Journée académique 2023

Proposition d'atelier pour les JA 2023 (groupe EMTA, Rossana Tazzioli)

Des *fake news* en histoire des maths ?

Comme dans toutes les disciplines, de nombreuses idées reçues sont également présentes en histoire des mathématiques. Sur les réseaux sociaux, dans les ouvrages de vulgarisation scientifique ou même dans les manuels scolaires, on peut parfois trouver des affirmations pour le moins ambiguës qui, si elles ne sont pas totalement fausses, ne sont pas non plus totalement vraies.

Quelques exemples : les Babyloniens connaissaient les racines carrées, Pythagore a défini les nombres irrationnels, les femmes mathématiciennes ne sont apparues qu'au 19ème siècle, etc. Lors de cet atelier, nous examinerons, sur la base d'articles d'histoire des mathématiques et de documents originaux, diverses idées reçues en discutant dans quelle mesure elles sont acceptables ou pourquoi elles doivent être rejetées.

Racine de 2 chez les Babyloniens?

J. Hoyrup, L'algèbre au temps de Babylone, Vuibert, 2010

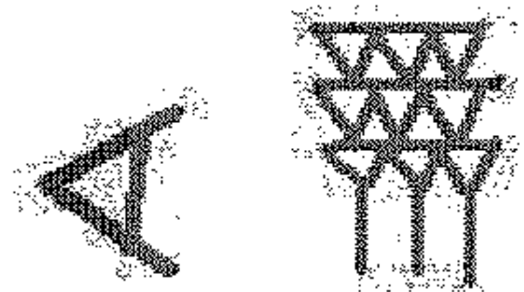
Chronologie

- A partir de 6000 ans av. notre ère
- 3700-2900 Uruk ancien, Naissance de l'écriture (Comptabilité)
- 2800-2350 Dynastie Archaïque, Civilisation sumérienne (Comptabilités, listes lexicales, textes littéraires, textes scolaires)
- 2350-2150 Dynastie d'Akkad, Premier Etat unifié (idem+ cadastres; exercices sur le calcul de surface)
- 2100-2000 Dynastie d'Ur III, Développement des écoles des scribes (idem + Apparition de la numération sexagésimale positionnelle, tables des inverse)
- 2000-1600 Paléo-babylonienne, l'Akkadien est la langue parlée dans toute la Mésopotamie et le sumérien est un langage scolaire et d'érudition (Textes scolaire: tables métrologiques et numériques, exercices de calcul, listes de partie du corps et d'animaux, de plantes, étoiles. Nombreaux textes savants)

L’organisation de la société

- Mésopotamie = la région autour des deux grands fleuves l’Euphrate et le Tigre (à peu près l’Iraq de nos jours)
- Autour de 3500 avant notre ère se développe la première civilisation, c’est à dire:
- une société centrée autour de villes et organisé comme Etat
- une première écriture idéographique dite cunéiforme
- Une première comptabilité
- Autour de 2800 une écriture sumérienne; les premiers « scribes »
- Autour de 2100-200 la profession du « scribe » se développe avec l’apparition de la numération à base 60

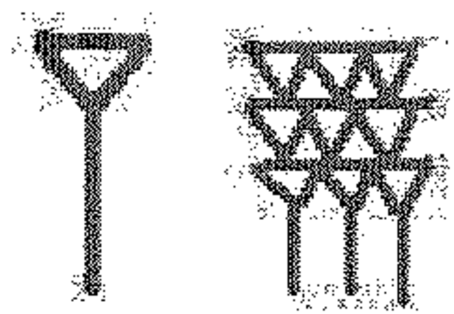
La numération babylonienne



1 **10** **et 19 s'écrivait** **1 chevron + 9 clous**

au-delà de 59, l'écriture devenait positionnelle.

le nombre 69 par
exemple s'écrivait :

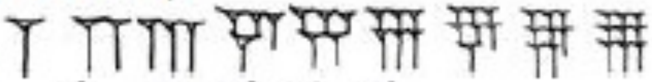


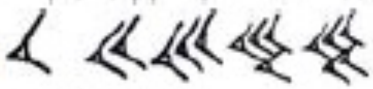
(1*60+9)

Encart 1 - La numération sexagésimale positionnelle

1) Il y a deux signes : 1 () et 10 ()

2) Il y a 59 « chiffres », écrits en répétant les 1 et les 10 autant que nécessaire (numération décimale additive)

unités : 

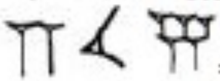
dizaines : 

Exemple :  = 59

3) La numération obéit à un principe de position à base 60 : une unité dans une position représente soixante unités de la position qui la précède (placée à sa droite). Par exemple, une soixantaine s'écrit 1 en deuxième position.

Exemples :

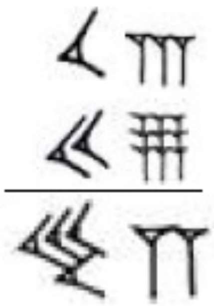
 = 1.3 (1 soixantaine et 3 unités, soit 63 en numération décimale)

 = 2.15 (2 soixantaines et 15 unités, soit 135 en numération décimale)

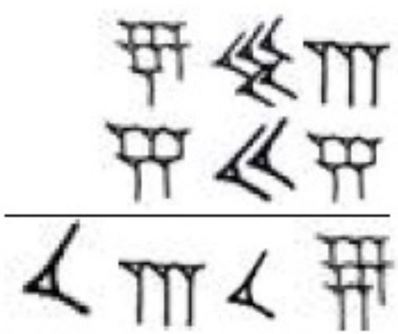
4) Il n'y a pas de signe écrit pour indiquer l'ordre de grandeur, comme nous le faisons en écrivant des zéros en position finale ou une virgule, nous permettant par exemple de distinguer une unité (1), une dizaine (10), un dixième (0,1). Le signe  peut désigner le nombre 1, ou 60, ou 1/60, ou toute puissance de 60 positive ou négative. Il en est de même pour tous les autres nombres :  peut désigner 2, ou 2×60, ou 2/60, etc.

Voici quelques exemples d'addition.

Pouvez-vous traduire et vérifier ces additions ?[2]



regroupement de 10 𒁹 en 1 𒌋 supplémentaire



regroupement des 7 𒌋 en 𒁹 𒌋, cela porte à 13 le nombres de caractères 𒁹 à gauche, ce qui s'écrit 𒌋𒐈

Conclusions « mathématiques »

- Plusieurs ambiguïtés dans la numération:

1. Les « positions », elles finissent où?

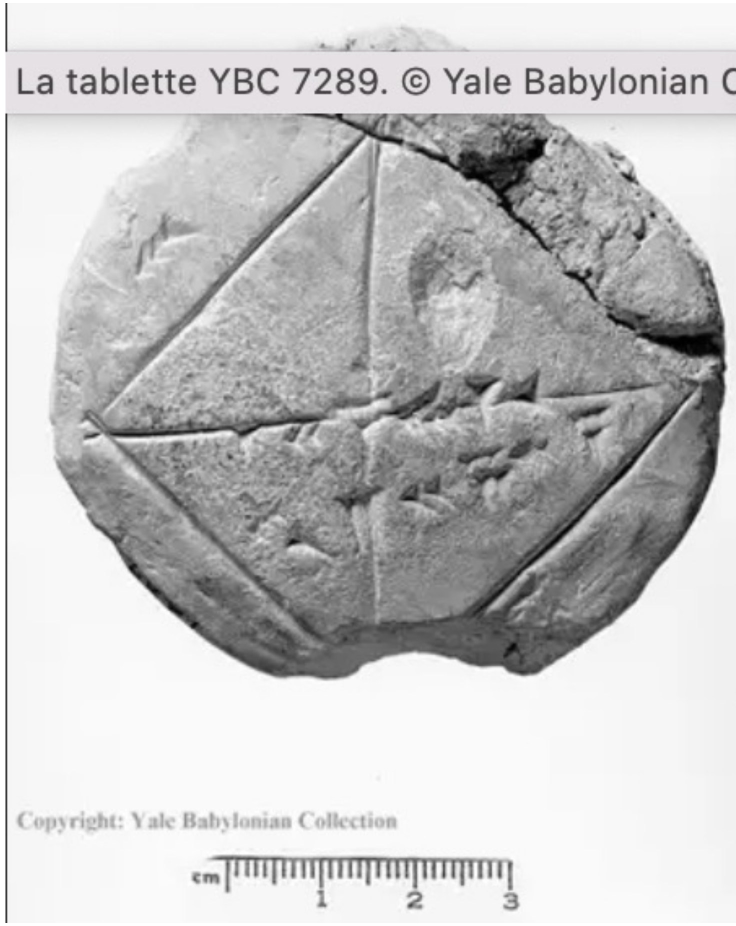
2. L'absence du « 0 » donne lieu à d'autres difficultés!

3. Les fractions existent. Mais comment les distinguer?

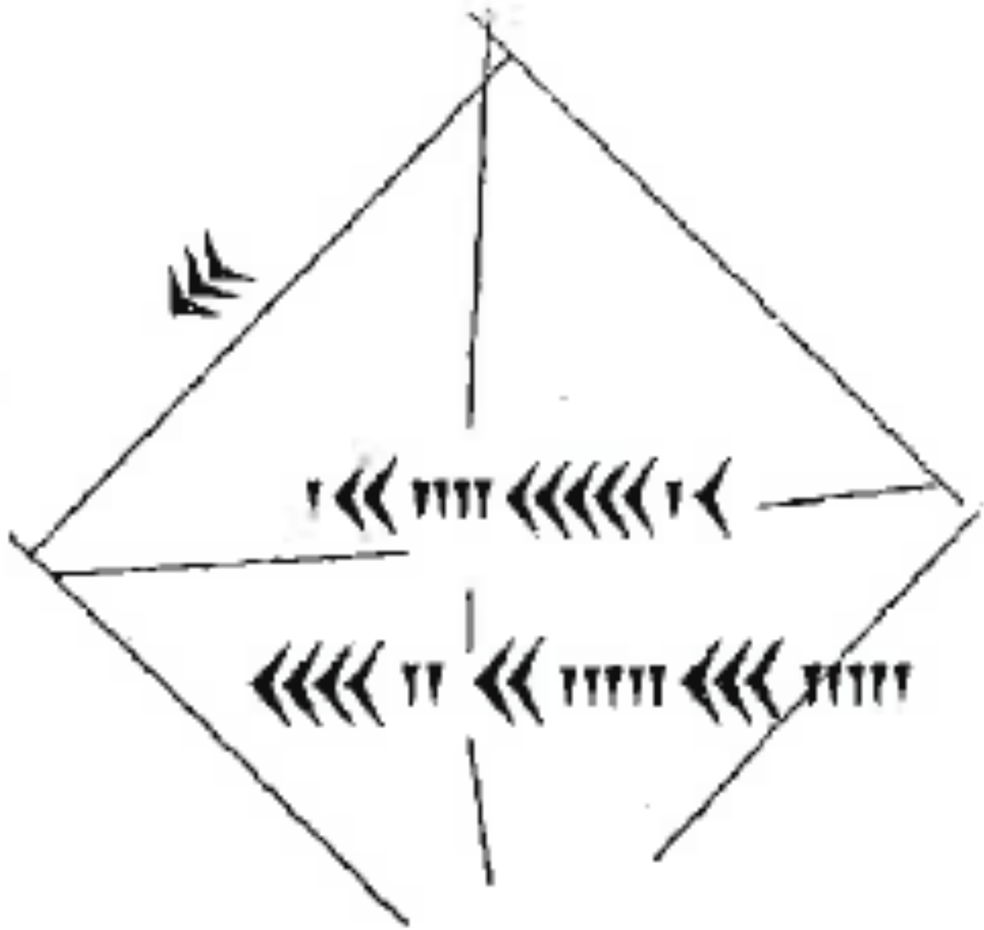
- Par exemple, quand il s'agit de 30 ou de 30/60?

- Les division?

- Elles sont des multiplications particulières… il faut les réciproques.
- Il y avait de tables des inverses. Des exemples.

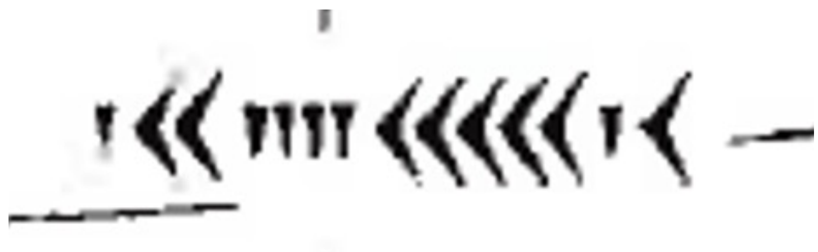


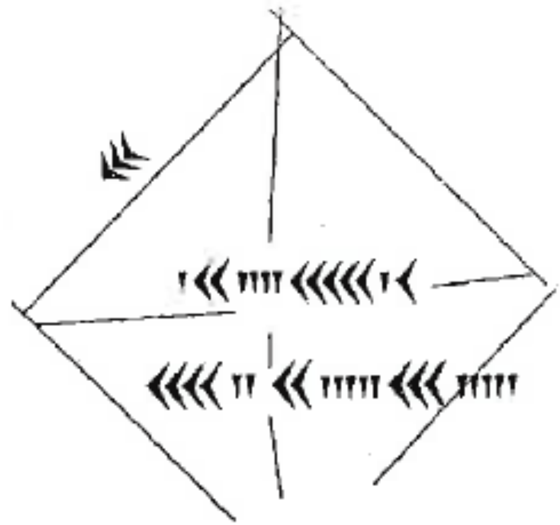
La tablette YBC 7289. © Yale Babylonian Collection



2. La représentation 42 25 35 peut en effet s'interpréter comme $42 + 25/60 + 35/60^2$ soit 42,42638888...

3. La représentation 1 24 51 10 peut en effet s'interpréter $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$ soit 31 547/21 600.

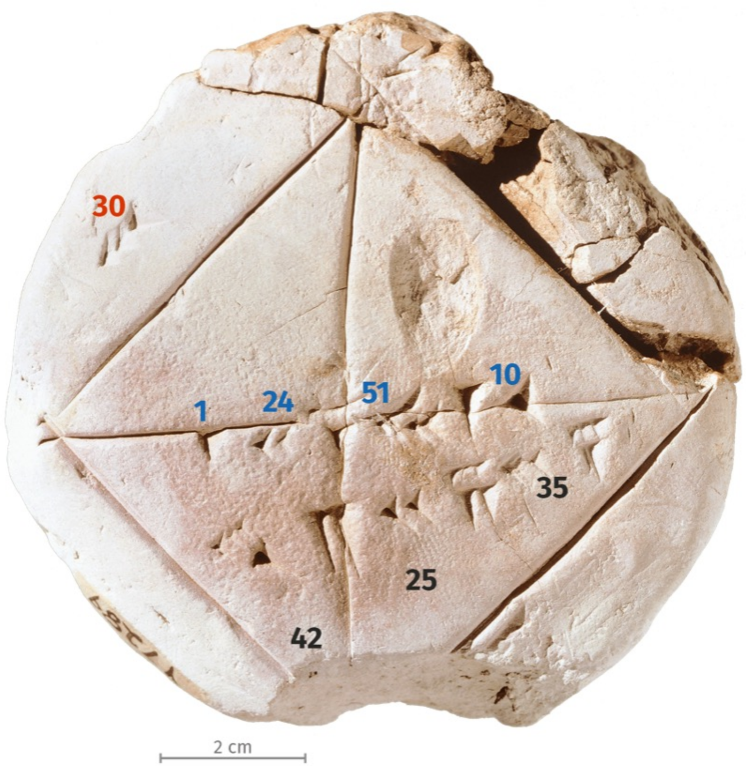




L'énoncé auquel la tablette donne la réponse pouvait être le suivant : « *Un carré de côté* 30 *étant donné, déterminer la longueur de ses diagonales.* » L'élève a fait un dessin sur lequel il a reporté l'unique donnée du problème, l'a multipliée par 1,4142129... pour obtenir 42,426389..., la réponse à l'exercice.

Histoire des nombres et racine carrée

L'histoire des nombres remonte à la Préhistoire. L'opération de compter est un processus symbolique qui caractérise l'espèce humaine mais dont l'origine est difficile à dater. Des dénombrements par entailles (os d'Ishango, Congo, 18 000 av. J.-C.) précèdent les premières traces d'écriture. La transcription des numérations écrites marque le passage à l'Histoire. Depuis plus de 5 000 ans, l'Homme ne cesse d'améliorer les systèmes utilisés, pour faciliter les calculs, mais aussi, et surtout, en découvrant de nouveaux outils mathématiques et de nouveaux nombres.
La **tablette YBC 7289** est une des plus anciennes traces de la pensée scientifique de l'être humain et la première apparition du nombre $\sqrt{2}$. Elle représente également un lien entre la géométrie et les longueurs. Les nombres qui y sont gravés sont en écriture cunéiforme.
Elle a été écrite entre –1900 et –1600 en Mésopotamie et est conservée à l'université de Yale, aux États-Unis.



Tablette YBC 7289 et sa traduction en numération actuelle.

https://www.lelivrescolaire.fr/page/6870830

HISTORIQUE

Tablette Babylonienne

XVIe av. J.-C. ≈ –1700

On y trouve un carré donnant les mesures du côté et de la diagonale et, aussi, le rapport des 2 valeurs en sexagésimal:

1, 24; 51; 10

soit

1, 41421 296

pour la valeur

1, 41421 35...

Pas mal ! Et, en tout cas, pas un hasard.

Les Babyloniens connaissaient **√2.**

Et un algorithme pour le calculer

Voir Théorème de Pythagore
Voir Tablettes babyloniennes

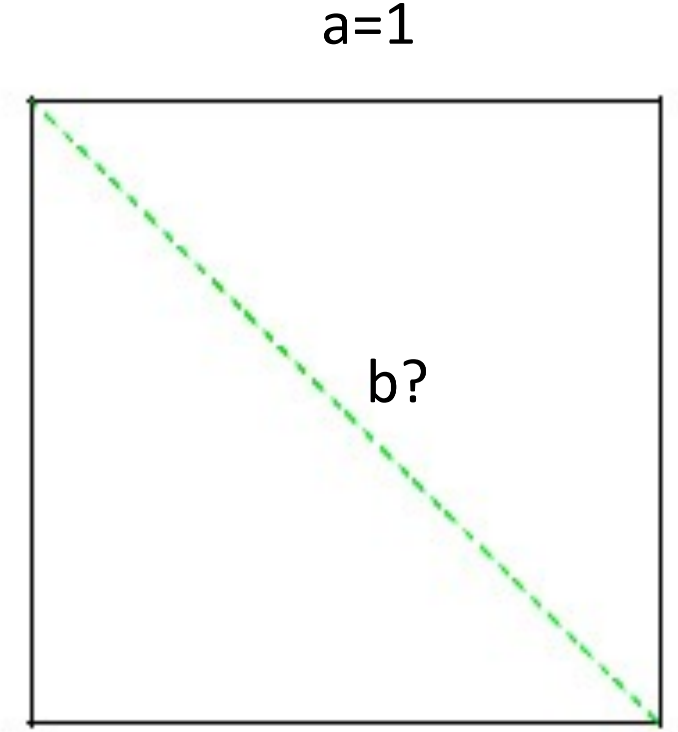
http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Nombre/Rac2Hist.htm

Pythagore, les nombres et l'incommensurabilité (vers 580-495 av. notre ère)

L’incommensurabilité

- Grandeurs commensurables et incommensurables. Exemples.
- Il ne parlent pas de *nombres irrationnels* mais de « grandeurs incommensurables ».
- Les pythagoriciens connaissaient l’énoncé du « théorème de Pythagore ».
- Si on considère le côté d’un carré et sa diagonale?

Le carré et sa diagonale



Preuve de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$

Preuve moderne

Preuve que $\sqrt{2}$ n'est pas entier:

On a: $1<2<4 \Rightarrow 1<\sqrt{2}<2$ (car la fonction racine carrée est croissante)

$\sqrt{2}$ est donc compris strictement entre deux entiers consécutifs; $\sqrt{2}$ n'est pas un entier.

Preuve de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$:

Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel positif.

Il existe alors un couple d'entier naturel (p;q) tel que $\frac{p}{q}=\sqrt{2}$.

On pose a et b tel que $PGCD(p;q)\times a=p$ et $PGCD(p;q)\times b=q$.

a et b sont alors premiers entre eux et de plus :

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}\Rightarrow\sqrt{2}=\frac{PGCD(p;q)\times a}{PGCD(p;q)\times b}\Rightarrow\sqrt{2}=\frac{a}{b}$$

En passant au carré on a: $\sqrt{2}=\frac{a}{b}\Rightarrow 2=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow 2b^2=a^2$

a et b sont des entiers premiers entre eux donc a^2 et b^2 sont aussi des entiers premiers entre eux.

Comme a^2 et b^2 sont entiers, on remarque que a^2 est divisible par b^2.

Or a^2 et b^2 sont aussi premiers entre eux donc $b^2=1$ ce qui implique que b=1 car b est un entier naturel

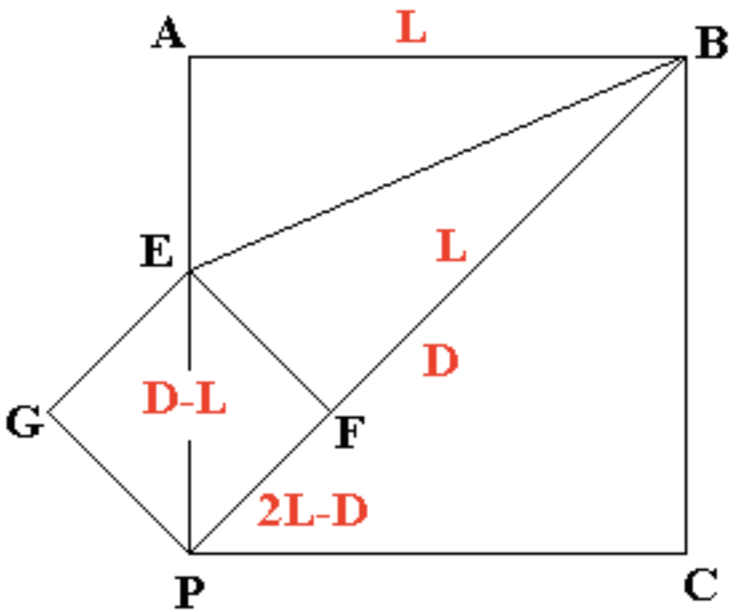
On trouve donc que $\sqrt{2}=a$ ce qui est absurde puisque $\sqrt{2}$ n'est pas un entier contrairement à a.

$\sqrt{2}$ n'est donc pas rationnel, il est irrationnel. ❑

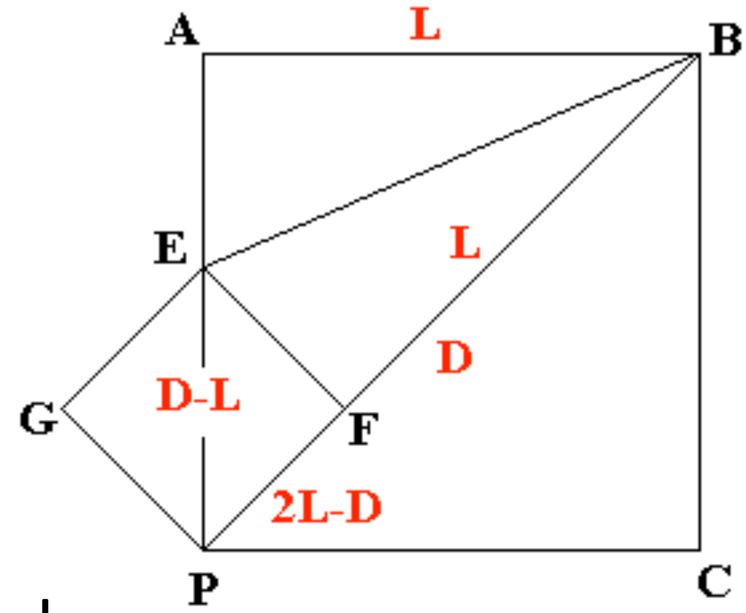
Une preuve géométrique ?

https://php.math.unifi.it/archimede/archimede/pitagora/exh_pitagora/schede.php?id=7

Si L et D sont commensurables,
alors D-L et 2L-D
sont commensurables
Par l'absurde:
L et D sont commensurable, donc
il existe H sous-multiple
commun. BE bissectrice de ABP.
EF perpendiculaire à BP.
Alors ABE=BEF.



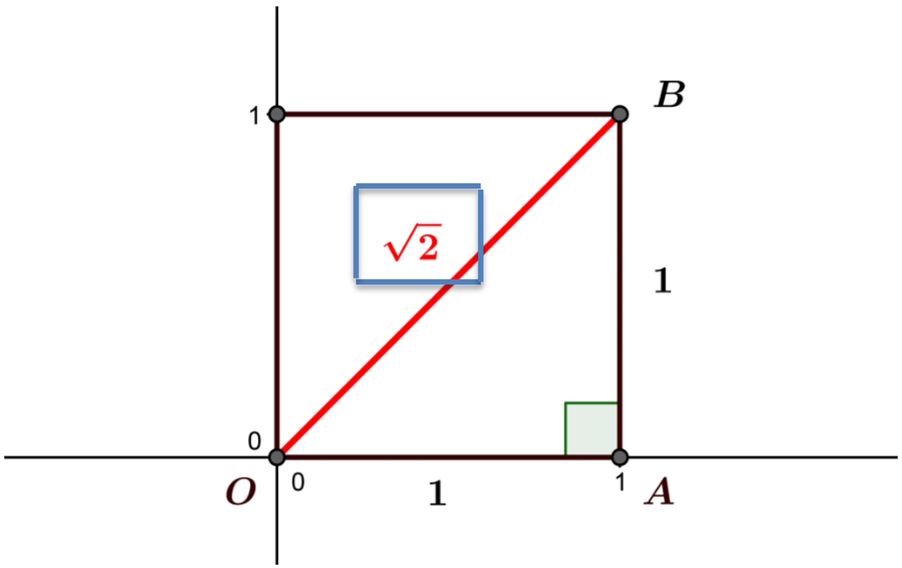
Donc BF=AB=L et PF=D-L.
PEF est triangle isocèle (l’angle EPF=45°) et donc on a AE=EF=FP=D-L et EP=L-(D-L)= =2L-D



On construit le carré EFPG.
Puisque L et D ont un sous-multiple commun, alors PF=D-L et sa diagonale EP=2L-D ont le même sous-multiple H.
Si on continue de la même manière on obtient des carrés de plus en plus petits, mais tous avec le côté et la diagonale multiples de H. Il est absurde, car il y aura un moment où ils deviendront plus petits que H.

L'irrationalité de √2 : une tragédie pythagoricienne

Les tragédies grecques existaient aussi chez les mathématiciens de l'Antiquité. La découverte de la racine carrée du nombre 2 est le sujet de l'une d'entre elles, qui a trouvé une fin heureuse à l'époque moderne.



- https://reglecompas.fr/irrationalite-sqrt-2#Un_disciple_de_Pythagore_mesure_la_diagonale_du_carre

Un disciple de Pythagore « mesure » la diagonale du carré

La philosophie de **l'école pythagoricienne** voyait dans le nombre rationnel l'expression de l'harmonie de la nature et du cosmos, sur le modèle des rapports numériques simples qui exprimaient les **intervalles fondamentaux** en musique, découverts par Pythagore à partir des rapports de longueur du monocorde. Le mathématicien Hippase de Métaponte, disciple de l'école pythagoricienne, étudiait la « **commensurabilité** » (co-mesurabilité) des grandeurs géométriques. Il fut peut-être le premier à étudier la longueur de la **diagonale d'un carré**, en prenant le carré le plus simple, de côté 1.

Il établit que cette diagonale était **incommensurable aux cathètes** (côtés adjacents à l'angle droit, c'est-à-dire autres que l'hypoténuse dans un triangle rectangle) du **demi-carré**. Cela signifie qu'il n'existe aucune unité de mesure commune qui permette d'exprimer les longueurs des cathètes et la longueur de la diagonale comme multiples entiers de cette unité. En effet, par le théorème de Pythagore, dans le cas du carré de côté 1 l'aire du carré construit sur la diagonale est la somme des aires des carrés construits sur chaque côté, c'est-à-dire 2. La **longueur de la diagonale** doit donc être un nombre dont le carré vaut 2, et cette longueur ne peut donc **pas être un nombre rationnel**, ce qu'on savait déjà démontrer dans l'Antiquité.

Conclusion

La découverte de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, ou de l'incommensurabilité de la diagonale du carré, a été une tragédie pour la philosophie pythagoricienne. Pourtant, cette découverte a engendré des siècles d'interrogation mathématique, pour aboutir à l'une des créations les plus emblématiques de la science, les nombres réels. Et ces nombres permettent de mesurer toutes les grandeurs réelles, et de **sauvegarder l'essentiel de la philosophie pythagoricienne** : tous les rapports de grandeurs, même des courbes aux lignes droites, peuvent être représentés par des nombres !

Femmes et maths
Une approche historique

Sophie Germain (1776-1831)

- Née à Paris, d'une famille bourgeoise issue de plusieurs générations de commerçants.
- Sa formation: « Brillante autodidacte »
- Ses sources principales: Cours de Lagrange sur l’analyse donné à l’Ecole polytechnique, L’Exposition du système du Monde de Laplace, la Théorie des nombres de Legendre
- Elle est en correspondance avec Lagrange et Gauss
- Contribution à la théorie des nombres
- A partir de 1809 elle change d’orientation et s’intéresse à la théorie des surfaces (principalement à leur courbure) et au problème de vibration des surfaces élastiques.
- En 1816, elle est la première femme à remporter un prix de l'Académie sur des questions de théorie des surfaces

Sophie Germain ou M. Le Blanc

- Correspondance avec Gauss à partir de novembre 1804 sur la théorie des nombres
- Fin 1806 Gauss est à Brunswick, la ville occupé par Napoléon. Mlle Germain envoie le général Pernety, un ami de sa famille, pour aider Gauss en cas de besoin.
- https://images.math.cnrs.fr/Du-cote-des-lettres-2-une-lettre-de-Sophie-Germain-a-Carl-Friedrich-Gauss-20.html

Lettre de S. Germain à Gauss, 20 février 1807

En me rendant compte de l'honorable mission dont je l'avais chargé, M. Pernetty m'a mandé qu'il vous avait fait connaître mon nom : cette circonstance me détermine à vous avouer que je ne vous suis pas aussi parfaitement inconnue que vous le croyez ; mais que, craignant le ridicule attaché au titre de femme savante, j'ai autrefois emprunté le nom de M. Le Blanc pour vous écrire et vous communiquer des notes qui, sans doute, ne méritaient pas l'indulgence avec laquelle vous avez bien voulu y répondre.

La reconnaissance que je vous dois pour l'encouragement que vous m'avez accordé, en me témoignant que vous me comptiez au nombre des amateurs de l'arithmétique sublime dont vous avez développé les mystères, était pour moi un motif particulier de m'informer de vos nouvelles dans un moment où les troubles de la guerre pouvaient inspirer quelques craintes, et j'ai appris avec une véritable satisfaction que vous êtes resté dans vos foyers aussi tranquille que les circonstances le permettaient. Je crains cependant que les suites de ces grands événements ne nous privent encore longtemps des ouvrages que vous préparez sur l'astronomie et, surtout, de la continuation de vos recherches arithmétiques ; car cette partie de la science a pour moi un attrait particulier et j'admire toujours avec un nouveau plaisir l'enchaînement des vérités exposées dans votre livre ; malheureusement, la faculté de penser avec force est un attribut réservé à un petit nombre d'esprits privilégiés, et je suis bien sûre de ne rencontrer aucun des développements qui, pour vous, semblent une suite inévitable de ce que vous avez fait connaître.

Je joins à ma lettre une note destinée à vous témoigner que j'ai conservé pour l'analyse le goût qu'a développé en moi la lecture de votre ouvrage, et qui m'a autrefois inspiré la confiance de vous adresser mes faibles essais, sans autre recommandation auprès de vous que la bienveillance accordée par les savants aux admirateurs de leurs travaux.

J'espère que la singularité, dont je fais aujourd'hui l'aveu, ne me privera pas de l'honneur que vous m'avez accordé sous un nom emprunté, et que vous ne dédaignerez pas de consacrer quelques instants à me donner directement de vos nouvelles ; croyez, Monsieur, à l'intérêt que j'y attache et recevez l'assurance et la sincère admiration avec laquelle j'ai l'honneur d'être,

Votre très humble servante,

Sophie GERMAIN.

Gauss à Sophie Germain, 30 avril 1807

Votre lettre du 20 février, mais qui ne m'est parvenue que le 12 mars, a été pour moi la source d'autant de plaisir que de surprise. Combien l'acquisition d'une amitié aussi flateuse et précieuse est-elle douce à mon cœur ! L'intérêt vif que vous avez pris à mon sort pendant cette guerre funeste, mérite la plus sincère reconnaissance. Assurément, votre lettre au général Pernety m'eût été fort utile, si j'avais été dans le cas d'avoir recours à une protection spécielle de la part du gouvernement françois. Heureusement les evenements et les suites de la guerre ne m'ont pas touché de trop près jusqu'ici, bien que je sois persuadé qu'elles auront une grande influence sur le plan futur de ma vie. Mais comment vous décrire mon admiration et mon étonnement, en voïant se metamorphoser mon correspondant estimé M. Leblanc en cette illustre personnage, qui donne un exemple aussi brillant de ce que j'aurois peine de croire. Le goût pour les sciences abstraites en général et surtout pour les mysteres des nombres est fort rare : on ne s'en étonne pas ; les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se decelent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir. Mais lorsqu'une personne de ce sexe, qui, par nos mœurs et par nos préjugés, doit rencontrer infiniment plus d'obstacles et de difficultés, que les hommes, à se familiariser avec ses recherches epinenses, sait neansmoins franchir ces entraves et penétrer ce qu'elles ont de plus caché, il faut sans doute, qu'elle ait le plus noble courage, des talens tout à fait extraordinaires, le génie supérieur. En effet rien ne pourroit me prouver d'une manière plus flatteuse et moins équivoque, que les attraits de cette science, qui ont embelli ma vie de tant de jouissances, ne sont pas chimériques, que la predilection, dont vous l'avez honorée.

Maria Gaetana Agnesi (1718-1799)

- Enfant prodige, d'origine bourgeoises, autodidacte avec une bonne bibliothèque et des bons précepteurs
- Discours sur le droit de femme à être éduquées dans les sciences et les arts, 1729, Padoue
- Encouragée par son père, elle rédige le livre *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana,* Milan, 1748
- Ecriture très claire, rigueur mathématiques, exercices bien choisis, exemples appropriés, pour un public de mathématiciens non spécialiste, indications d'autres ouvrages pour approfondissements (Euler etc.)
- Le livre d'Agnesi fut traduit en français et en anglais

G. Loria, Donne matematiche, 1936, p. 453

« Mais à l'heure où les louanges et les encouragements auraient dû la stimuler sur la voie qu'elle avait elle-même tracée, c'est avec une surprise douloureuse qu'on la voit mettre de côté ses chères études et consacrer tout son temps et son activité à des pratiques religieuses et à des œuvres de charité… »

Loria accuse Agnesi, qui, après la mort de son père, a changé de vie en se consacrant à la religion.

Mais il ne fait pas le même reproche à Blaise Pascal, par exemple, qui avait fait des choix similaires pendant des périodes de sa vie.

Le biais historiographique (R.Tobies)

R. Tobies, « Femmes et mathématiques dans le monde occidental, un panorama historiographique », Gazette des mathématiciens, t. 90, p. 26–35, 2001.

- Littérature spécifique sur les femmes et les mathématiques (Dans « Reader's Guide to the History of Science », Hessenbruch, 2000 il n'y a aucune référence spécifique sur «femmes et mathématiques »)
- Dans plusieurs biographies de « femmes et science » (travaux pionniers avant 1970) seulement Hypathie et S. Kowalevskaya apparaissent.
- Sur les femmes mathématiciennes les plus connues du XVIIIe (Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), Gabrielle-Emilie du Châtelet (1706-1749) et Sophie Germain (1776-1831)) il existe la thèse de Ulrike Klens (1994) et quelques articles.
- Sur S. Kowalevskaya: 2 biographies déjà au XIXe.
- Plusieurs femmes qui ont fait leur doctorat au XIXe mais qui n'ont pas eu aucune carrière universitaire.
- Dans la première partie du XXe siècle: Emmy Noether (1882-1935), Hilda Geiringer (1893-1973).

Comment repérer les femmes ?

J. Boucard, I. Lémonon. Quelques notes autour d'un atelier sur les femmes en mathématiques. *Gazette des Mathématiciens*, 2018, 58, pp.57-66.

- La visibilité des femmes: journaux ou livres, académies savantes, carrières universitaires, …
- Changer de prisme: des membres d'académies de province (Mme Picardet, Académie des sciences de Dijon); des articles co-signés; les correspondances; les remerciements publiques…
- En anonymat, plus souvent dans les sphères domestiques ou privées; « couple en mathématiques » (femmes, filles, sœurs…)

- Il faut rappeler que:
- 1. Seulement au XIXe siècle les femmes peuvent intégrer certaines institutions d’enseignement supérieur;
- 2. Des empêchements pour poursuivre une carrière même avec le doctorat : dans les universités allemandes et tchèques de Prague entre 1900 et 1945 aucune des 11 étudiantes avec un doctorat a trouvé un poste dans le supérieur.
- 3. Le contexte familial est toujours fondamental surtout avant le XXe

- 4. Les femmes mathématiciennes dans les récits biographiques: monstruosité et masculinité; contraire aux images de « mère et épouse »
- 5. L'importance d'un homme à côté: La couple Woytinski publie nombreux ouvrages de statistique, dont la plupart sous le nom de Wladimir (1885-1960) seul, mais dédicacée à sa femme, collaboratrice et « camarade ». Emma (1893-1968) est en réalité celle qui possède un diplôme universitaire; Wladimir n'a aucun diplôme. Grace Crisholm (1868-1944) et William Henry Young (1863-1942) enrichie la représentation de l'épouse assistante, mais en réalité c'est elle qui écrit les article. Et il y a d'autres exemples.