrer que $\frac{BC}{BD} = \frac{BE}{BA}$.
5°) Justifier chacune des égalités suivantes :

(BD+DC)/BD = (BA+AE)/BA	Aire (ABD)/Aire (ACD) = BD/CD
	Aire (ACD) = Aire (ADE)
$\frac{DC}{BD} = \frac{AE}{BA}$	Aire (ABD)/Aire (ADE) = AB/AE = AB/AC
$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$	$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$
$\frac{BD}{BA} = \frac{DC}{AE}$	$\frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA}$
$\frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA}$	

On laisse au lecteur le soin de faire une réciproque et de démontrer une propriété similaire pour la bissectrice extérieure.



Deuxième propriété :

Tout point de la bissectrice intérieure d'un angle est équidistant des côtés de l'angle. On note M et N les projections orthogonales de D respectivement sur les droites (AB) et (AC).

De l'égalité $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$, on tire

Aire (ABD)/Aire (ACD) = (AB/AC) × (MD/ND) = (DB/DC) × (MD/ND).
Or, Aire (ABD) /Aire (ACD) = DB/DC ; de là
MD = ND, et D est équidistant des côtés de l'angle (BAC).

Christophe Niedzwiedz

III. LA MESURE DU CERCLE

Pour toute figure décomposable en partition par des triangles, la méthode des aires permet de construire (avec règle et compas) un carré de même aire, c'est-à-dire d'en faire géométriquement la quadrature. On a pu voir au chapitre I, p.9 le départ du processus, et celui-ci pourrait facilement être découpé en « activités » dont la finalité serait cependant difficilement explicable aux élèves.

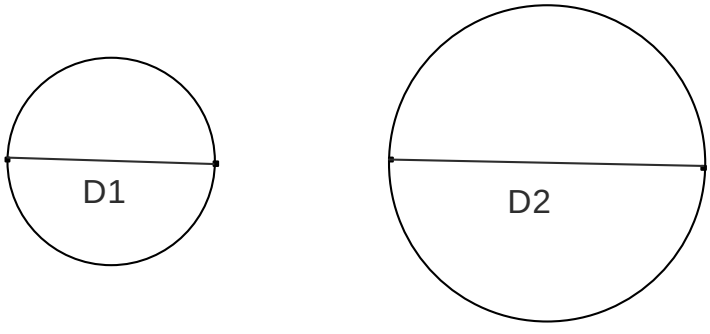
La méthode touche ses limites quand il s'agit d'évaluer ou de comparer des portions de plan comprises entre des lignes courbes. La question se pose d'abord pour la plus simple d'entre elles, le cercle : peut-on construire un carré dont l'aire soit égale à celle d'un disque donné ? C'est le problème de la quadrature du cercle ou de la mesure du cercle, dont on sait qu'il ne trouve son épilogue qu'algébriquement au XIXème siècle.
Il inspire ici trois thèmes d'activités. Elles sont exprimées succinctement dans le langage actuel, entre géométrie et algèbre et n'ont pas été exploitées en classe. Qu'elles soient sources d'inspiration.

LES LUNULES

Une lunule est un croissant de lune : une figure limitée par deux arcs de cercles de mêmes extrémités et qui ont leurs convexités tournées du même côté.
Hippocrate de Chio, mathématicien grec du cinquième siècle avant Jésus-Christ étudia la quadrature du cercle et la duplication du cube, il semble que l'étude des lunules lui laissait l'espoir de parvenir à la quadrature du cercle.
Nous allons étudier comment la méthode des aires permet de montrer l'égalité de certaines lunules à des polygones.

QUELQUES PROPRIÉTÉS UTILES

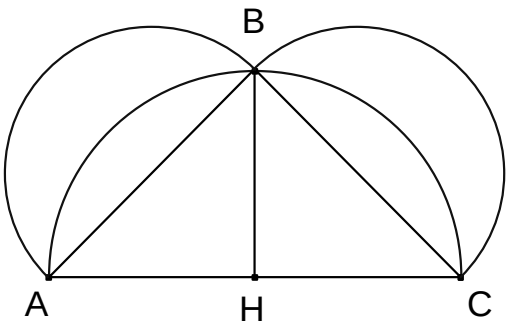
- Les figures semblables sont entre elles comme les carrés de leurs côtés correspondants, (voir pour les triangles, le chapitre II p. 35).
- Les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres. Ce résultat connu des anciens était démontré à l'aide d'un raisonnement d'exhaustion difficile. Nous pouvons l'approcher de manière très perceptive, en voyant chaque cercle comme un polygone régulier inscrit dont le nombre de côtés augmenterait indéfiniment.



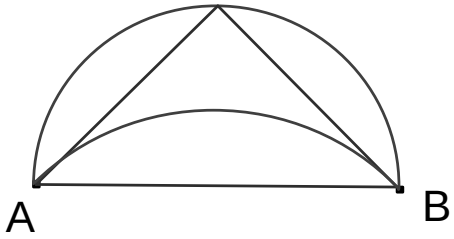
$$\frac{\text{Aire du cercle de diamètre D1}}{\text{Aire du cercle de diamètre D2}} = \frac{D1^2}{D2^2}$$

- Les secteurs ayant des angles égaux sont entre eux comme les carrés des diamètres des cercles.
- Les segments de cercles semblables (c'est-à-dire ceux dont les angles des secteurs correspondants sont égaux) sont entre eux comme les carrés des diamètres de leurs cercles.

PREMIER CAS

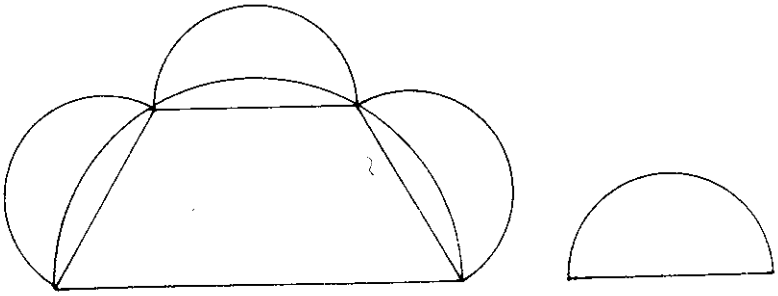


Le triangle ABC est isocèle rectangle en B. Il est inscrit dans un demi-cercle. On trace les demi-cercles extérieurs à ce dernier de diamètres [AB] et [AC], on obtient deux lunules égales sur ces segments.
Le théorème de Pythagore nous donne $AC^2 = 2\ AB^2$ et le demi-cercle de diamètre [AC] est donc égal à deux demi-cercles de diamètre [AB]
Par soustraction des parties communes on obtient l'égalité de l'aire du triangle AHB et de la petite lunule de diamètre [AB]. (Ou l'égalité du triangle ABC avec les deux lunules)



Toujours à partir de la figure du triangle rectangle isocèle inscrit dans un demi-cercle, on trace l'arc de 90° inscrit dans ce demi-cercle d'extrémités A et B. On obtient une lunule sous-tendue par [AB].
L'aire de la lunule est égale à l'aire du triangle.

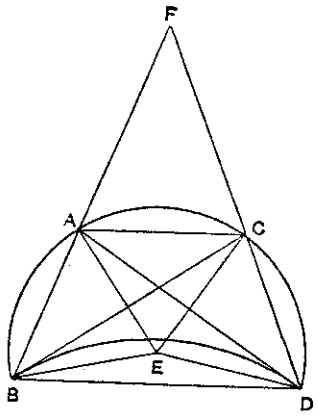
DEUXIÈME CAS



Le trapèze est un demi-hexagone régulier, la grande base est le double de la petite base. Le grand demi-disque est égal aux quatre petits demi-disques ; par soustraction des parties communes on obtient que l'aire du trapèze est égale à l'aire des trois lunules plus celle du demi cercle.

De là à penser que le demi-disque est égal à une figure obtenue comme différence du trapèze et de trois triangles rectangles !!!! Hélas, l'arc intérieur des lunules n'est pas égal à celui du premier cas étudié ci-dessus.

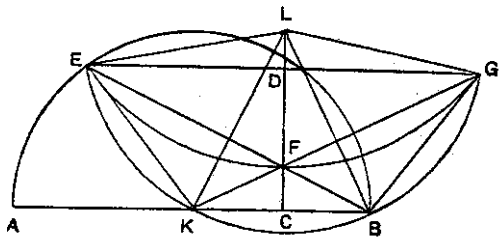
TROISIÈME CAS



Pour avancer dans l'étude voyons ce trapèze dont le carré de la grande base est trois fois celui de la petite et dont les côtés [AB], [AC] et [CD] sont égaux (le construire). La circonférence extérieure est plus grande qu'un demi cercle. L'arc construit sur la corde [BD] est semblable aux arcs construits sur les côtés égaux, par hypothèse ; une lunule apparaît sous-tendue par la corde [BD].
Dans un premier temps il est « facile » de vérifier qu'un tel trapèze admet un cercle circonscrit et ensuite d'expliquer que l'arc extérieur est effectivement plus grand qu'un demi cercle.

Premièrement expliquons le fait qu'un tel trapèze peut être inscrit dans un cercle. Les triangles ABC et ACD sont symétriques par rapport à la médiatrice du segment [AC], les médiatrices des segments [AB] et [CD] se coupent sur l'axe de symétrie, donc le point E de la figure est le centre du cercle circonscrit.
Ensuite voyons le fait que la circonférence extérieure est plus grande qu'un demi-cercle. Les côtés [AB] et [CD] du trapèze se rencontrent en F, il est clair que l'angle FAC est aigu et donc que l'angle BAC est obtus ce qui implique que $BD^2 > 2AB^2$ d'autre part comme $BC^2 = 3AB^2$ il s'ensuit que $BD^2 < BC^2 + CD^2$ et l'angle BCD est nécessairement aigu ; donc, l'arc extérieur est plus grand qu'un demi-cercle.
Par un raisonnement similaire à ceux menés dans les autres cas il s'ensuit que la lunule est égale au trapèze.

QUATRIÈME CAS



Voici un cas où la circonférence extérieure est inférieure à un demi-cercle.
EF^2 et KB^2 sont dans un rapport de trois sur deux.

Hélène Nemitz

SOURCES BIBLIOGRAPHIQUES:

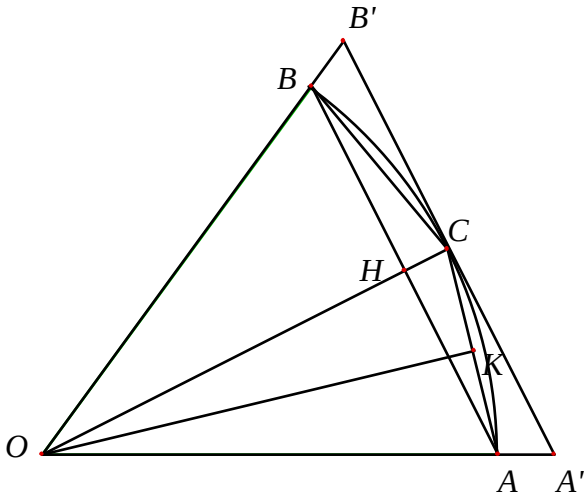
HEATH T., *A history of greek mathematics*, Dover, N.Y, 1981, vol. I, p. 183-200.
KNORR W.R., *The ancient tradition of geometric problems*, Dover, N.Y., 1986, p. 25-39.

LA MESURE DU CERCLE : SUITES ET APPROXIMATION

Archimède (IIIème siècle avant J.C) montre que le cercle est égal au triangle rectangle dans lequel l'un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et l'autre côté égal au périmètre du cercle. Il faut entendre « égalité » en terme d'égalité d'aires. Le raisonnement consiste à comprendre le cercle entre un polygone régulier inscrit et un polygone semblable, régulier circonscrit, dont on double les côtés : deux carrés, puis deux octogones, etc.
La perception directe et naïve fait voir qu'on réalise ainsi un encadrement de plus en plus serré du cercle et amène l'idée de la mesure du cercle comme limite commune (sans formalisme) des deux suites d'aires polygonales.
Archimède utilise un raisonnement d'exhaustion pour montrer que le cercle ne peut être ni plus petit ni plus grand que le triangle, donc lui est égal. Pour cela, comme pour la comparaison de deux cercles, le caractère archimédien des grandeurs concernées est capital.
Ici, on explicite cette construction en terme de suites. Les manuels de géométrie plane des années 1950-60, des classes de troisième ou seconde, techniques ou générales, exposent longuement ce genre de calculs dans les deux chapitres sur le périmètre et l'aire du cercle.

DIVISION D'UN ARC

Soient le cercle de centre *O* et de rayon R, *A* et *B* deux points du cercle, *C* le milieu de l'arc *AB*, *H* le milieu de la corde *AB*, K le milieu de la corde AC. La tangente au point *C* au cercle recoupe les demi-droites *OA*) et *OB*) respectivement aux points *A'* et *B'*.



On notera $a = OH$, $c = AB$, $b = OK$, $d = AC$. On obtient aisément les relations

$$a^2 + c^2/4 = R^2$$

$$b^2 + d^2/4 = R^2$$

$$d^2 = 2R(R - a)$$

On en déduit la relation

$$b^2 = \frac{1}{2}\mathrm{R}(\mathrm{R}+ a)$$

Notons *c'* = *A'B'*, les triangles *OAB* et *OA'B'* étant semblables, on a la relation :

$$c'/c = \mathrm{R}/a$$

AIRE DU CERCLE

On encadre le cercle par les 2^n-polygones réguliers inscrits et circonscrits ($n \geq 2$).
Si on note respectivement c_n et a_n le côté et l'apothème du 2^n-polygone régulier inscrit, on a la relation :

$$a_n^2 + c_n^2/4 = \mathrm{R}^2$$

et la relation de récurrence

$$a_{n+1}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{R}(\mathrm{R}+ a_n)$$

On rappelle que

$$a_2 = \mathrm{R}\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad c_2 = \mathrm{R}\sqrt{2}$$

Notons S_n l'aire du 2^n-polygone régulier inscrit, alors

$$S_n = 2^{n-1}a_n c_n = 2^n a_n\sqrt{\mathrm{R}^2 - a_n^2}$$

Itou

$$S_{n+1} = 2^{n+1}a_{n+1}\sqrt{\mathrm{R}^2 - a_{n+1}^2}$$

On en déduit la relation

$$S_{n+1}/S_n = \mathrm{R}/a_n$$

Puisque $a_n < \mathrm{R}$, la suite S_n est croissante.
Notons S'_n l'aire du 2^n-polygone régulier circonscrit, celui-ci est semblable au 2^n-polygone régulier inscrit, le rapport de similitude étant R/a_n, il s'ensuit la relation

$$S'_n/S_n = \mathrm{R}^2/a_n^2$$

ce qui implique l'inégalité

$$S_n < S'_n$$

On peut alors montrer la relation

$$\frac{S'_{n+1}}{S'_n} = \frac{2a_n}{\mathrm{R}+ a_n}$$

Puisque $2a_n < \mathrm{R} + a_n$, la suite S'_n est décroissante.

On peut donc écrire les inégalités

$$\ldots < S_n < S_{n+1} < \ldots < S'_{n+1} < S_n < \ldots$$

Si l'on admet, ce qui est intuitif, que toute suite croissante majorée a une limite et que toute suite décroissante minorée décroissante a une limite, alors les suites S_n et S'_n sont convergentes. Et puisque la suite S_{n+1}/S_n tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, alors les suites S_n et S'_n ont même limite S.
C'est cette limite S qui définit à l'aire du cercle.
On vérifie aisément que S/R^2 est indépendant de R. On note π le rapport de l'aire du cercle au carré du rayon.
Le calcul ci-dessus permet une approximation de π.
Pour le calcul d'approximation, on pose R = 1.
Il suffit alors de calculer la suite a_n et d'en déduire les suites S_n et S'_n.

LONGUEUR DE LA CIRCONFÉRENCE DU CERCLE

Nous noterons L_n le périmètre du 2^n-polygone régulier inscrit, L'_n le périmètre du 2^n-polygone régulier circonscrit. On a les relations

$$L_n = 2^n c_n \qquad L'_n = 2^n c'_n$$

ainsi que la relation

$$L'_n/L_n = R/a_n$$

Notons les relations

$$2S_n = a_n L_n$$

ce qui implique

$$L_n = 2^{n+1}\sqrt{R^2 - a_n^{\,2}}$$

et

$$L'_n = 2^{n+1}\frac{R\sqrt{R^2 - a_n^{\,2}}}{a_n}$$

On peut vérifier que les suites L_n et L'_n sont respectivement croissante et décroissante, et puisque le rapport L'_n/L_n tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, elles ont même limite L. C'est cette limite qui définit la longueur de la circonférence. On a la relation

$$2S = LR$$

ce qui implique que l'aire du cercle est équivalente à l'aire du triangle dont la hauteur est égale au rayon du cercle et la base est égale à la longueur de la circonférence du cercle.
On montre alors que $L/2R = \pi$.

CALCUL TRIGONOMÉTRIQUE

On suppose dans ce paragraphe que R = 1.
Notons θ_n l'angle au centre qui sous-tend le côté du 2^n-polygone régulier inscrit, alors :

$$\theta_n = \pi/2^{n-1}.$$

Et

$$a_n = \cos\frac{\theta_n}{2}$$

On en déduit les relations

$$S_n = 2^{n-1}\sin\theta_n \qquad S'_n = 2^n \tan\frac{\theta_n}{2}$$

et

$$L_n = 2^{n+1}\sin\frac{\theta_n}{2} \qquad L'_n = 2^{n+1}\tan\frac{\theta_n}{2}$$

Rudolf Bkouche

BIBLIOGRAPHIE

ARCHIMÈDE, « La mesure du cercle », in *Œuvres* (texte établi et traduit par Charles Mugler), Les Belles Lettres, Paris, 1970, tome1, p.135-143.

HADAMARD J., *Leçons de Géométrie élémentaire I : Géométrie plane*, Armand Colin, Paris, 1947, Livre III chapitre VII et Livre IV chapitre III.

LEBOSSÉ C. et HÉMERY C., *Géométrie plane*, classe de seconde des lycées et collèges, programme de 1947, Fernand Nathan, Paris 1947, 28ème et 30ème leçons.

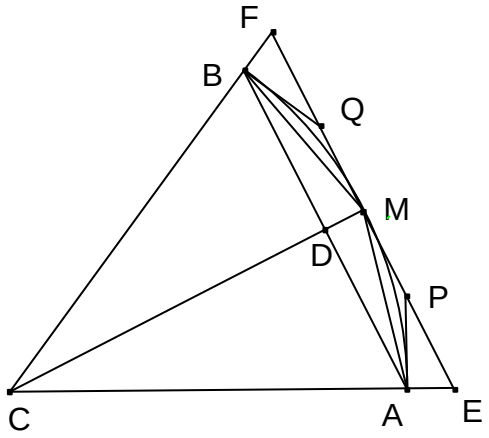
MARIJON A., *Géométrie du brevet élémentaire*, « Cours complémentaires- Ecoles Primaires Supérieures- Ecoles Normales », 4ème édition, Hatier, Paris 1933, chapitre IV et Livre IV.

MESURE DU CERCLE : GÉOMÉTRIE ET CALCULATRICE

Au livre IV de ses Eléments de géométrie, sur *Les polygones réguliers et la mesure du cercle*, Legendre pose et résout le problème : « *Trouver le rapport approché de la circonférence au diamètre* ». L'idée de base est celle d'Archimède, mais la mise en formules diffère de l'activité précédente, et l'idée d'approximation prend sens à partir de la géométrie.

INSTALLATION DE LA FIGURE

On peut montrer comment passer du carré à l'octogone par exemple.
On considère un cercle, un polygone régulier inscrit, d'aire notée ***A***, et le polygone régulier circonscrit semblable, d'aire notée ***B***. On travaille sur l'élément de figure tracée ci-dessous :



AB est le côté du polygone inscrit, EF est le côté du polygone circonscrit semblable, M est le point de contact de EF avec le cercle, on trace les tangentes au cercle issues de A et B qui coupent en P et en Q le segment EF.
AM = BM est le côté du polygone inscrit avec un nombre double de côtés, l'aire de celui-ci sera notée ***A'***.
PQ est le côté du polygone circonscrit avec un nombre double de côtés. On note l'aire de celui-ci ***B'***.

ÉVALUATION DE *A'* EN FONCTION DE *A* ET *B*

Par la méthode des aires on évalue les rapports de triangle :

(ACD) / (ACM) = ***A / A'*** et (MCA) / (MCE) = ***A' / B***,[1]

on en déduit :

$$A'^2 = A.B$$

ÉVALUATION DE *B'* EN FONCTION DE *A, B, A'*

On a aussi :

[1] Lire aire du triangle ACD pour (ACD), par mesure de simplification.

(CPM) / (CPE) = PM / PE,

On montre que les triangles CME et PAE sont semblables et on en déduit que :

(CPM) / (CPE) = ***A / A'*** puis (CPM) / (CME) = ***A / A+A'***

et enfin : 2 (CPM) / (CME) = ***B'/ B = 2A / A+A'***

CALCUL APPROCHÉ DE L'AIRE D'UN CERCLE DE RAYON UNITÉ

On part d'un carré inscrit dans un cercle de rayon 1, on construit le carré circonscrit, on double les côtés de l'un et de l'autre suivant le procédé précédent et ainsi de suite. A chaque étape, on calcule ***A*** et ***B***. On continue ainsi jusqu'à ce que le calcul ne donne plus de différence entre le polygone inscrit et le polygone circonscrit, c'est-à-dire si A et B ne diffèrent plus entre eux jusqu'à un certain ordre de décimales. Le cercle n'en différera pas non plus jusqu'au même ordre.

Jusqu'à quel nombre de côtés faut-il aller pour connaître l'aire du cercle avec deux décimales ?

Remarque : la note IV de l'édition citée (p.289) complète le propos car elle démontre l'irrationalité de π en utilisant des techniques de fractions continues.

Anne-Marie Marmier

SOURCE BIBLIOGRAPHIQUE

LEGENDRE A. M., *Éléments de géométrie*, 14ème édition, Firmin Didot, Paris, 1839. p. 125.

IV. REGARD SUR LES MATHÉMATIQUES CHINOISES

INTRODUCTION



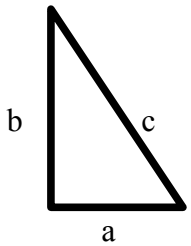
Nous présenterons dans cette partie quelques problèmes extraits du livre "Les neuf chapitres sur l'art du calcul".
Le livre **Jiuzhang suanshu** ou *les Neuf chapitres sur l'art mathématique* [1]*ou Les neuf chapitres sur l'art du calcul* [2] est l'un des dix classiques chinois. Il est le fruit d'une compilation et on n'en connaît pas les auteurs. Il date de l'époque des Han (206 av. J.-C. - 220 ap. J.-C.), au cours de laquelle un premier système bureaucratique fut établi en Chine à la suite de l'instauration du premier empire.

Ce livre est considéré par les historiens comme un ouvrage de référence. En effet, son niveau est bien plus élevé que celui de nombreux ouvrages postérieurs et il a eu une grande influence car il est à l'origine non seulement de la tradition mathématique chinoise mais aussi de celles de la Corée, du Japon, et du Vietnam.
Les *Neuf Chapitres* contiennent 246 problèmes répartis en 9 chapitres. Nous nous intéresserons plus particulièrement au chapitre 9 intitulé "Base-hauteur"et qui traite entre autres de "la procédure de la base et de la hauteur" (que l'on nomme chez nous le théorème de Pythagore).
Chaque problème est énoncé, puis la solution est donnée, et enfin le texte donne la procédure pour obtenir le résultat. Le livre "les neuf chapitres" possède de nombreux commentaires mais nous citerons plus particulièrement à ceux du mathématicien réputé Liu Hui [3](vers 263).

Nous reproduisons en annexe 1 la première page du chapitre 9 extrait du livre traduit par K. Chemla et G. Shuchun référence [1] de la bibliographie.

Vous y noterez l'**absence complète de figures géométriques, de tout symbolisme ou de calculs algébriques.**

Par commodité cependant, dans la suite de notre texte, nous emploierons à la fois des figures géométriques (qui sont décrites dans le texte chinois parfois même avec mention de couleurs telles que jaune, rouge vermillon, bleu-vert) et nous présenterons les calculs ou les formules sous forme littérale.



En particulier, dans un triangle rectangle, comme ci-contre nous noterons a le petit côté (nommé base dans le texte chinois), b la hauteur et c, l'hypoténuse.

Enfin une courte bibliographie complète ce document[4].

1 traduction de K. Chemla voir bibliographie en annexe
2 traduction de Martzloff voir bibliographie
3 Liu Hui , mathématicien vivant au III ème siècle , en 263, il publia un livre avec des solutions aux problèmes présentés dans le célèbre livre chinois de mathématiques connu sous le nom Jiuzhang Suanshu ou Les neuf chapitres sur l'art mathématique.
4 Dans la suite du texte, je noterai mes commentaires en italiques.

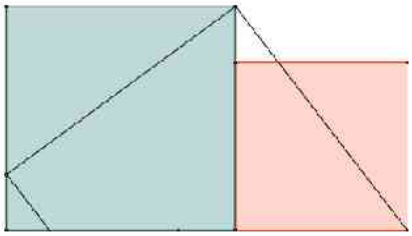
LA PREMIÈRE FIGURE FONDAMENTALE
La procédure, nommée "de la base et de la hauteur" est explicitée dans le **problème 9-3** [5]:

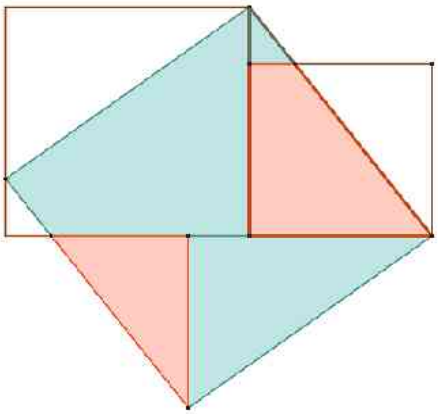
Énoncé : Supposons que la hauteur est 4 chi[6] et l'hypoténuse de 5 chi. On demande combien fait la base.

Réponse : 3 chi
Procédure de la base et de la hauteur : Base et hauteur étant chacune multipliée par elle-même, on somme (les résultats) et on divise ceci par extraction de la racine carrée, ce qui donne l'hypoténuse[7].

extrait du commentaire de Liu Hui :

...La base étant multipliée par elle-même fait un carré vermillon, la hauteur multipliée par elle-même un carré bleu-vert, et l'on fait en sorte que ce qui sort et ce qui entre se compense l'un, l'autre,que chacun se conforme à sa catégorie ; alors, sur la base du fait que l'on garde ceux [les morceaux] qui restent sans bouger, on engendre par réunion l'aire du carré de côté l'hypoténuse. En divisant ceci par l'extraction de la racine carrée, cela donne l'hypoténuse....

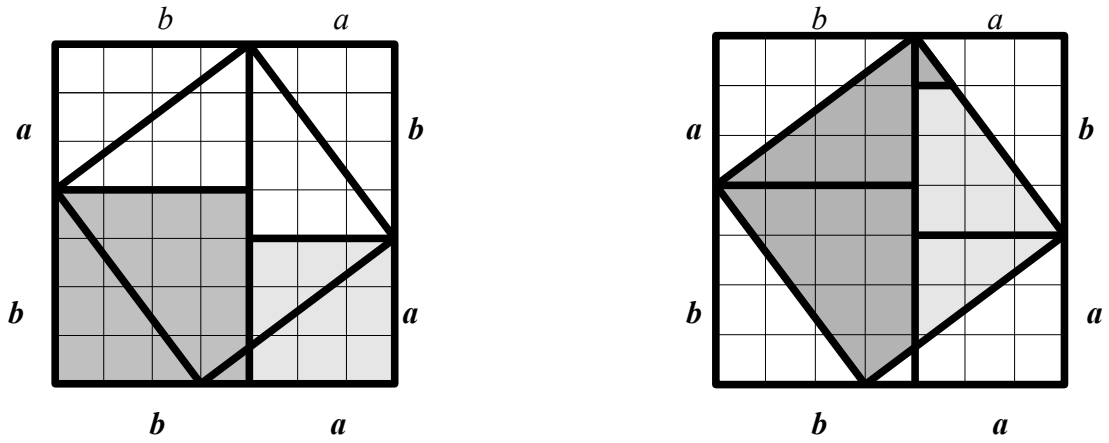




On peut retrouver ici la démonstration du théorème de Pythagore "dite par dissection". (voir annexe 2)

5 p 705 [1]
6 chi : est une unité de longueur qui vaut environ 23-24 cm
7 *On a donc la relation* $c=\sqrt{a^2+b^2}$

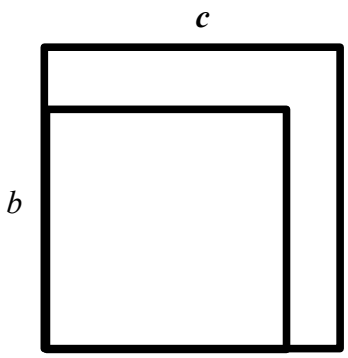
UNE AUTRE REPRÉSENTATION[8] DE CETTE FIGURE FONDAMENTALE :



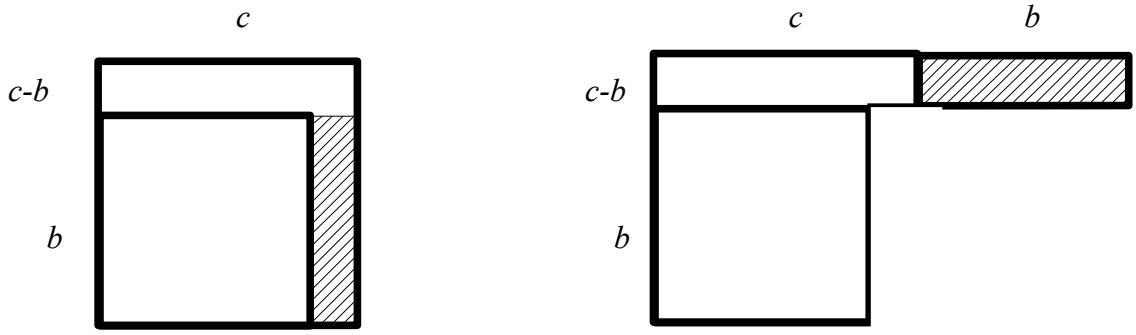
On peut y reconnaître :

$(a+b)^2=a^2+b^2+2\text{ab}$ ***ou*** $(a+b)^2=c^2+4\cdot\frac{1}{2}ab$

LA DEUXIÈME FIGURE FONDAMENTALE (AVEC UN GNOMON) :



on peut noter $a^2=c^2-b^2$



On trouve ici que : $c^2=b^2+(b+c)(c-b)$

Ainsi $a^2=(c+b)(c-b)$

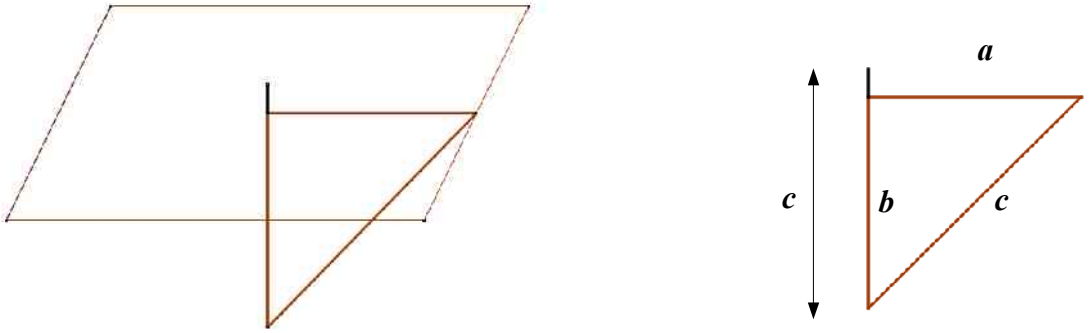
8 p 680 et 879 [1]

UNE PREMIÈRE VARIANTE DE LA MÉTHODE AVEC LE GNOMON POUR TRAITER LE PROBLÈME 9-6 :

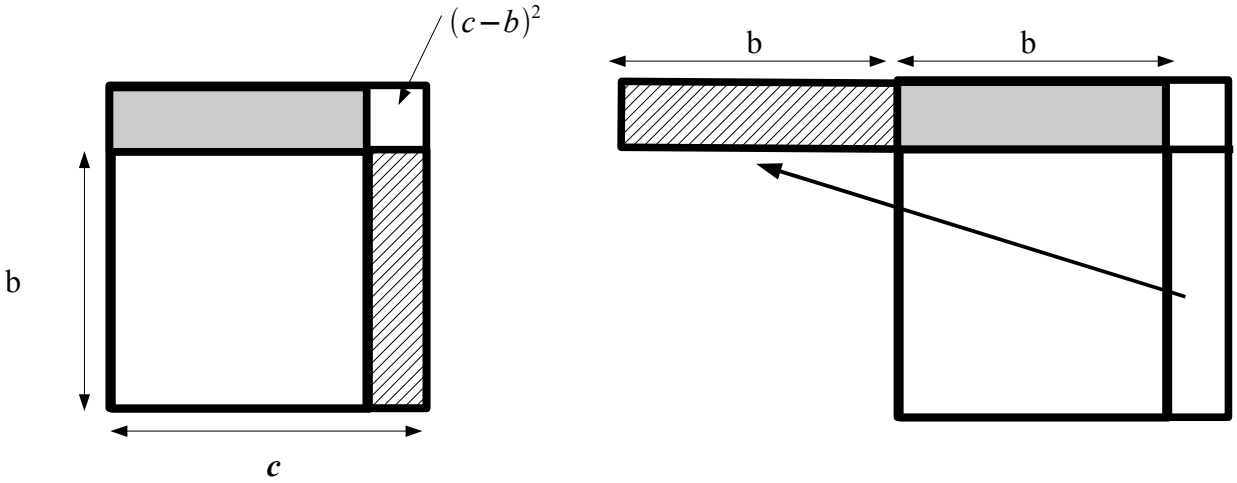
Énoncé : Supposons que l'on ait un étang carré de 1 zhang[9] de côté, au centre duquel pousse un roseau qui dépasse de 1 chi [le niveau] de l'eau. Quand on tire sur le roseau vers la rive, il arrive juste au bord. On demande combien valent respectivement la profondeur de l'eau et la longueur du roseau.

Réponse : la profondeur de l'eau vaut 1 zhang 2 chi
et la longueur du roseau vaut 1 zhang 3 chi.

Un représentation possible du lac...



Dans ce problème, on peut noter *a* est la distance du bord au centre de l'étang, *b* est la profondeur, *c* est la longueur du roseau . Le texte nous donne la valeur de *a* et de *c-b* (c'est-à-dire de ce dont le roseau dépasse de la surface de l'étang).



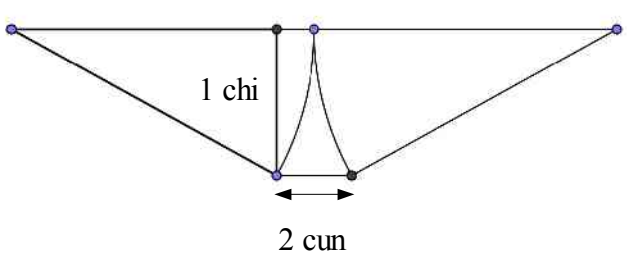
Le gnomon (partie hachurée et grisée) vaut $a^2-(c-b)^2$, c'est-à-dire $2b\cdot(c-b)$.

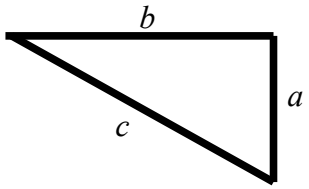
On connaît a et c - b, on calcule $a^2-(c-b)^2$ ***, on divise le résultat par*** $2\cdot(c-b)$ ***, on trouve b (la profondeur de l'eau) et la longueur du roseau est de b + 1.***

9 1 zhang = 10 chi et 1 chi = 10 cun

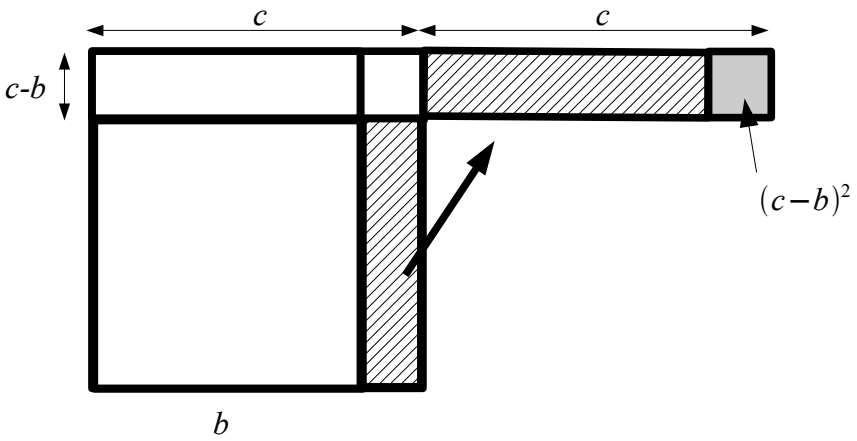
UNE AUTRE VARIANTE DE LA MÉTHODE AVEC LE GNOMON POUR TRAITER LE PROBLÈME 9-10 :

Énoncé : Supposant qu'en ouvrant les battants d'une porte jusqu'à une distance de 1 chi du seuil de la porte, on laisse une ouverture de 2 cun. On demande combien vaut la largeur de la porte.
Réponse : 1 zhang 1 cun.





Ici, on connaît a et c-b, plus exactement : a = 1chi = 10 cun et c - b = 1 cun. On demande $2c$, la largeur de la porte.



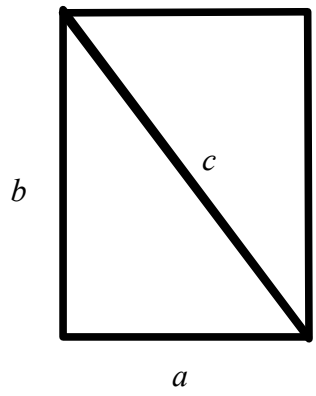
On trouve par observation de la figure : $a^2+(c-b)^2=2c\cdot(c-b)$ soit : $\frac{a^2}{c-b}+c-b=2c$

PLUSIEURS MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LE PROBLÈME 9-11 :

Énoncé : Supposons qu'on ait une porte à un battant dont la hauteur dépasse la largeur de 6 chi 8 cun et dont deux coins [opposés] sont à une distance d' exactement 1 zhang l'un de l'autre. On demande combien valent respectivement la hauteur et la largeur de la porte.
Réponse : la largeur vaut 2 chi 8 cun, la hauteur 9 chi 6 cun.

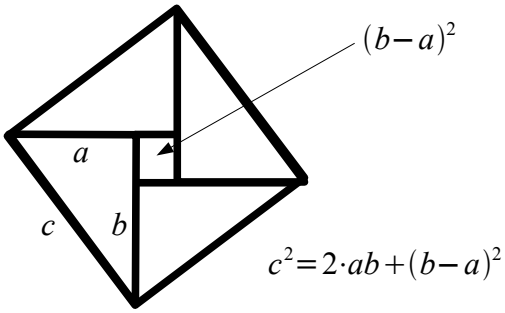
Liu Hui (commentateur du livre "les 9 chapitres") va proposer deux solutions géométriques. Nous présenterons ensuite la solution de Yang Hui [10]

10 Yang Hui mathématicien chinois, (1238-1298)

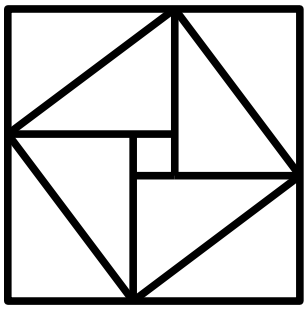


Ici on connaît c et b-a , on demande a et b.

Une solution de Liu Hui à partir de la figure fondamentale :

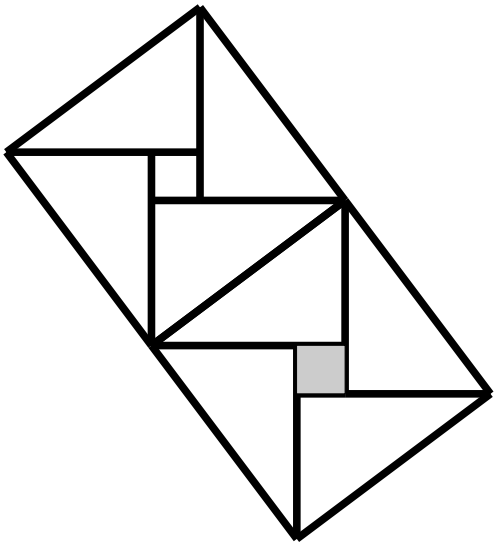


et

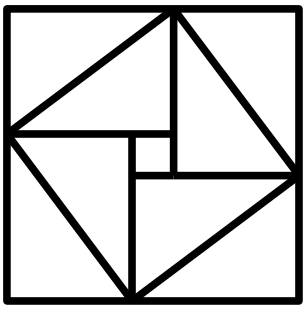


ce qui donne $(a+b)^2=8\cdot(\frac{1}{2}ab)+(b-a)^2$

Ici on double c^2 auquel on retranche $(b-a)^2$



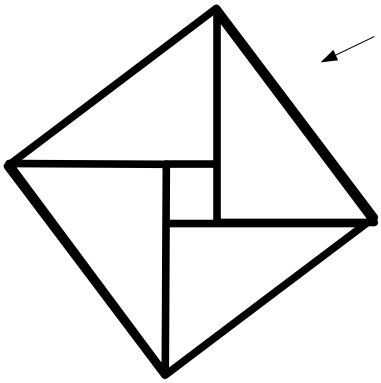
=



Ainsi $2c^2-(b-a)^2=(a+b)^2$

La procédure décrite au problème 9-11 indique alors de prendre la racine carrée de $(a+b)^2$ puis de calculer $a=\frac{1}{2}((a+b)-(b-a))$ et $a+(b-a)=b$

Une autre solution de Liu Hui :

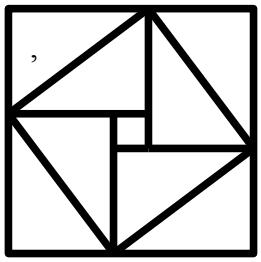


Cette figure est constituée de 4 triangles rectangles et, au centre de la figure, d'un carré de côté $b-a$ que l'on nomme le dividende.

on retranche $\frac{1}{2}$ carré (c'est-à-dire $\frac{2}{4}(b-a)^2$) au dividende ;

on prend la moitié du reste.

Il reste 2 triangles rectangles et un petit carré de côté $\frac{1}{4}(b-a)^2$ ce qui correspond au quart du grand carré qui vaut $(a+b)^2$.

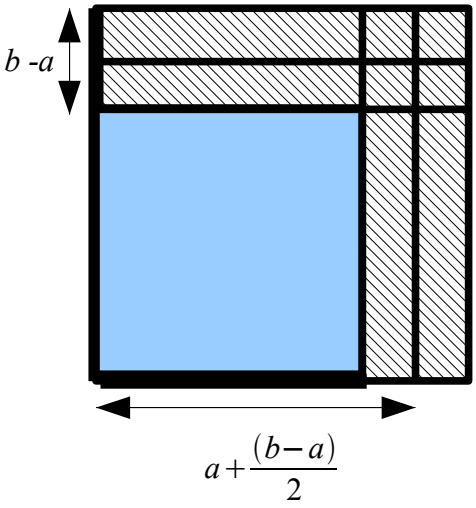


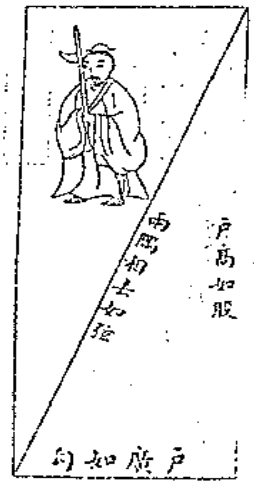
or $\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}} = \frac{a+b}{2}$ ainsi : $\sqrt{c^2-2\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{a+b}{2}$

On a bien obtenu *a* +*b* à partir des données c'est-à-dire *c* et *b-a*

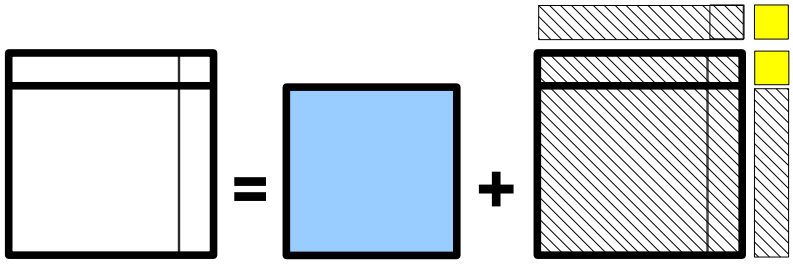
puis on fait $\frac{a+b}{2}$ - $\frac{b-a}{2}$ $= a$ et ensuite $\frac{a+b}{2}$ + $\frac{b-a}{2}$ $= b$ pour répondre au problème posé.

Une solution de Yang Hui (XIII siècle) :





2 fois



Ainsi : $2(a+\frac{(b-a)}{2})^2 = a^2+b^2-2(\frac{(b-a)}{2})^2 = c^2-2(\frac{(b-a)}{2})^2$

ou $2(b-\frac{(b-a)}{2})^2 = c^2-2(\frac{(b-a)}{2})^2$

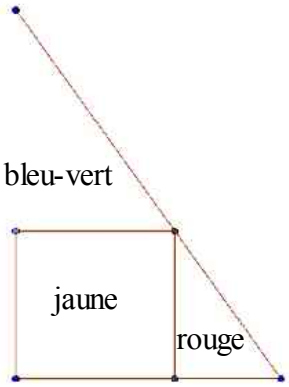
D'AUTRES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE DES PROBLÈMES DU CHAPITRE 9

problème 9-14 :
Enoncé : Supposons que la base vaille 5 bu[11] et la hauteur 12 bu. On demande combien vaut le côté du carré inscrit à l'intérieur de la base.

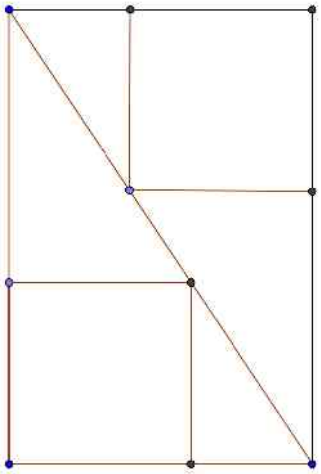
Réponse : le côté du carré vaut 3 bu et 9/17 de bu.

Procédure : On somme la base et la hauteur ce qui fait le diviseur. Base et hauteur sont multipliées l'un par l'autre ce qui fait le dividende. Et en effectuant la division du dividende par le diviseur, on obtient le côté du carré en bu.

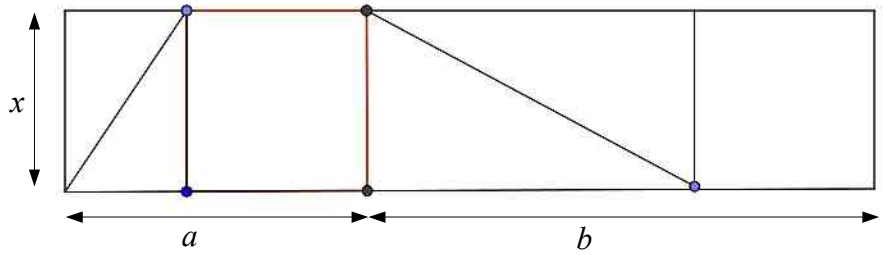
Le commentaire de Liu Hui suggère une figure (en couleur!) et des manipulations sur les surfaces que l'on peut imaginer comme ci-dessous :



on double cette figure et on obtient le rectangle ci-contre ...



que l'on transforme en un rectangle de largeur le côté du carré.



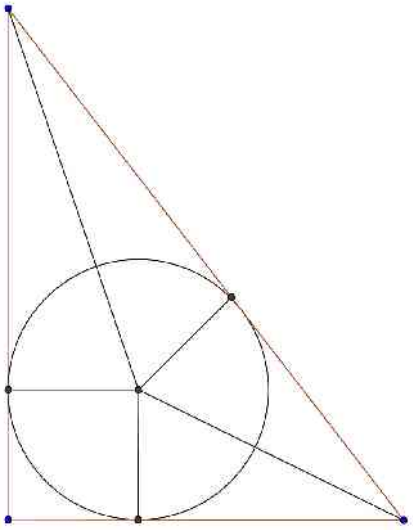
On a bien $x(a+b)=ab$ d'où la valeur de x en divisant ab par $a + b$.

problème 9-15 :
Enoncé : Supposons que la base vaille 8 bu et la hauteur 15 bu. On demande combien vaut le diamètre du cercle inscrit à l'intérieur de la base.
Réponse : 6 bu.
Procédure : les 8 bu font la base , les 15 bu la hauteur et l'on cherche l'hypoténuse qui leur

11 Sous les Han, 1 bu = 6 chi

correspond. La somme des trois positions fait le diviseur. On multiplie la base par la hauteur et on double ceci, ce qui fait le dividende. En effectuant la division du dividende par le diviseur, on obtient le diamètre en bu.

Comme dans le problème précédent, Lui Hui propose une figure à transformer pour expliquer ou justifier la procédure proposée et donc le résultat obtenu.



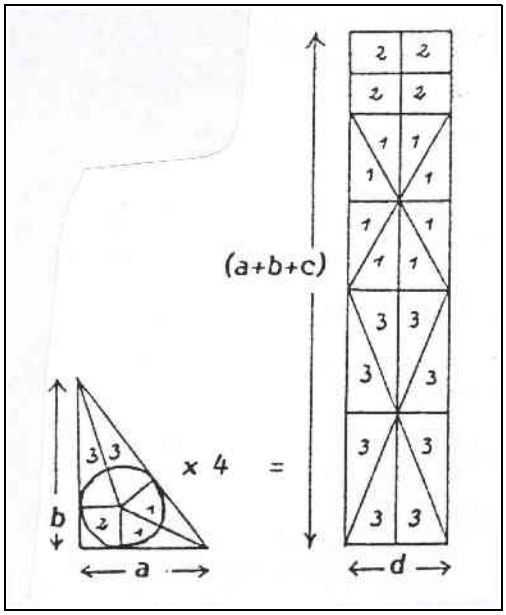
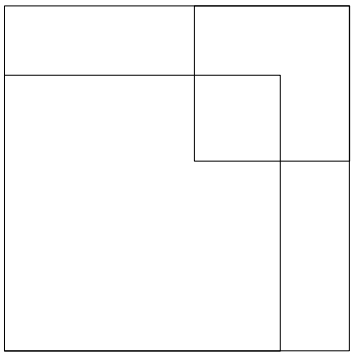


fig 1 [12] : 1 est en rouge, 2 en jaune et 3 en azur

et pour finir cette partie ...
à vous de chercher la solution du problème 9-24 :
énoncé : Supposons qu'on ait une porte dont on ne connaît ni la hauteur, ni la largeur et une perche dont on ne connaît pas la longueur. Transversalement, il s'en faut de 4 chi pour que la perche ne puisse sortir (par la porte), longitudinalement, il s'en faut de 2 chi et en oblique, elle sort juste. On demande combien valent respectivement la hauteur, la largeur et l'oblique de la porte.
réponse : la largeur vaut 6 chi; la hauteur vaut 8 chi et l'oblique 1 zhang

pour vous aider..
...voici la figure suggérée par Lui Hui



12 fig1 extraite de [3] p287

CALCULS D'AIRES DANS LA CHINE ANCIENNE

Dans cette partie nous présenterons quelques exemples de problèmes et de procédures extraits du chapitre 1 "Champs rectangulaires" .

1. Les formes rectilinéaires et le principe "ce qui entre et ce qui sort se compensent"

- **aire d'un triangle**:

(voici le texte du problème 1.26, sa solution, la procédure suggérée et le commentaire de Liu Hui)

(1.26)

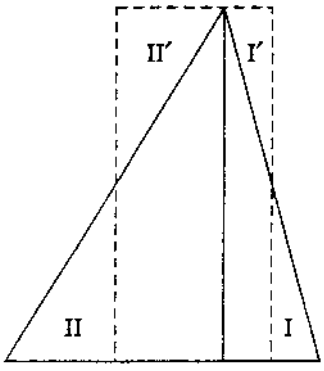
SUPPOSONS À NOUVEAU QU'ON AIT UN CHAMP TRIANGULAIRE DE 5 *BU* 1/2 *BU* DE LARGEUR ET DE 8 *BU* 2/3 DE *BU* DE HAUTEUR (LONGUEUR)[88]. ON DEMANDE COMBIEN FAIT LE CHAMP.

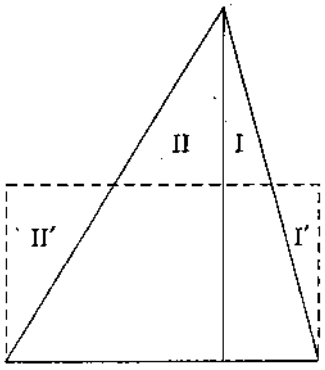
RÉPONSE : 23 *BU* 5/6 DE *BU*.

PROCÉDURE : ON PREND LA MOITIÉ DE LA LARGEUR ET ON EN MULTIPLIE LA HAUTEUR.

Si « l'on prend la moitié de la largeur », c'est qu'avec ce qui est en excédent, on comble ce qui est vide, pour faire un champ rectangulaire[89]. On peut aussi prendre la moitié de la hauteur et en multiplier la largeur. Commentaire : si la moitié de la largeur multiplie la hauteur, c'est pour prendre la valeur (*shu*) moyenne[90] et, par conséquent, « la largeur et la longueur étant multipliées l'une par l'autre », cela fait « les *bu* du produit (*ji*) ». Le diviseur des *mu* divise ceci, ce qui donne le résultat.

Le commentaire permet de réaliser les deux figures suivantes qui donnent à voir la formule connue de l'aire d'un triangle. $S=\frac{1}{2}a\,h$





- **aire d'un trapèze**,
  un trapèze est un "champ trapézoïdal", que l'on peut décomposer en deux "champs obliques"(c'est-à-dire des trapèzes rectangles).

(1.30)

SUPPOSONS À NOUVEAU QU'ON AIT UN CHAMP TRAPÉZOÏDAL DONT LA LANGUE VAUT 117 *BU* DE LARGEUR, LE TALON 50 *BU* DE LARGEUR, ET LA HAUTEUR (LONGUEUR DROITE) 135 *BU*. ON DEMANDE COMBIEN FAIT LE CHAMP.

RÉPONSE : 46 *MU* 232 *BU* ET DEMI.

PROCÉDURE : ON SOMME TALON ET LANGUE, ON PREND LA MOITIÉ DE CECI ET ON EN MULTIPLIE LA LONGUEUR DROITE. ON DIVISE PAR LE DIVISEUR DES *MU*.

Si l'on coupe en son milieu le champ trapézoïdal, alors cela fait deux champs obliques, c'est pourquoi leurs procédures sont semblables l'une à l'autre. Autrement, on peut sommer talon et langue, prendre la moitié de la longueur droite et en multiplier ceci.

et pour obtenir l'aire d''un champ oblique...

(1.28)

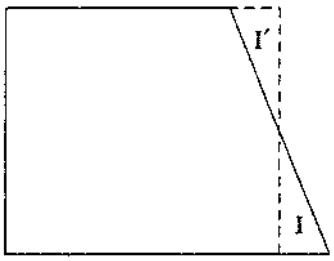
SUPPOSONS À NOUVEAU QU'ON AIT UN CHAMP OBLIQUE DE 65 *BU* DE HAUTEUR (LARGEUR DROITE), DE 100 *BU* DE LONGUEUR D'UN CÔTÉ, ET DE 72 *BU* DE LONGUEUR DE L'AUTRE CÔTÉ. ON DEMANDE COMBIEN FAIT LE CHAMP.

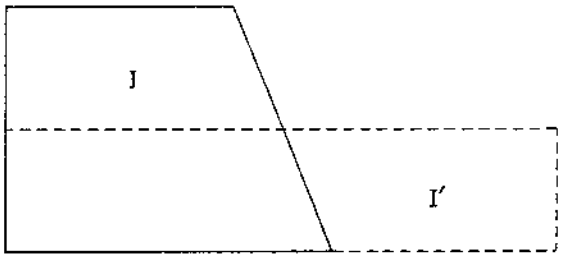
RÉPONSE : 23 *MU* 70 *BU*.

PROCÉDURE : ON SOMME LES DEUX INÉGAUX/OBLIQUES[92], ON PREND LA MOITIÉ DE CECI, ET ON EN MULTIPLIE LA LONGUEUR OU LA LARGEUR DROITE. AUTREMENT, ON PEUT PRENDRE LA MOITIÉ DE LA LONGUEUR OU DE LA LARGEUR DROITE, ET EN MULTIPLIER LA SOMME. ON DIVISE PAR LE DIVISEUR DES *MU*.

Si « l'on somme » et que « l'on prend la moitié de ceci », c'est qu'avec ce qui est en excédent, on comble ce qui est vide[93].

Voici deux figures qui pourraient illustrer le commentaire précédent de Liu Hui.





On retrouve l'expression de l'aire d'un trapèze, que l'on note de nos jours,

par $S=\frac{1}{2}h(a_1+a_2)$

2. Les formes curvilignes

Les *Neuf chapitres* mentionnent trois types de figures planes à côtés curvilignes : le champ circulaire, le champ en forme de segment circulaire et le champ en forme d'anneau.
Les Neuf chapitres fournissent quatre formules pour l'aire d'un cercle :

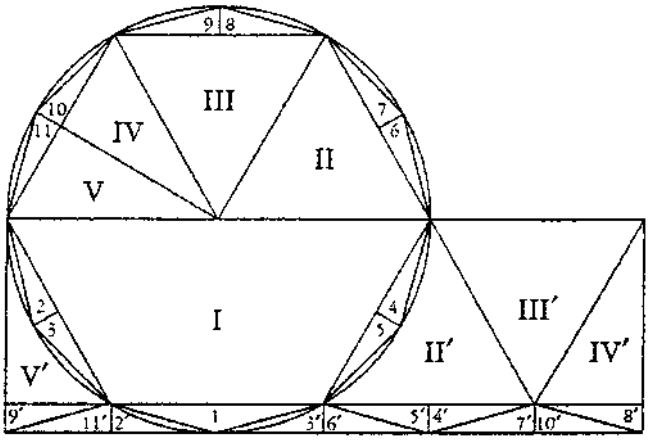
$$S=\frac{1}{2}l\,r \quad (1) \qquad S=\frac{1}{4}l\,d \quad (2) \qquad S=\frac{3}{4}d^2 \quad (3) \qquad S=\frac{1}{12}l^2 \quad (4)$$

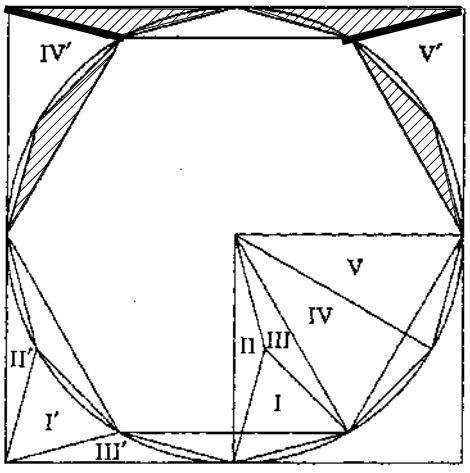
où l désigne la longueur de la circonférence du cercle, r son rayon, d son diamètre.

Les expressions (1) et (2) sont exactes mais les valeurs données dans les textes des problèmes de la circonférence et du diamètre sont dans un rapport de 3 à 1, alors la valeur numérique de l'aire n'est qu' approchée.

Avant Liu Hui, on considérait le périmètre de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle comme tenant lieu de la circonférence du cercle et l'aire du dodécagone régulier inscrit dans dans le cercle comme l'aire du cercle.
La figure suivante montre la transformation de l'aire du dodécagone en un rectangle.

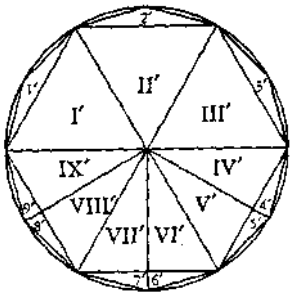
On obtient ainsi un rectangle de largeur le rayon du cercle et pour longueur le demi-périmètre de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle.

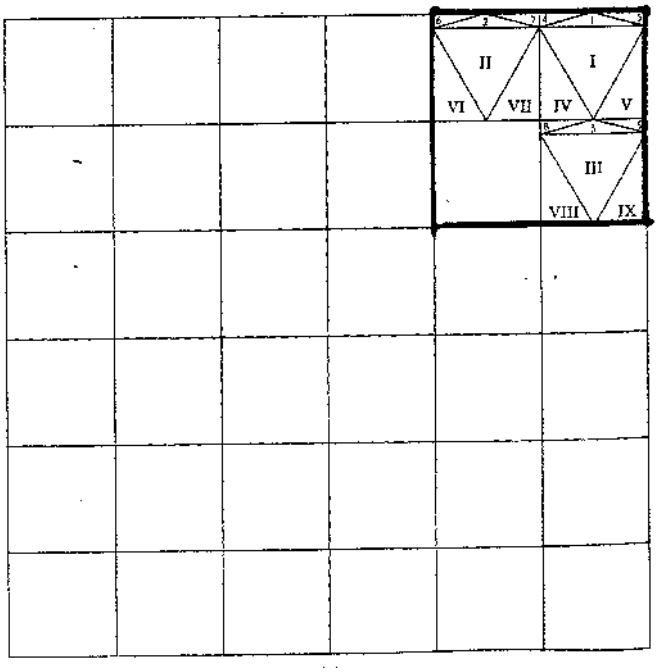




Un autre conséquence du fait de considérer l'aire du dodécagone inscrit comme l'aire du cercle permet d'aboutir à la formule (3) $S=\frac{3}{4}d^2$ en considérant la figure ci-contre.

Les figures ci-dessous permettent d'expliquer la formule (4) $S=\frac{1}{12}l^2$





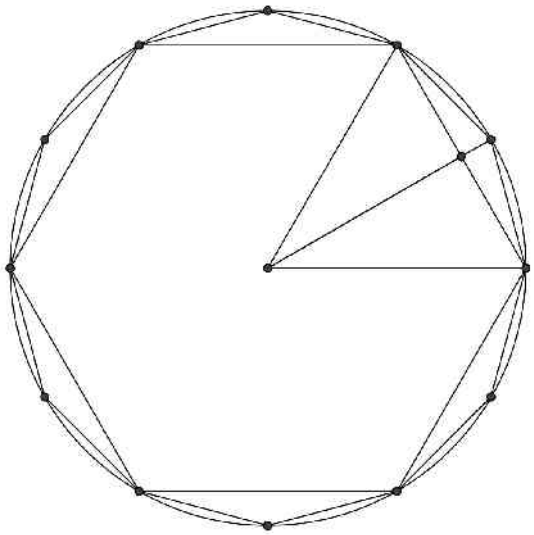
Ces formules sont ainsi données à partir du principe "ce qui entre et ce qui sort se compensent" et l'idée que l'aire du dodécagone régulier inscrit au cercle fournit l'aire du cercle ou que la circonférence et le diamètre d'un cercle sont dans un rapport de 3 à 1 (ce qui correspond à une approximation de π égale à 3).

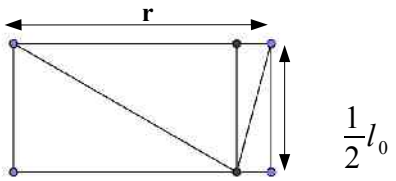
3. La démonstration par Liu Hui de la formule donnant l'aire du cercle

Le principe :

Liu Hui coupe tout d'abord le cercle, à partir d'un hexagone et obtient un dodécagone régulier dont l'aire vaut $S_1=3l_0r$, l_0 désigne la longueur du côté de l'hexagone et r est le rayon du cercle.

En effet :





Ainsi l'aire du dodécagone $S_1 = 6\frac{l_0}{2}r = 3\,l_0 r$

de même, en notant S_2 l'aire du polygone à 24 côtés, on a $S_2 = 12\frac{l_1}{2}r = 6\,l_1 r$ avec l_1 la longueur du côté du dodécagone régulier inscrit dans le cercle.

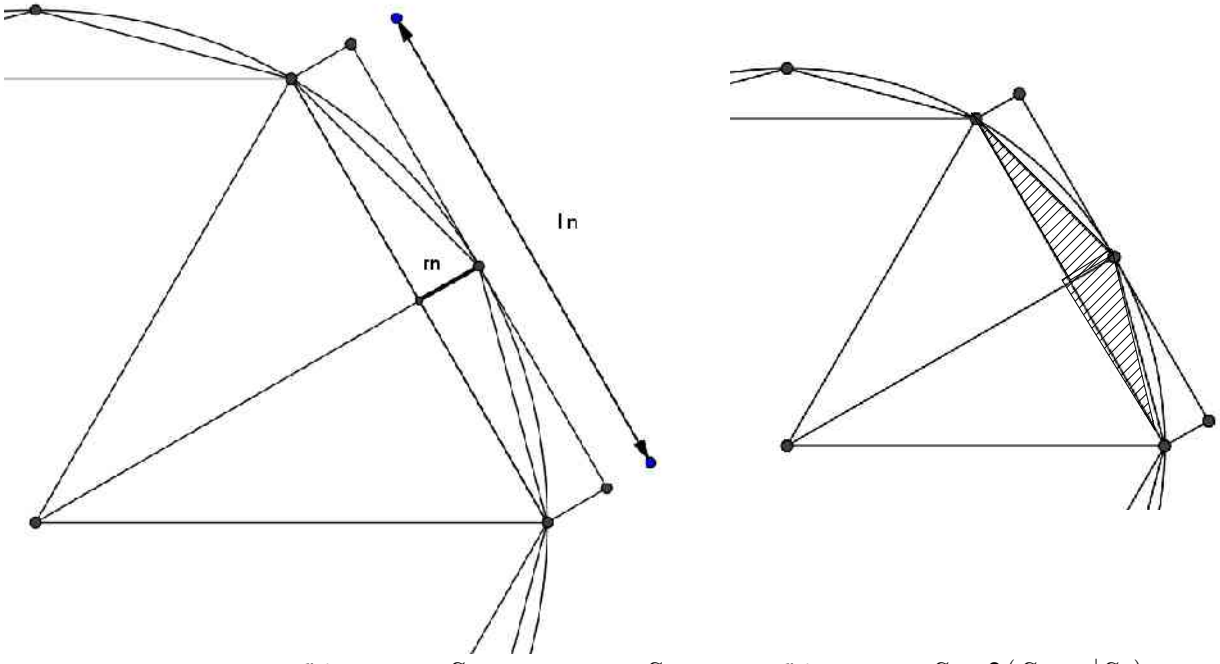
Notons S_n l'aire du 6.2^n - gone régulier inscrit dans le cercle. On a $S_n = 6.2^{n-2} l_{n-1} r$

Liu Hui écrit : "Plus on coupe fin, plus ce qui est perdu est petit. On coupe -les polygones- et on les recoupe jusqu'à atteindre ce que l'on ne peut pas couper"

Ainsi : plus on coupe fin, plus la différence $S - S_n$ entre l'aire du cercle S et l'aire du polygone régulier inscrit est petite. De plus, on coupe et on recoupe jusqu'au point où l'on ne peut plus couper .Le polygone régulier inscrit dans le cercle, ainsi obtenu, a un périmètre égal à la circonférence du cercle et son aire n'est plus inférieure à l'aire du cercle.

Nous avons ainsi comme un processus de passage à l'infini et on obtient simultanément :
$\lim 6.2^n l_n = l$ et $\lim S_n = S$

Dans un second temps, Liu Hui précise qu'entre chaque côté l_n du polygone régulier inscrit dans le cercle et la circonférence du cercle il y a un "diamètre de reste" r_n .
(l_n est la longueur du polygone à 6.2^n côtés).



Ainsi, si l'on ajoute $6.2^n l_n r_n$ à S_n , obtient $S_n + 6.2^n l_n r_n = S_n + 2(S_{n+1} - S_n) > S$

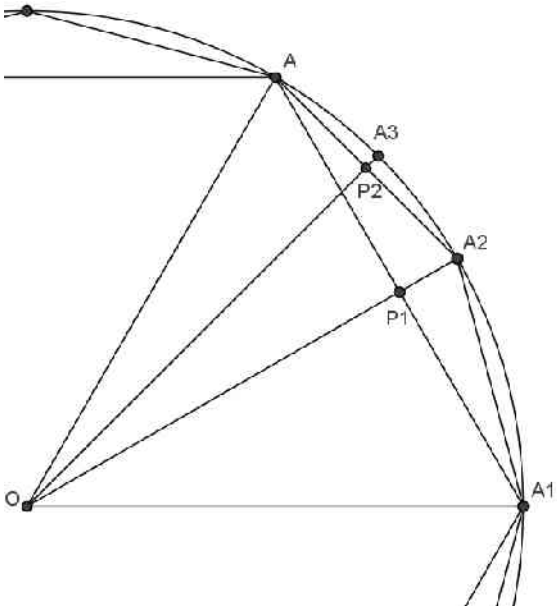
Sur la figure précédente la partie hachurée correspond à l'aire de $S_{n+1} - S_n$.

Enfin, l'aire du cercle S est la limite de la suite (S_n) et de la suite ($S_n+2(S_{n+1}-S_n)$)
avec S_n < S < $S_n+2(S_{n+1}-S_n)$

Puis Liu Hui considère le polygone régulier qui ne fait qu'un avec le cercle.
Soit L la longueur d'un de ses côtés. Liu Hui découpe ce polygone en triangles isocèles (en nombre infini) de base L et de sommet le centre du cercle .
La somme des aires A de ces triangles vaut l'aire du cercle. Or L.r = 2A d'où l'expression

$A=\frac{1}{2}L.r$ ou $S=\frac{1}{2}l.r$

4. Évaluation de la circonférence du cercle par Liu Hui :



C'est dans son commentaire au problème 32 que Liu Hui donne une méthode rigoureuse pour calculer une valeur approchée de la circonférence du cercle.

Il considère un cercle de diamètre 2 chi.
La longueur, AA_1 sur la figure ci-contre, du côté de l'hexagone régulier qui est inscrit dans le cercle vaut 1 chi.

- Il calcule successivement OP_1 (en considérant le triangle OA_1P_1 rectangle en P_1),
- puis A_2P_1 (ce que l'on nomme le diamètre de reste)
- ce qui permet d'obtenir le côté du dodécagone AA_2 (en considérant le triangle AA_2P_1 rectangle en P_1). puis la distance AP_2
- il recommence en calculant la distance du côté du dodécagone au centre soit OP_2

Il peut poursuivre ainsi jusqu'à calculer pour des polygones réguliers inscrits à 24, 48, 96 et 192 côtés la longueur du côté AA_n , la distance du côté au centre du cercle OP_n et le diamètre de reste $A_{n+1}P_n$

Le tableau ci-dessous (extrait du livre "Les neuf chapitres ou l'art du calcul", traduit et commenté par K. Chemla et S. Guo) rassemble les valeurs obtenues par Liu Hui :

n-gone régulier	longueur du côté (*cun*)	distance du centre au côté	diamètre de reste	aire (cun^2)
6	1 000 000	$8\,660\,025\frac{2}{5}$	$133\,974\frac{2}{5}$	
12	$\sqrt{267\,949\,193\,445}$	$965\,925\frac{4}{5}$	$34\,074\frac{1}{5}$	
24	$\sqrt{68\,148\,349\,466}$	$991\,444\frac{4}{5}$	$8\,555\frac{1}{5}$	
48	130 806	$997\,858\frac{9}{10}$	$2\,141\frac{1}{10}$	
96	65 438			$313\frac{584}{625}$
192				$314\frac{64}{625}$

Liu Hui calcule ensuite la différence d'aires $S_6-S_5 = 314\frac{64}{625}-313\frac{584}{625} = \frac{105}{625}$ cun^2 ,

or 2(S_6-S_5) donne l'aire des produits du côté du 96-gone par le diamètre de reste,

c'est pourquoi $S_5+2(S_6-S_5)>S$ Or $S_5+2(S_6-S_5)=314\frac{169}{625}$.

Liu Hui prend la partie entière 314 cun^2 de S_6 et de $S_5+2(S_6-S_5)$ comme valeur approchée de l'aire du cercle.

Puis à partir de la formule $S=\frac{1}{2}l.r$, on a $l=\frac{2S}{r}=\frac{2\times 314\,cun^2}{10\,cun}$

En notation moderne cela donne $\pi=\frac{l}{d}=\frac{157}{50}$

....Puis Liu Hui affine encore les calculs jusqu'à trouver $\pi=\frac{3927}{1250}$ expression qu'il vérifie par un autre biais en déterminant la longueur du côté d'un 1536-gone qui donne l'aire S_{10} d'un 3072-gone.

Isabelle MARTINEZ

Annexe 1

BASE (*GOU*) ET HAUTEUR (*GU*)[1]

pour traiter le haut et le profond, le large et le lointain[2]

(9.1)

SUPPOSONS QUE LA BASE (*GOU*) SOIT DE 3 *CHI* ET LA HAUTEUR (*GU*) DE 4 *CHI*. ON DEMANDE COMBIEN FAIT L'HYPOTÉNUSE[3].

RÉPONSE : 5 *CHI*.

(9.2)

SUPPOSONS QUE L'HYPOTÉNUSE SOIT DE 5 *CHI* ET LA BASE (*GOU*) DE 3 *CHI*. ON DEMANDE COMBIEN FAIT LA HAUTEUR (*GU*).

RÉPONSE : 4 *CHI*.

(9.3)

SUPPOSONS QUE LA HAUTEUR (*GU*) SOIT DE 4 *CHI* ET L'HYPOTÉNUSE DE 5 *CHI*. ON DEMANDE COMBIEN FAIT LA BASE (*GOU*).

RÉPONSE : 3 *CHI*.

PROCÉDURE DE LA BASE (*GOU*) ET DE LA HAUTEUR (*GU*)[4] :

Le côté le plus court est appelé « base (*gou*) » ; le côté plus long est appelé « hauteur (*gu*) » ; ce qui lie les coins l'un à l'autre est appelé « hypoténuse »[5].

La base (*gou*) est plus courte que la hauteur (*gu*) qui lui correspond, la hauteur (*gu*) est plus courte que l'hypoténuse qui lui correspond. On s'apprête à les utiliser pour les appliquer à toutes les procédures (*lü*), c'est pourquoi on expose d'entrée de jeu cette procédure pour en faire apparaître l'origine[6].

BASE (*GOU*) ET HAUTEUR (*GU*) ÉTANT CHACUNE MULTIPLIÉE PAR ELLE-MÊME, ON SOMME (LES RÉSULTATS) ET ON DIVISE CECI PAR EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE, CE QUI DONNE L'HYPOTÉNUSE.

La base (*gou*) multipliée par elle-même fait un carré vermillon, la hauteur (*gu*) multipliée par elle-même un carré bleu-vert, et l'on fait en sorte que ce qui sort et ce qui entre se compensent l'un l'autre[7], que chacun se conforme à sa catégorie[8] ; alors, sur la base du fait que l'on garde ceux (les parties, les morceaux) qui restent sans les bouger, on engendre par réunion l'aire (*mi*) du carré de côté l'hypoténuse. « En divisant ceci par extraction de la racine carrée, cela donne l'hypoténuse. »

AUTREMENT, LA HAUTEUR (*GU*) ÉTANT MULTIPLIÉE PAR ELLE-MÊME, ON SOUSTRAIT CECI DE L'HYPOTÉNUSE MULTIPLIÉE PAR ELLE-MÊME. ON DIVISE CE QUI RESTE PAR EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE, CE QUI DONNE LA BASE (*GOU*).

Li Chunfeng et ses associés commentent respectueusement : Dans cette procédure, à l'aide des aires (*mi*) de la base (*gou*) et de la hauteur (*gu*), on engendre par réunion l'aire (*mi*) de l'hypoténuse. Le carré de côté la base (*gou*) est à l'intérieur [du carré de côté la hauteur (*gu*)], de fait la base (*gou*) est plus courte que la hauteur (*gu*)[9]. Si l'on fait en sorte que « la hauteur (*gu*) étant multipliée par elle-même, on soustrait ceci de l'hypoténuse multipliée par elle-même », ce qui reste donne le carré (*mi*) de la base (*gou*). C'est pourquoi « en divisant ceci par extraction de la racine carrée, cela donne la base (*gou*) ».

AUTREMENT, LA BASE (*GOU*) ÉTANT MULTIPLIÉE PAR ELLE-MÊME, ON SOUSTRAIT CECI DE L'HYPOTÉNUSE MULTIPLIÉE PAR ELLE-MÊME. ON DIVISE CE QUI RESTE PAR EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE, CE QUI DONNE LA HAUTEUR (*GU*).

Puisqu'en réunissant les aires (*mi*) de la base (*gou*) et de la hauteur (*gu*), on engendre l'aire (*mi*) de l'hypoténuse, à supposer qu'on en élimine l'une d'entre elles, alors on peut savoir, dans tous les cas, ce en quoi consiste le reste[10].

(9.4)

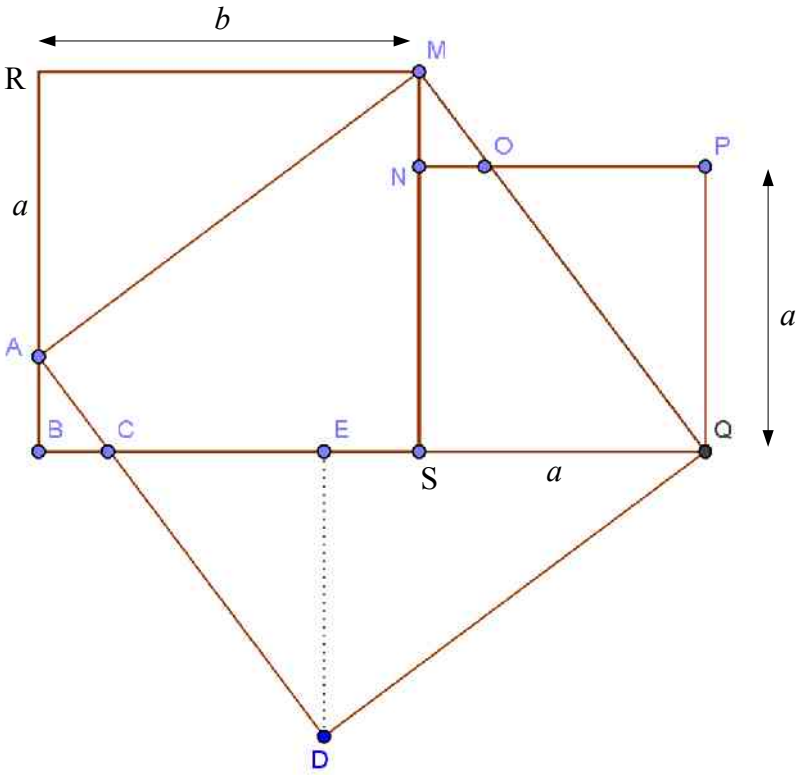
SUPPOSONS QU'ON AIT UN RONDIN DE BOIS DE SECTION CIRCULAIRE DE 2 *CHI* 5 *CUN* DE DIAMÈTRE ET QU'ON VEUILLE EN FAIRE UNE PLANCHE DE SECTION RECTANGULAIRE[11], DE SORTE QU'ELLE AIT 7 *CUN* D'ÉPAISSEUR. ON DEMANDE COMBIEN VAUT SA LARGEUR.

RÉPONSE : 2 *CHI* 4 *CUN*.

PROCÉDURE : ON EFFECTUE LA MULTIPLICATION DU DIAMÈTRE, 2 *CHI* 5 *CUN*, PAR LUI-MÊME ET ON EN SOUSTRAIT 7 *CUN* MULTIPLIÉS PAR EUX-MÊMES. ON DIVISE CE QUI RESTE PAR EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE, CE QUI DONNE LA LARGEUR[12].

Ici, on prend le diamètre du cercle, 2 *chi* 5 *cun*, comme hyporénuse, l'épaisseur de la planche, 7 *cun*, comme base (*gou*), et la largeur que l'on cherche comme hauteur (*gu*).

<u>Annexe 2</u> : Un complément sur le théorème de Pythagore démontré par dissection



La démonstration consiste à déplacer le triangle OPQ et à le mettre en CED , de même MRA en QED et enfin ABC en MNO.

On vérifie bien qu'il s'agit de triangles isométriques (superposables) car ce sont des triangles rectangles qui ont un autre angle et une longueur respectivement égale.

Par exemple pour ABC et MNO , les côtés AB et MN sont égaux à b -a et les angles $\widehat{MON} = \widehat{CBA}$ car les droites (MO) et (AC) sont parallèles ainsi que les droites (NO) et (BC).

bibliographie :

[1]CHEMLA Karine et SHUCHUN Guo , Les neuf chapitres , traduit et annoté par , Dunod, 2004

[2] KELLER Olivier , La figure et le nombre, une archéologie de la géométrie, Vuibert, 2006

[3] MARTZLOFF Jean-Claude , Histoire des mathématiques chinoises, Masson ,1988 (épuisé)

[4] YABUUTI Kiyosi , Une histoire des mathématiques chinoises, Belin Pour la science, 2000

V. AIRES, GEOMETRIE AFFINE ET GEOMETRIE EUCLIDIENNE

Partant du fait que le théorème de Thalès est un théorème affine, dans le sens où il ne fait intervenir que des rapports de longueurs de segments portés par une même droite, je me suis rappelée d'une question, qui m'avait été posée il y a quelques années, : "*l'aire est-elle une notion affine ou euclidienne ?*". C'est donc à cette question que nous allons tenter de répondre, faisant le point sur la notion d'aire, et sur ce qui distingue la géométrie affine de la géométrie euclidienne.

Pour commencer, une précision de vocabulaire, le mot euclidien a deux sens différents qu'il ne faut pas confondre. On peut, d'une part, parler de géométrie euclidienne en temps que géométrie affine munie d'une distance euclidienne, il s'agit de la géométrie métrique que l'on oppose alors à la géométrie strictement affine. Mais, l'expression "géométrie euclidienne", d'autre part, peut aussi signifier son opposition aux géométries non-euclidiennes, c'est-à-dire dans lesquels le postulat des parallèles d'Euclide n'est pas vérifié.

Au collège et au lycée, la géométrie étudiée est euclidienne dans les deux sens du terme et c'est la géométrie qui semble approcher le mieux le monde sensible.

Nous traiterons ici de géométries euclidiennes au sens de l'axiome des parallèles, mais nous distinguerons la géométrie affine de la géométrie métrique.

Tout en gardant la notion d'aire comme fil conducteur, nous approcherons ces deux notions, affine et métrique, selon trois angles différents. Le premier est celui de l'algèbre linéaire, c'est le point de vue moderne qui donne un cadre rigoureux et simple à la géométrie, le second est le point de vue axiomatique, c'est celui d'Euclide et le dernier est celui des groupes de transformations qui est celui de Félix Klein.

Nous essaierons de toujours relier ces points de vue et nous allons commencer par...

Quelques rappels d'algèbre linéaire.

On considère un espace vectoriel E sur le corps des nombres réels, étant entendu que la structure d'espace vectoriel est l'une des plus simples à appréhender qui soit. Un espace affine $\mathcal{E}$, dirigé par E est un ensemble de points vérifiants

$$\forall M \in \mathcal{E}, \forall \vec{v} \in E,\ \exists! N \in \mathcal{E} \text{ tel que } \overrightarrow{MN} = \vec{v}.$$

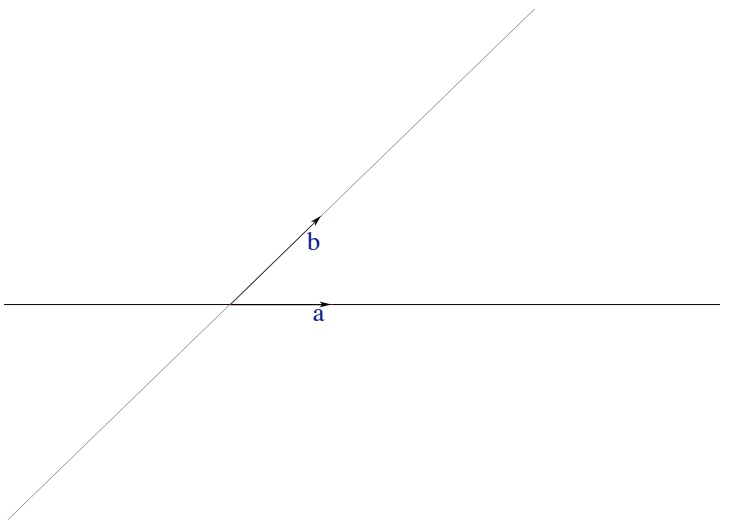
et la relation de Chasles

$$\forall A, B, C \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Ainsi, un plan affine est dirigé par un plan vectoriel que nous pouvons identifier à $\mathbb{R}^2$ en choisissant une base $(\vec{a}, \vec{b})$ de E :

$$E = \{\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Sans structure métrique, sans définition de distance ou d'angle, la situation, quelconque, est la suivante :



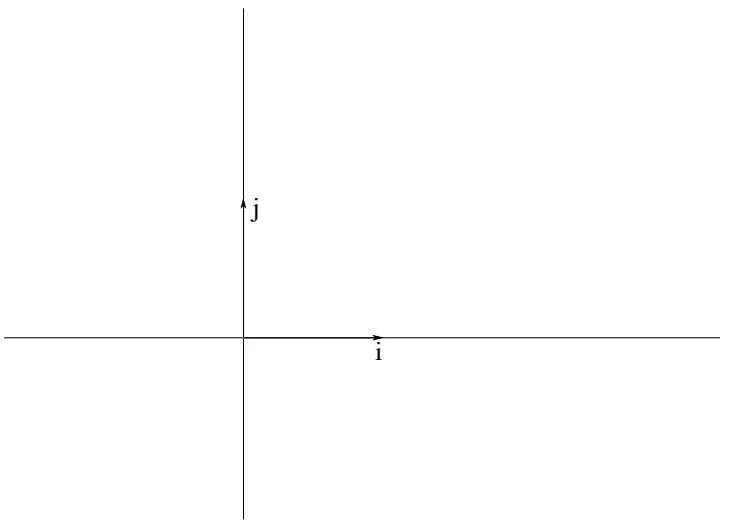
En choisissant un point $O \in \mathcal{E}$ comme origine, on identifie l'espace affine $\mathcal{E}$ à son espace vectoriel direction E,

$$\mathcal{E} \longrightarrow E$$
$$M \longmapsto \overrightarrow{OM}$$

Si l'on muni l'espace vectoriel E d'un produit scalaire, et ainsi, l'espace $\mathcal{E}$ d'une distance :

$$d(A,B) = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}},$$

on privilégie alors une base orthonormée et l'on est dans le situation suivante :



La difficulté étant d'oublier cette structure métrique, qui nous est naturelle, lorsque l'on veut considérer uniquement la structure affine du plan. Nous allons maintenant faire le lien avec les définitions axiomatiques.

Les définitions axiomatiques.

On peut définir une géométrie par un certain nombre d'axiomes qui établissent les propriétés des objets, points, droites et plans de cette géométrie, nous allons voir sur les différentes familles d'axiomes vérifiées, en quoi diffèrent les géométries affine et métrique.

I. Les axiomes d'incidence

Ces axiomes sont essentiellement communs à toutes les géométries, puisque ce sont eux qui définissent les objets. Pour le plan, ils nous disent que

1) Toute droite contient au moins deux points.
2) Par deux points distincts, passe une unique droite.
3) Il existe trois points non alignés.

II. Les axiomes d'ordre

Ces axiomes définissent le fait pour un point d'être entre deux autres.

1) Soit d une droite, pour tout $A, B \in d$, il existe $C \in d$, tel que B soit entre A et C. C'est ce qui permet de définir des segments et, avec l'axiome suivant, de démontrer les propriétés raisonnables que l'on en attend.

2) L'axiome de Pasch : Si ABC est un triangle, toute droite qui coupe le segement $]AB[$ coupe ou le segment $]AC[$ ou le segment $]BC[$. Ce que l'on exprime en disant qu'une droite qui entre dans un triangle en sort.

III. Axiomes de congruences

Ces axiomes permettent de mesurer des segments et des angles, de les comparer et de les additionner. Ce ne sont pas des axiomes de la géométrie affine ce sont ceux de la géométrie métrique.

IV. Axiomes de continuité

L'axiome d'Archimède et l'axiome d'intégrité linéaire permettrons d'identifier la droite à l'ensemble des nombres réels.

V. Axiome des parallèles C'est le postulat d'Euclide, par un point du plan, il passe une unique droite parallèle à une droite donnée.

La géométrie affine vérifie les groupes d'axiomes I, II, IV et V, à partir de ceux-ci, on peut construire les plans vectoriel et affine et les identifier à l'ensemble $\mathbb{R}^2$.

Définition de l'aire d'une partie du plan.

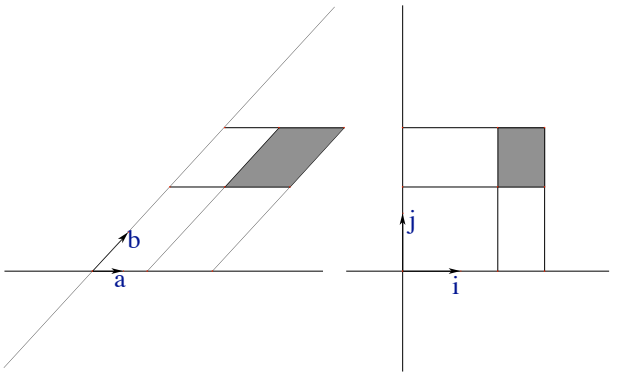
Revenons à l'algèbre linéaire, en fixant une origine de $\mathcal{E}$ et une base de E, on identifie le plan affine $\mathcal{E}$ à $\mathbb{R}^2$.

A priori, la notion d'aire relève plutôt de la théorie de la mesure que l'on ne détaillera pas ici. Disons simplement, qu'il exixte une unique mesure μ sur $\mathbb{R}^2$ telle que si $I = [a_1, a_2]$ et $J = [b_1, b_2]$, alors $\mu(I \times J) = (a_2 - a_1).(b_2 - b_1)$.

Cette mesure vérifie ce que l'on attend d'elle, à savoir,

- Elle est invariante par translation et toute isométrie du plan.
- Les points, les droites et les segments sont de mesure nulle.
- Elle est additive : si A et B sont des parties du plan telles que $A \cap B = \emptyset$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- Si h est une homothétie de rapport λ et A une partie du plan, alors, $\mu(h(A)) = \lambda^2 \mu(A)$.

En identifiant $\mathbb{R}^2$ au plan affine, selon que l'on se place dans une base quelconque ou orthonormée, on a



Dans les deux cas, l'aire peut être définie par un déterminant dans la base considérée. L'aire de la partie achurée correspondant au déterminant dans la base $(\vec{a}, \vec{b})$ des vecteurs $(a_2 - a_1)\vec{a}$ et $(b_2 - b_1)\vec{b}$, ce déterminant s'écrit

$$\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & 0 \\ 0 & b_2 - b_1 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1).$$

Ceci étant toujours vrai si $\vec{a} = \vec{i}$ et $\vec{b} = \vec{j}$. Dans les deux cas, l'élément d'aire est déterminé par le paralléllogramme défini par les vecteurs de base, c'est le déterminant de la base dans elle même, qui vaut 1. Nul besoin d'une distance euclidienne pour définir l'aire de cette manière, ce qui en ferait une notion affine ?

C'est là que nous allons préciser le sens d'une propriété affine en considérant la définition d'une géométrie par son groupe de transformations, une propriété sera dite affine si elle est conserée par le groupe des transformations affines, c'est l'objet de ce qui suit.

Les groupes de transformations.

Le troisième point de vue sur les géométries consiste à envisager une géométrie comme une ensemble et un groupe de bijections de cet ensemble dans lui-même.

Ainsi, le groupe de la géométrie affine est le groupe affine,celui de la géométrie métrique est le groupe des isométries. On peut également considérer certains sou-groupes selon les propriétés que l'on envisage de conserver.

Le plus parlant pour visualiser ces différents groupes semble être la présentation matricielle, nous verrons ensuite comment sont transformés les triangles et à quelle condition les aires sonts conservées.

On fixe une origine O de $\mathcal{E}$ et une base ($\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$ de E. Sachant que pour toute application affine f, il existe une unique application affine g telle que $g(O) = O$ et une unique translation t telle que $f = t \circ g$, on peut, si l'on veut, "oublier" les translations et considérer les applications affines qui fixent l'origine comme des applications linéaires qui nous sont alors données par leur matrice dans la base $\mathcal{B}$.

Nous avons alors les groupes suivants :

Le groupe affine

C'est le groupe des applications affines dont les applications linéaires sont données par les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{telle que} \quad ad - bc \neq 0.$$

De telles applications conservent l'alignement, les barycentres (c'est même ce qui les caractérisent), les rapports de longueur sur une droite et les rapports d'aires. Toutes les propriétés "affines" sont conservées. Les homothéties et les translations sont les transformations affines qui envoient une droite sur une droite qui lui est parallèle.

Le groupe unimodulaire

C'est le groupe des applications affines dont les applications linéaires sont données par les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{telle que} \quad ad - bc = 1.$$

En plus des propriétés précédentes, les aires sont conservées.

Le groupe des similitudes

C'est le groupe des applications affines dont les applications linéaires sont données par les matrices suivantes

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Cette fois, les aires ne sont plus conservées, mais les angles le sont. Une base orthogonale est transformée en une base orthogonale.

Le groupe des isométries

C'est le groupe des applications affines dont les applications linéaires sont données par les matrices suivantes

$$\lambda \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 + b^2 = 1, \varepsilon = \pm 1.$$

Ces applications conservent les angles et les distances, une base orthonormée est transformée en une base orthonormée. Toutes les propriétés "métriques" sont conservées.

Le groupe des isométries positives

C'est le groupe des applications affines dont les applications linéaires sont données par les matrices suivantes

$$\lambda \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 + b^2 = 1.$$

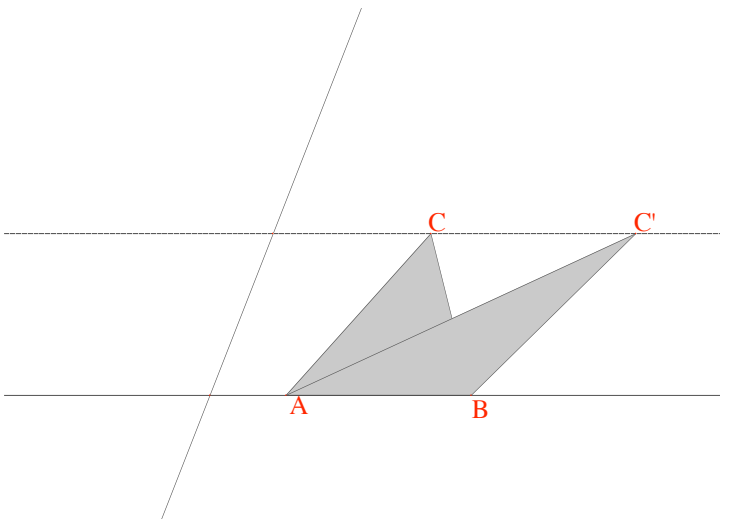
Ce sont les isométries qui conservent, en plus, l'orientation du plan. Une base orthonormée directe est transformée en une base orthonormée directe.

Les groupes unimodulaire, des similitudes, des isométries et des isométries positives sont des sous-groupes du groupe affine. L'aire est conservée par le groupe des similitudes et par celui des isométries, ce qui en fait une notion métrique. Cependant, les rapports d'aires sont conservés par le groupe affine, ce qui fait de l'aire, comme nous l'avons vu précédemment, quasiment une notion affine.

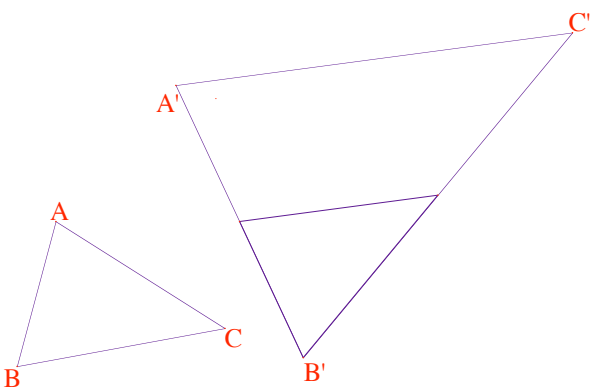
Voyons maintenant comment ces bijections tranforment les triangles du plan.

- Le *groupe affine* transforme un triangle quelconque (trois points non alignés) en un triangle quelconque, ainsi tous les triangles de la géométrie affine sont équivalents.

- Le *groupe unimodulaire* transforme un triangle en un triangle de même aire. C'est le cas des transvections de matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



Le *groupe des similitudes* transforme, comme son nom l'indique, un triangle en un triangle semblable. Les angles sont conservés.



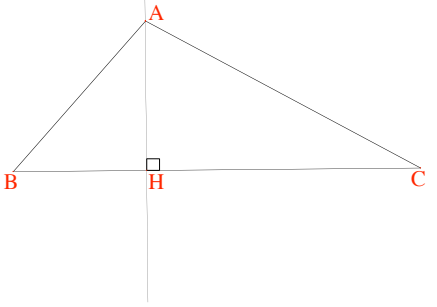
Le *groupe des isométries* transforme un triangle en un triangle isométrique, ou égal, et conserve ou non son orientation selon que l'isométrie est positive ou non. Les cas d'égalités des triangles peuvent être des axiomes de la géométrie euclidienne (métrique).

Nous allons terminer cet exposé en reliant les différents points de vue à travers l'aire d'une figure du plan et le théorème de Thalès.

Aire d'une figure.

On appelera *figure* du plan, une réunion finie de triangle qui ne se chevauchent pas. Une fonction α, *mesure d'aire* sera définie axiomatiquement sur l'ensemble des figures à valeur dans $\mathbb{R}^*$ par
- 1. Pour tout triangle T, $\alpha(T) > 0$.
- 2. Si T et T' sont des triangles égaux (isométriques) $\alpha(T) = \alpha(T')$.
- 3. Si deux figures P et Q ne se chevauchent pas, $\alpha(P \cup Q) = \alpha(P) + \alpha(Q)$.

Cette définition pourra s'appliquer dans tout plan vérifiant les axiomes d'incidence, d'ordre et de congruence. Si l'on ajoute l'axiome d'Euclide, il existe une unique mesure de ce type vérifiant pour un triangle ABC la formule de l'aire d'un triangle égale à la moitié du produit de la base par la hauteur.



Notons $a = BC$ et $h = AH$, on a $\mathcal{A}(ABC) = \frac{ah}{2}$.

Terminons par le théorème de Thalès, dont nous donnons une démonstration moderne, utilisant l'algèbre linéaire, que nous relions aux aires.

Théorème de Thalès. *Soit ABC un triangle. Soient $B' \in [AB]$ et $C' \in [AC]$ tels que les droites $(B'C')$ et (BC) soient parallèles. Alors*

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Démonstration : On considère l'homothétie de centre A qui envoie le point B sur le point B'. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\overrightarrow{AB'} = \lambda\overrightarrow{AB}$. La droite $(B'C')$ étant parallèle à la droite (AB), l'image du point C par cette homothétie est le point C', on a donc $\overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{AC}$. Par ailleurs

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AC'} = \lambda(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \lambda\overrightarrow{BC},$$

d'où le résultat.

Lien avec les aires :

Compte tenu de l'homothétie, on a $\overrightarrow{AB'} = \lambda\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{AC}$, d'où

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \lambda.$$

Par ailleurs, en exprimant l'aire par un déterminant, si on note det le déterminant dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on a

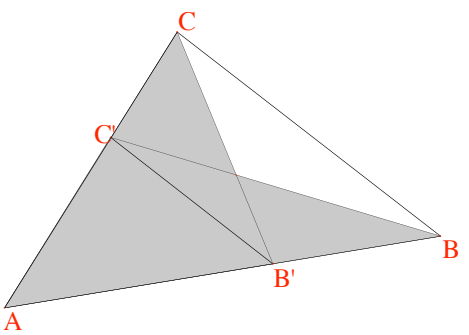
$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|,$$

d'où

$$\mathcal{A}(AB'C) = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2}|\det(\lambda\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2}\lambda|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|.$$

D'où

$$\frac{\mathcal{A}(AB'C)}{\mathcal{A}(ABC)} = \lambda = \frac{AB'}{AB} \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{A}(ABC')}{\mathcal{A}(ABC)} = \lambda = \frac{AC'}{AC}.$$



Bibliographie

Daniel Perrin, *Mathématiques d'école. Nombres, mesures et géométrie*, Cassini 2005.

Michèle Audin, *Géométrie*, Collection Enseignement Sup, EDP, 2006

H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry, Second Edition*, Wiley Classics Library 1980

F. Klein, *Le programme d'Erlangen*, Collection "Discours de la méthode", Gauthier-Villars 1974

L. Godeaux, *Les Géométries*, Armand Colin 1952

G. Lion, *Géométrie du plan*, collection "les sciences en fac", Vuibert 2001

B. Sénéchal, *Groupes et géométries*, Hermann 1979

C. Tisseron, *Géométries affine, projective, et euclidienne*, Hermann 2001

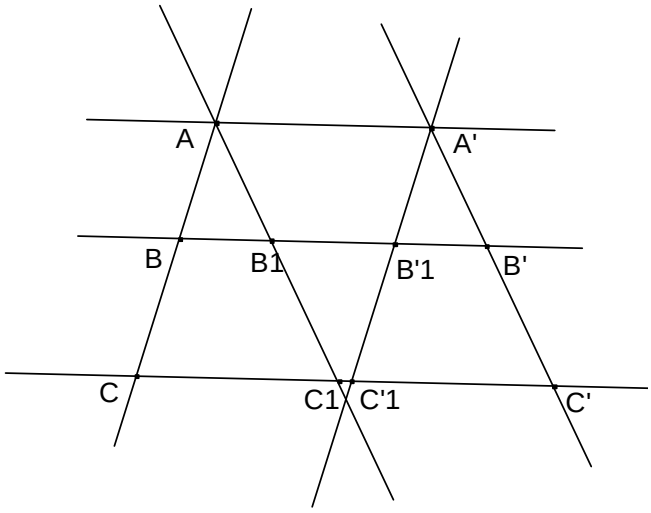
Sandra Delaunay

VI. EXERCICES - MÉTHODE DES AIRES

On trouvera une mine de situations géométriques pour les classes de collège dans les publications de l'IREM de Paris Nord (Paris13) citées en bibliographie.
Pour faire les exercices ci-dessous, on suppose connues les propositions sur les triangles (ou parallélogrammes) compris entre les mêmes parallèles- égalité et proportion. Les théorèmes de Pythagore et Thalès (version collège) ont été ainsi démontrés.
Les exercices sont rédigés comme des pistes à suivre.

0. DÉMONSTRATION DIRECTE DU THÉORÈME DES LIGNES PROPORTIONNELLES Á PARTIR DE L'AUTRE CONFIGURATION DE THALES

Trois droites parallèles L, L_1, L_2 sont coupées par deux droites d et d' respectivement en A, B,C et en A',B', C' ; on trace les parallèles à d passant par A' et à d' passant par A.

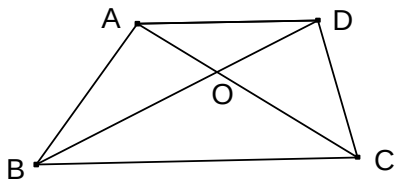


Le rapport AB/AC est le rapport des aires de parallélogrammes (ABB'$_1$A')/(ACC'$_1$A').
Le rapport A'B'/A'C' est le rapport des aires de parallélogrammes (AB$_1$B'A')/(AC$_1$C'A') ;
Les numérateurs de ces rapports sont égaux, les dénominateurs aussi.

1. LA CONFIGURATION DU TRAPÈZE.

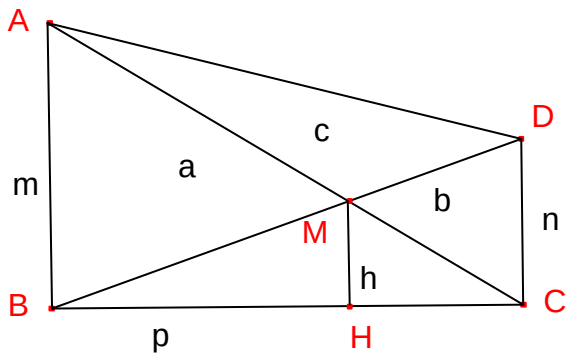
1.1. la figure fondamentale

Les triangles AOB et COD ont même aire qu'on écrira : (AOB) = (COD)



1.2 Avec des formules algébriques

Dans un trapèze rectangle en B et C, H projection orthogonale de M sur BC.

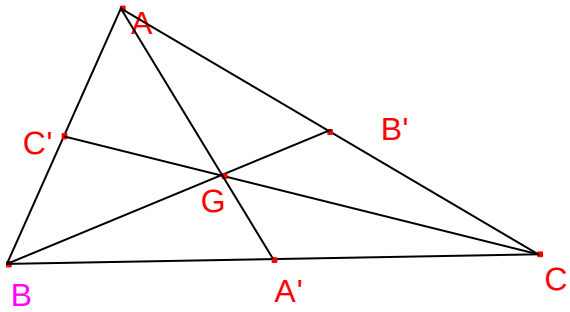


a, b, c désignent respectivement les aires des triangles AMB, CMD, MBC. Les lettres h, m, n, p désignent respectivement les longueurs MH, AB, CD, BC.

- exprimer c/a, c/b, on trouve $c^2 = ab$
- exprimer c, a+c, b+c, en fonction de p, h, m, n ; et trouver que 1/h = 1/m + 1/n

2. VARIATIONS SUR LE THÈME DE LA MÉDIANE ET DU CENTRE DE GRAVITÉ D'UN TRIANGLE

2.1. Toute médiane partage le triangle en deux triangles de même aire
2.2. Propriétés de la « droite des milieux » d'un triangle
2.3 Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

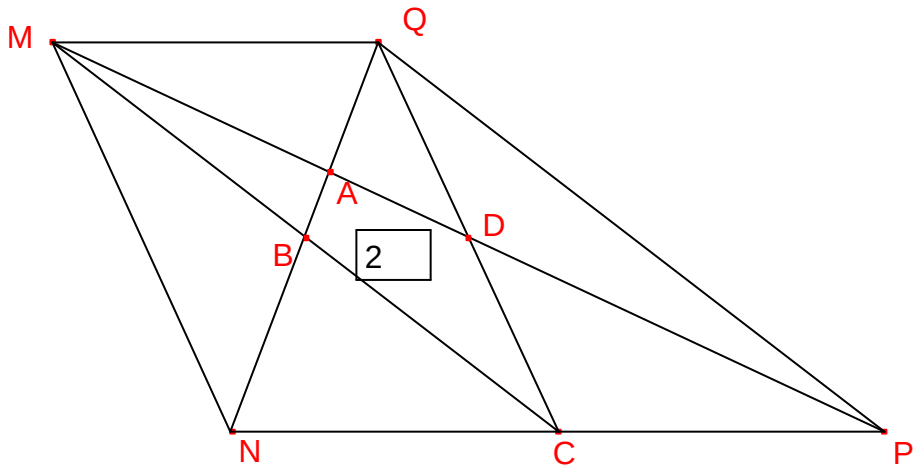


On trace deux médianes BB' et CC', elles se coupent en G

- comme B'C' est parallèle à BC, on a (BGC') = (CGB'), donc (GAB) = (GAC), exprimer GA'/GA de deux façons et déduire que : (GBA') = (GCA'), on conclut que A' est le milieu de BC et que les trois triangles GAB, GBC, GCA ont même aire.
-exprimer GA'/GA , on montre que G est au 2/3 de chaque médiane en partant du sommet.

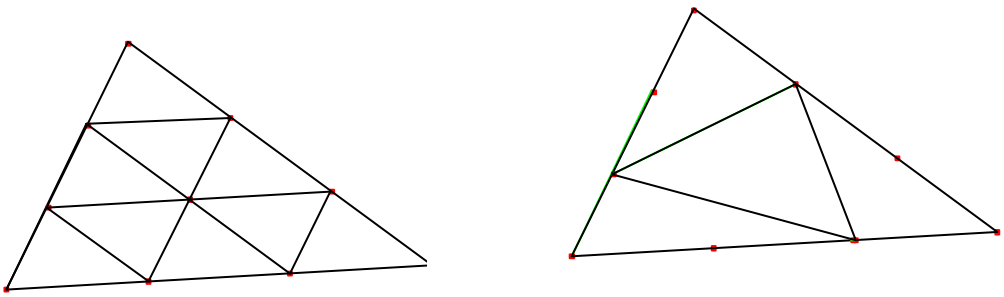
2.4. Découpage et puzzle

2.4.1. Exercice du journal *Le Monde*, Pb n° 469 du 22 02 06

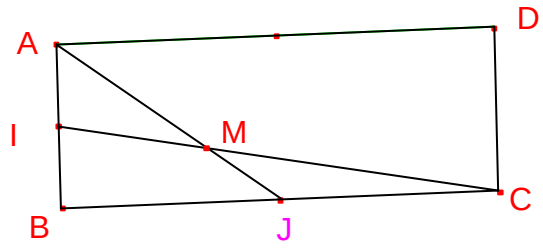


MNCQ et MCPQ sont des parallélogrammes, le tracé de leurs diagonales délimite 8 parties, calculer leurs aires sachant que l'aire du quadrilatère ABCD vaut 2.

2.4.2. Exo. n° 209 du livre de D.Perrin cité en bibliographie. Chacun des côtés du triangle est partagé en trois parties égales. Donner l'aire des petits triangles en fonction de celle du triangle originel.



2.4.3. Exo n° 197 du livre de D.Perrin précité ;
ABCD est un rectangle, I est le milieu de AB et J le milieu de BC. Comparer les aires des quadrilatères IBJM et AMCD.

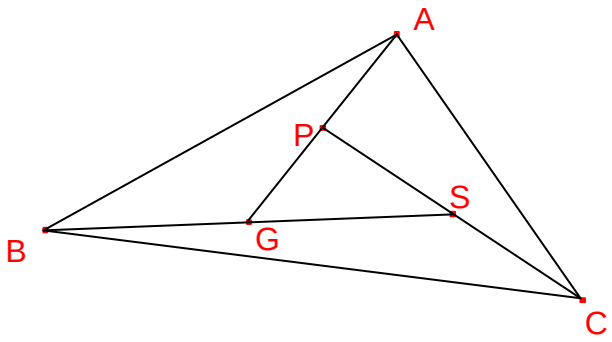


2.4.3 Pb n° 474 du 28 03 06 Le Monde :

Trois amis s'enfoncent séparément dans une forêt en forme de triangle, de sommets A, B, C. Au bout d'une heure, grâce à leur radio et leur GPS, ils donnent les informations suivantes :

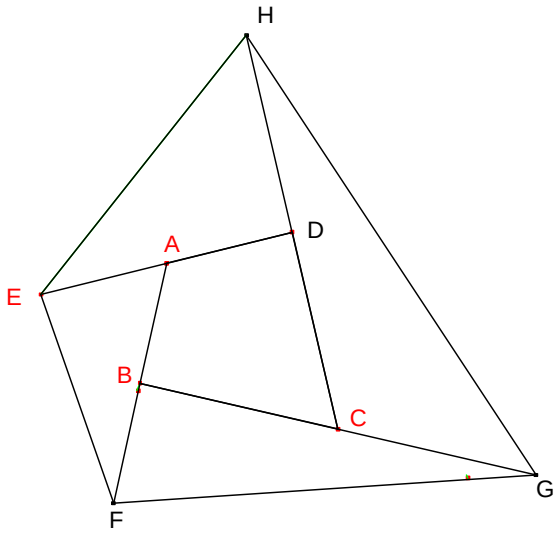
- Géraldine est exactement au milieu du segment qui joint le sommet B à la position S de Serge.
- S est exactement au milieu du segment qui joint le sommet C à la position P de Pauline.
- Pauline est exactement au milieu du segment qui joint le sommet A à la position G de Géraldine.

Quel est le rapport de l'aire du triangle GPS à celle du triangle ABC ? Représentez la position des trois amis.



2.4.5. Exo n° 219, D. Perrin

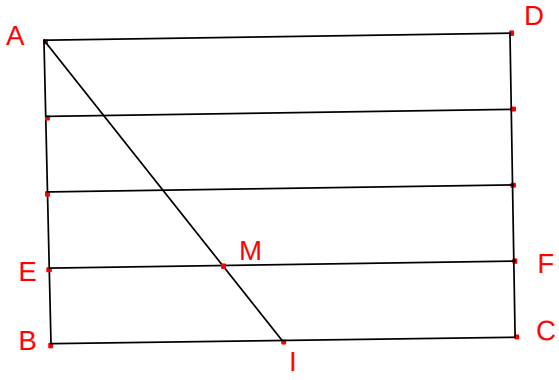
ABCD est un quadrilatère convexe. E est symétrique de D par rapport à A, F est symétrique de A par rapport à B, G est symétrique de B par rapport à C, H est symétrique de C par rapport à D, comparer les aires des quadrilatères ABCD et EFGH.



3. DES FORMES DIFFÉRENTES ET DES AIRES ÉGALES. DÉCOUPAGE ET PUZZLE.

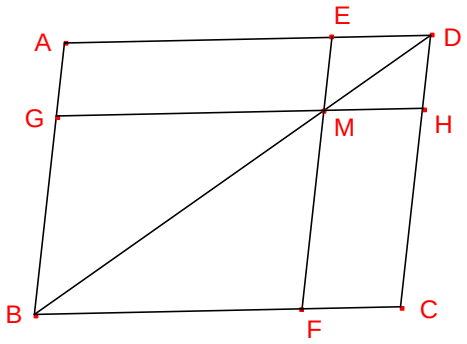
3.1 Ajouter, retrancher, déplacer.
Voir exercices de l'IREM de Paris nord etc.

3.2. ABCD est un rectangle, on le partage en quatre bandes égales parallèles à BC comme sur la figure, I est la milieu de BC et les segments EF et AI se coupent en M.. Les aires du triangle AME et du quadrilatère MICF sont égales. L'expliquer de deux manières : par différence d'aires égales, ou en décomposant AME.



3.3. La figure du gnomon

3.3.1 ABCD est un parallélogramme, M un point situé sur la diagonale BD. On mène de M les parallèles aux côtés du parallélogramme ; les parallélogrammes AGME et MFCH ont mêmes aires.

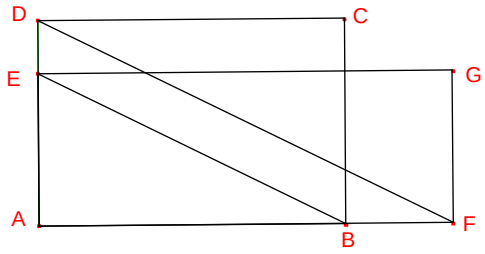


Et inversement, M étant un point intérieur au parallélogramme, on construit les deux parallélogrammes AGME et MCFH, si leurs aires sont égales, alors M est sur la diagonale BD.

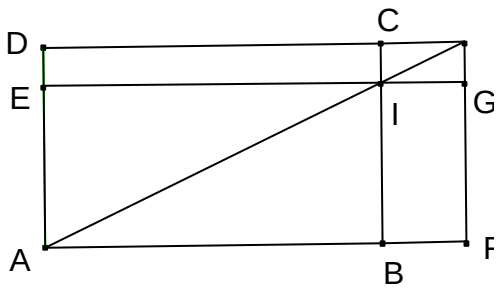
3.3.2. **Construction**

ABCD est un rectangle, E est un point du segment AD. Construire un rectangle de côté AE (AFGE) et de même aire que le précédent.

- A partir de la formule de l'aire AE × AF = AD × AB et on applique la propriété de Thalès.

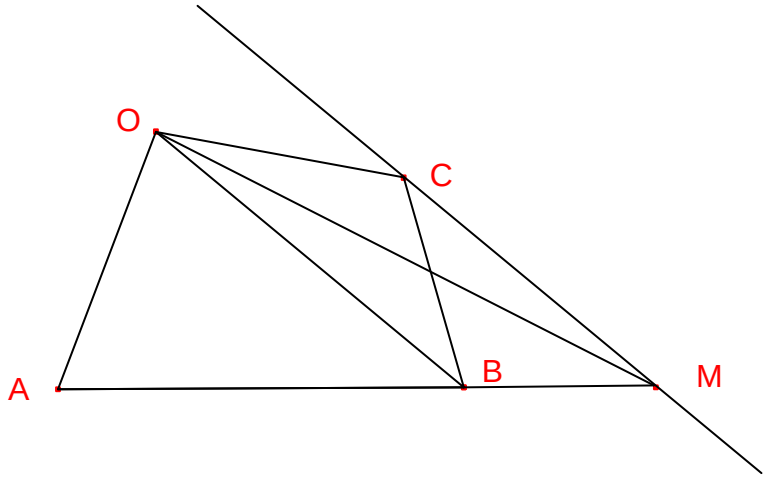


- A partir de la configuration du gnomon. On suppose la figure tracée, les rectangles DEIC et BIGF ont même aire donc A,I et J sont alignés. D'où la construction (on trace AI qui est connu la droite AI coupe la droite CD en J, qui se projette sur la droite AB en F).

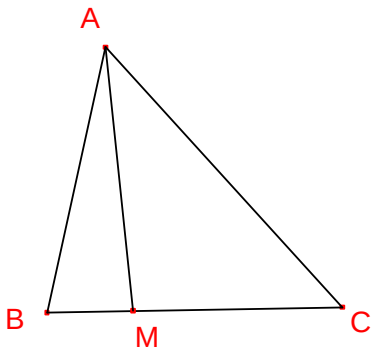


4.CONSTRUCTION ET PARTAGES DU PREMIER DEGRÉ.

4.1 OABC est un quadrilatère, construire M sur la droite AB tel que le triangle AOM ait même aire que le quadrilatère.

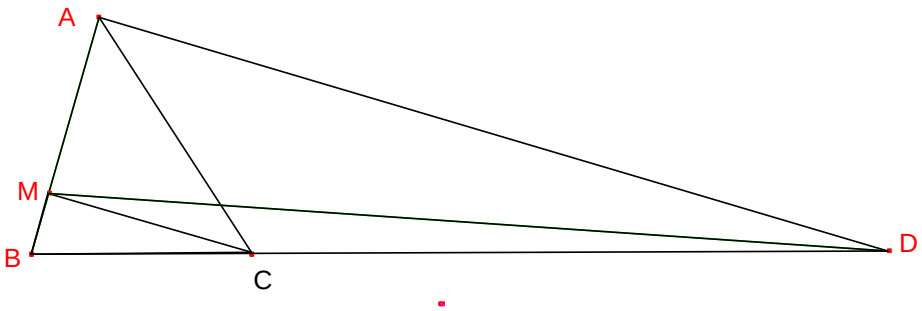


4.2. Diviser selon un rapport donné un triangle par une droite menée d'un sommet.



C'est l'un des résultat fondamental (ABM)/ (ACM) = MB/MC et on sait diviser un segment selon un rapport donné.

4.3. Diviser selon un rapport donné un triangle par une droite menée d'un point d'un côté. (on couple les deux résultats ci-dessus.
Analyse du problème résolu, ABCM sont donnés :

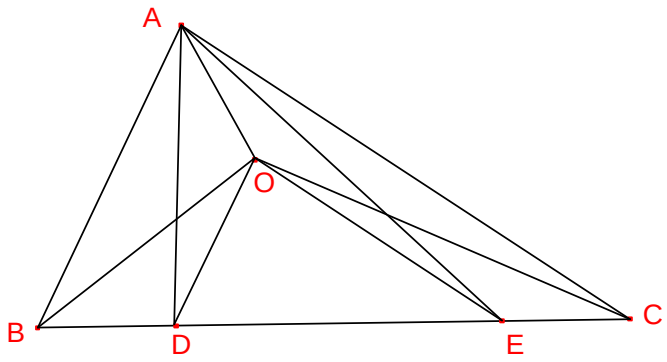


Si N est le point cherché sur le segment BC, la parallèle à MC passant par A coupe la droite BC en D. le triangle MND est de même aire que le quadrilatère AMNC et on est ramené au problème précédent. D'où la construction. Si la construction n'est pas possible c'est que N est sur le segment AC et on trace alors la parallèle à MC passant par B qui coupe AC en E , le triangle MNE est de même aire que la quadrilatère BMNC, etc.

4.4. Même genre d'idée : diviser, selon un rapport donné, un quadrilatère par une droite passant par un sommet.

4.5. Diviser un triangle en trois parties proportionnelles à m, n, p, par des droites concourantes passant chacune par un sommet du triangle (généralisation du centre de gravité, interprétation coordonnées barycentriques).

ABC est un triangle, D et E sur BC tels que BD/m = DE/n = EC/p, dans cet ordre comme sur la figure. Les parallèles menées de D à AB et de E à AC se coupent en O.

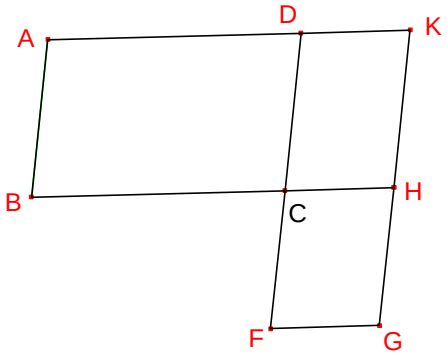


- Les aires (ABD), (ADE), (AED) sont proportionnelles respectivement à m, n, p
- même chose pour (AOB), (BOC), (COA).

5. RAPPORT D'AIRES DE DEUX FIGURES SEMBLABLES

5.1. Rapport d'aires de deux figures rectilignes semblables

- D'abord deux parallélogrammes de mêmes angles. Faire la figure en les installant opposés par un sommet. : ABCD et CFHG.



On écrit les rapports (ABCD)/(CHKD) et (CHKD)/ (CHGF) et on trouve (ABCD)/(CHGF) = AB x AD / CF x CH.

- Si les deux parallélogrammes sont semblables, les côtés sont dans le même rapport AB/CF = BC/CH et le rapport des aires est égal au carré de ce rapport.

5.2. Exo. n° 196 dans D. Perrin
ABC est un triangle, G son centre de gravité et F le symétrique de G par rapport au milieu A' du côté BC.

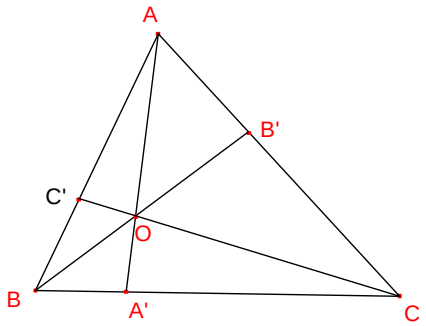
- Calculer l'aire du triangle BGF en fonction de celle de ABC
- Calculer l'aire du triangle construit sur les médianes du triangle ABC en fonction de l'aire du triangle ABC.

5.3. Une nouvelle démonstration du théorème de Pythagore.
ABC est un triangle rectangle en A, H est le pied de la hauteur issue de A sur le côté BC. Comparer les aires de AHC et ABC, puis de AHB et ABC. On en déduit la relation de Pythagore.

5.4. Partage du second degré
Diviser selon un rapport donné un triangle par une droite parallèle à un côté

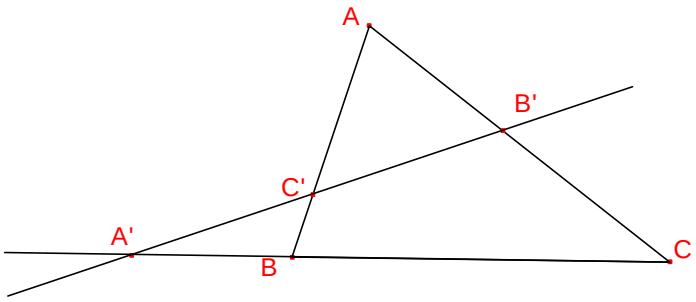
6. ALIGNEMENT ET CONCOURS DANS LE TRIANGLE.

6 .1. ABC est un triangle, A' un point de BC, B' de CA et C' de AB, tels que AA', BB', CC' se coupent en O.



- Etablir la relation de Gergonne : OA'/AA' + OB'/BB' + OC'/CC' = 1 (on peut montrer d'abord que OA'/AA' = (OBC)/ (ABC) etc.)
- Etablir la relation de Ceva (on peut remarquer que A'B/A'C = (OAB)/OAC) etc. et prendre en compte la disposition des points pour le passage aux valeurs algébriques)

6.2. ABC est un triangle, A' est sur BC, B' sur CA et C' sur AB, et A'B'C' sont alignés. Etablir la relation de Menelaus.



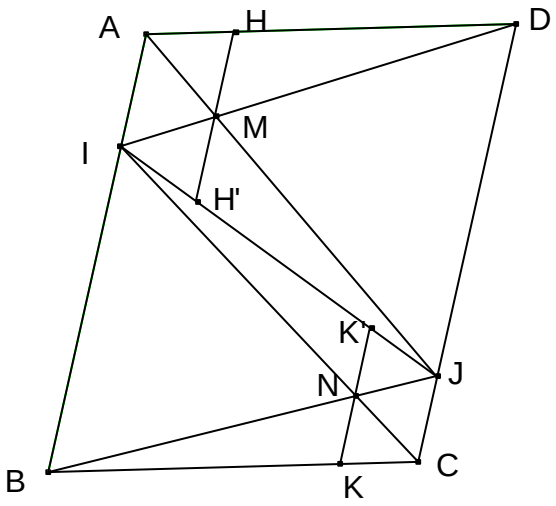
(On peut établir que A'B/A'C = (C'B'B)/ (C'B'C) etc.)

7. POUR LE PLAISIR

On considère un parallélogramme ABCD, I sur le segment AB et J sur le segment CD. JA et ID se coupent en M, JB et IC se coupent en N. Pour quelles positions de I, J, le quadrilatère MNIJ a-t-il une aire maximum ?

Indications :

- Egalité des triangles MAD et MIJ.
- La parallèle à AI par M, coupe AD en H et IJ en H', et M est le milieu de HH'.



BIBLIOGRAPHIE:

LA MÉMOIRE COLLECTIVE, DES MANUELS et :
FOURREY E., *Curiosités géométriques*, Vuibert, Paris 1938, nouvelle édition augmentée d'une préface d'Evelyne Barbin, Vuibert, Paris, 2001.
IREM PARIS NORD (PARIS 13), *Activités mathématiques au collège*, réédition 2006.
IREM PARIS NORD (PARIS 13), *Carnets de stages*, fascicule 1.
GROUPE PRIMAIRE DE L'IREM DE LILLE, in *Outils pour les cycles : grandeurs et mesures au cycle3*, sceren, Lille, 2006.
PERRIN D., *Mathématiques d'école*, Cassini, Paris, 2005.