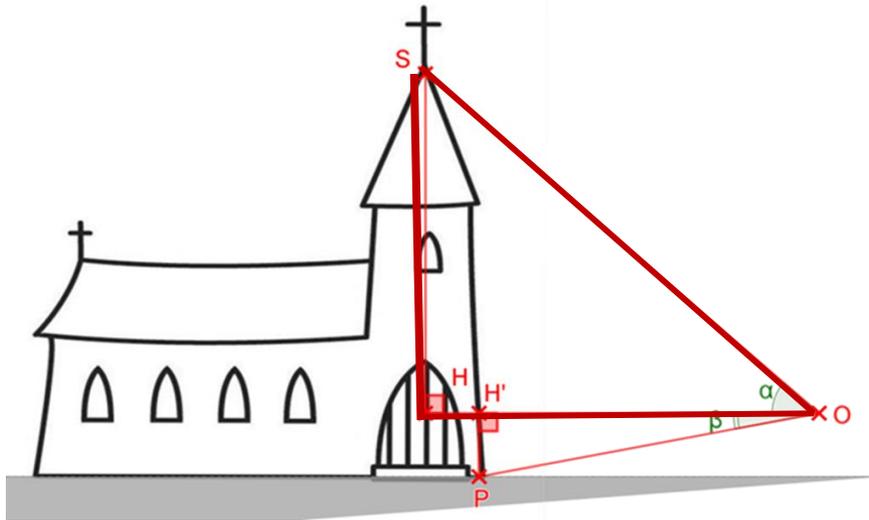


# La mesure des hauteurs

Mais où sont donc passées les lignes  
trigonométriques ?

# la trigo en classe de 4<sup>ème</sup> : hauteur d'un édifice



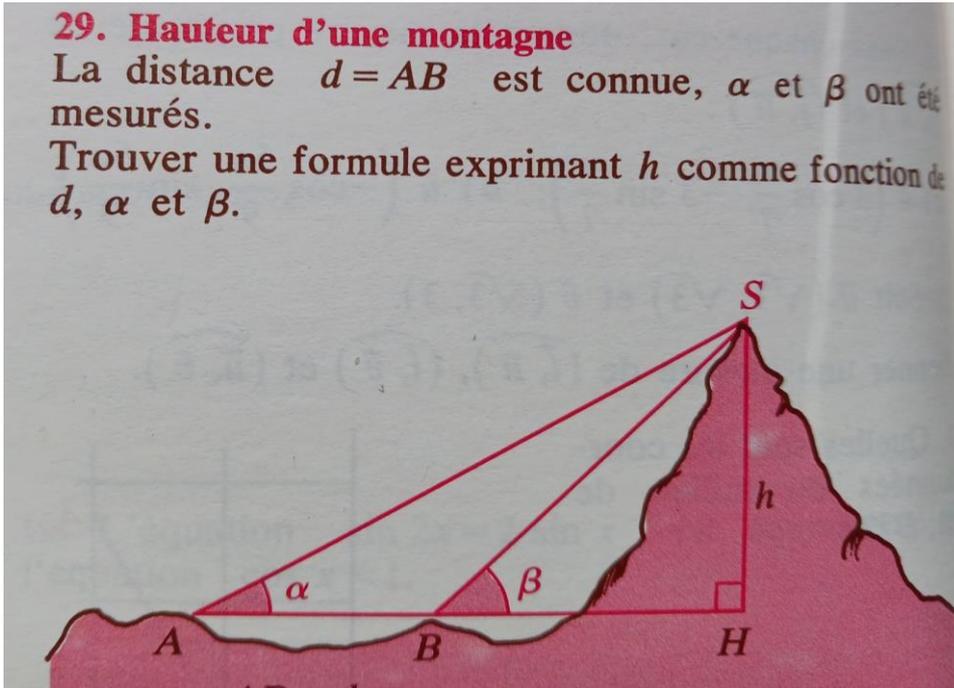
$$SH = SO \sin \alpha = \frac{OH}{\cos \alpha} \sin \alpha$$

# Hauteur dont la base est inaccessible : méthode de double station

## 29. Hauteur d'une montagne

La distance  $d = AB$  est connue,  $\alpha$  et  $\beta$  ont été mesurés.

Trouver une formule exprimant  $h$  comme fonction de  $d$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .



Terracher 1<sup>ère</sup> S et E, 1988, chap. 5,  
trigonométrie et relations métriques  
dans le triangle, p. 206

$$AH = SH \cotan\alpha$$

$$BH = SH \cotan\beta$$

$$AB = AH - BH$$

$$= SH \cotan\beta - SH \cotan\alpha$$

$$SH = AB \frac{1}{\cotan\beta - \cotan\alpha}$$

$$h = d \frac{\tan\alpha \times \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}$$

# Questions

- Quand ces pratiques de mesurage sont-elles apparues ?
- Dans quelles aires géographiques et culturelles ?
- Avec quels moyens techniques ?
- Quel rôle ont joué les angles et les lignes trigonométriques (les tangentes) ?
- Les méthodes utilisées relèvent-elles de « mathématiques pour tous » ?

# Première exploration des sources « occidentales »

- Euclide (300 ans avant J-C)
- Héron d'Alexandrie (1<sup>er</sup> siècle après J-C)
- Les recueils dits « œuvres mathématiques de Gerbert » (pape Sylvestre II, ~ 950 - 1003)

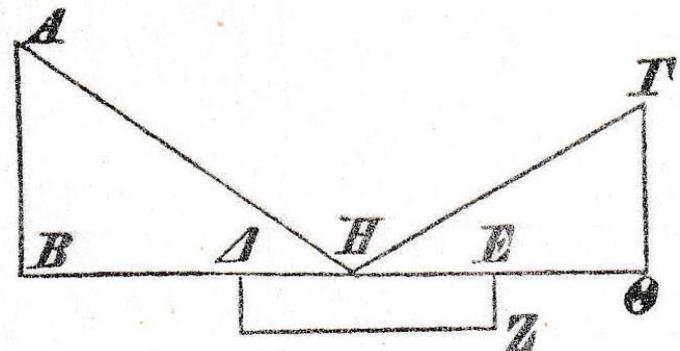
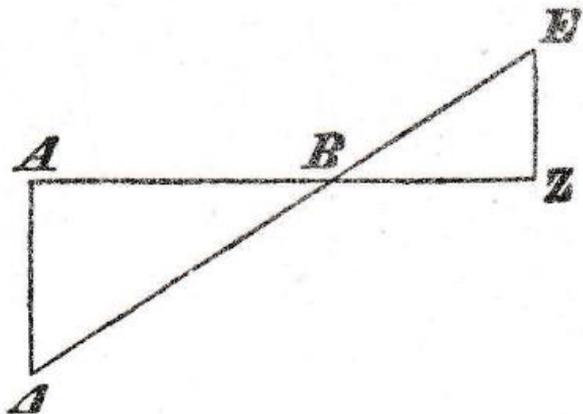
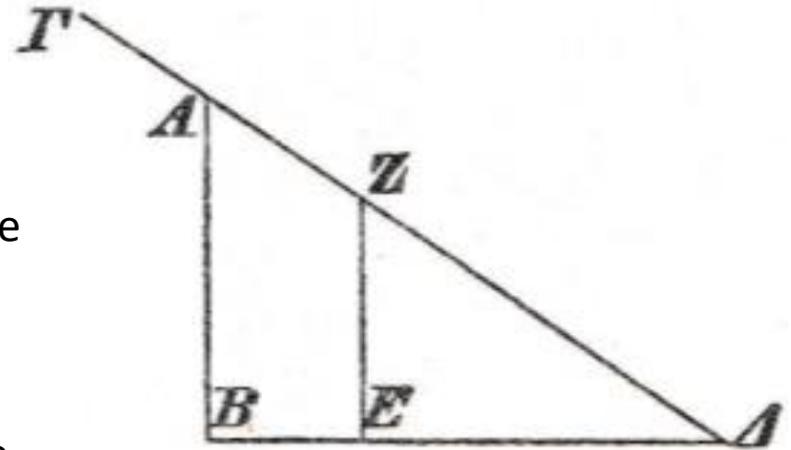
# *l'Optique* d'Euclide :

la théorie d'une géométrie pratique (300 ans av. J.-C.)

Prop. XVIII : le soleil étant apparent, reconnaître de quelle grandeur est une hauteur donnée

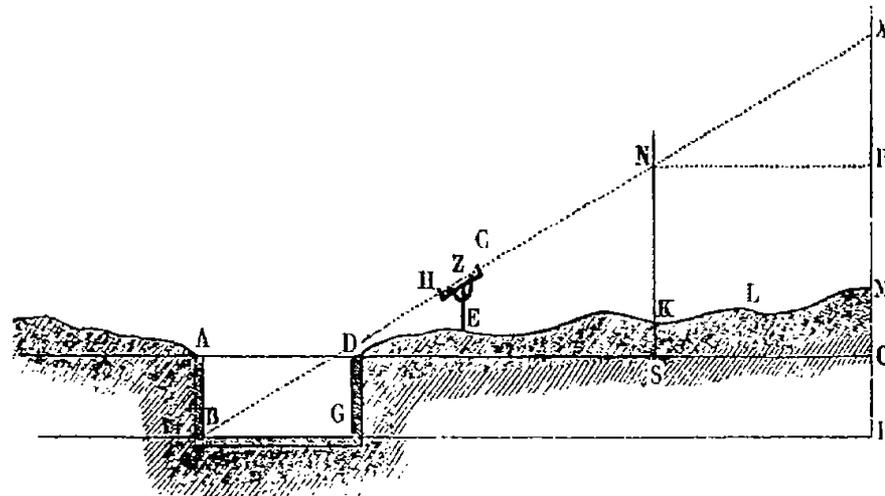
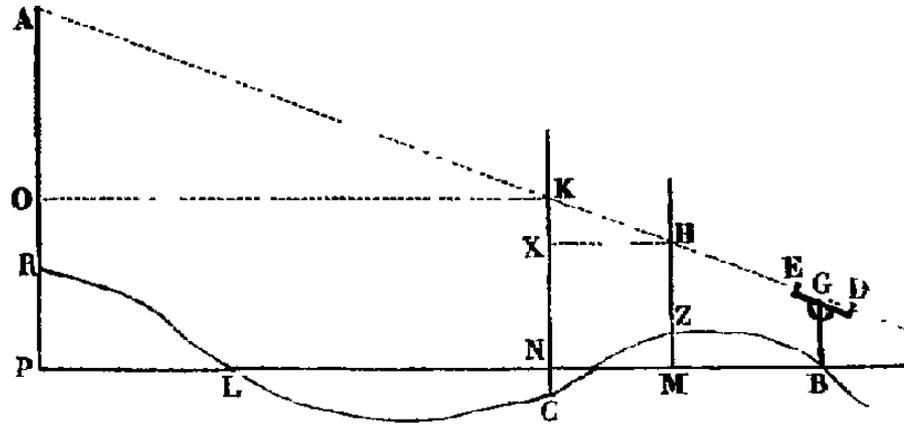
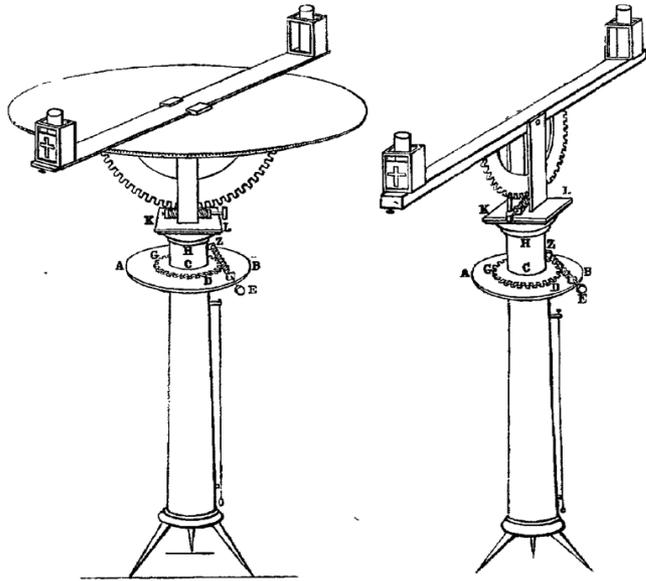
Prop. XIX : reconnaître de quelle grandeur est une hauteur donnée lorsque le soleil ne se présente pas

Prop. XX : reconnaître de quelle grandeur est une profondeur donnée



# Héron d'Alexandrie (1<sup>er</sup> siècle ap. J.-C.)

*La Dioptré* : une géométrie (vraiment) pratique



# Aux sources des traités de géométrie pratique dans la tradition latine du Moyen Age et de la Renaissance :

Gerbert ~ 945 – 1003 : le Pape de l'an mil

- séjour en Catalogne, au monastère de Ripoll (importante activité de copistes)
- dirige le collège épiscopal de Reims
- abbé de Bobbio en Italie (riche bibliothèque)
- retour à Reims
- élu Pape (999)



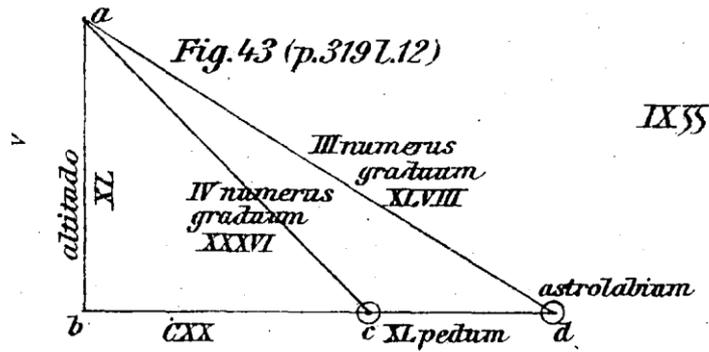
Des manuscrits datant des X<sup>e</sup>-XI<sup>e</sup> siècles et édités en 1899 sous le titre

*Geometria Incertis Auctoris*

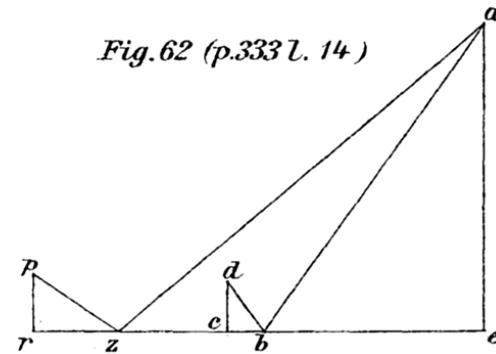
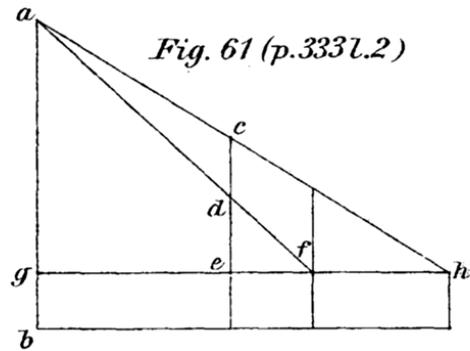
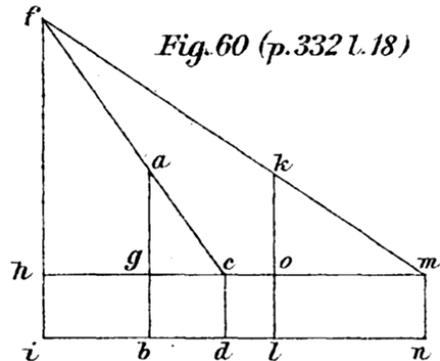
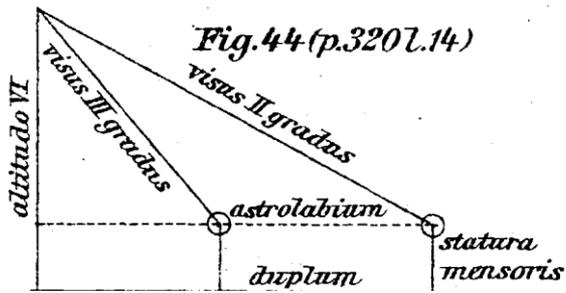
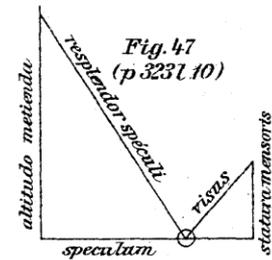
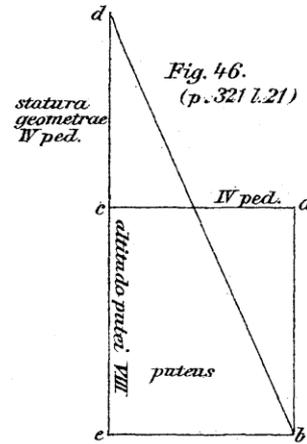
dans le recueil

*Gerberti Opera Mathematica*

# Geometria Incertis Auctoris : La double station



IX 55



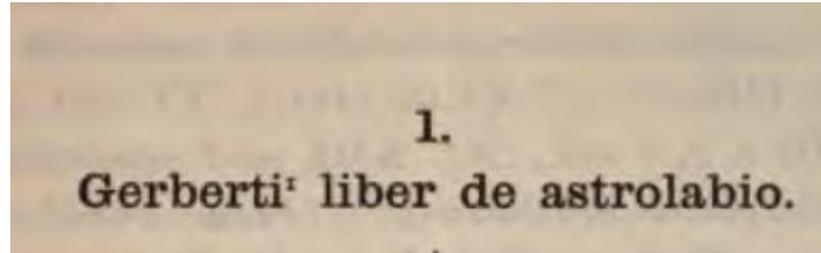
# Geometria Incerti Auctoris

- Un ensemble hétérogène, problèmes d'arpentage véritable ou problèmes scolaires ?
- Les manuscrits les plus anciens sont du XI<sup>e</sup> siècle. Mais les textes se présentent comme des réarrangements, ils doivent être basés sur une version antérieure, précédant peut-être un peu la période de Gerbert [K. Vogel, p. 5]

- Dans le livre III : 26 problèmes d'altimétrie
  - Utilisation de miroirs (cf. *l'optique* d'Euclide)
  - Méthode de double station
  - Utilisation de l'astrolabe (avec carré des ombres, innovation probablement due aux arabes )
  - Présence du mot alidade, d'origine arabe

Pas de méthodes équivalentes dans les textes latins antérieurs

# astrolabe



- invention par Hipparque (astronome grec du 2<sup>ème</sup> siècle avant J.C.) ?
- Traité le plus ancien connu aujourd'hui Jean Philopon dit Jean d'Alexandrie (V<sup>è</sup>- VI<sup>è</sup> siècle)
- Introduit en Occident par Gerbert ?



Les œuvres de Gerbert éditées  
par Bubnov (1899)

# Gerberti

postea

Silvestri II papae

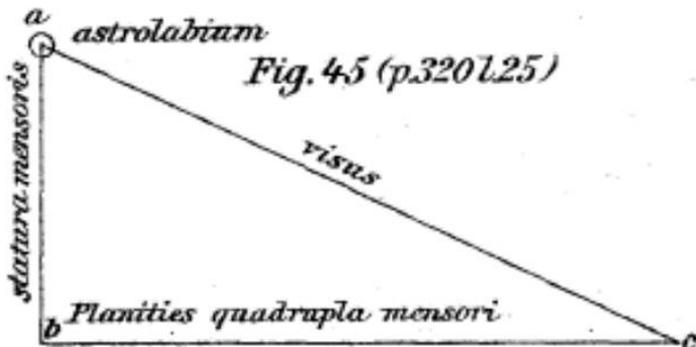
## Opera Mathematica

(972—1003)

Accedunt aliorum opera ad Gerberti  
libellos aestimandos intelligendosque necessaria per  
septem appendices distributa.

Collegit, ad fidem codicum manuseriptorum partim iterum,  
partim primum edidit, apparatu critico instruxit, commentario auxit,  
figuris illustravit

**Dr. Nicolaus Bubnov**  
Professor Kijoviensis.

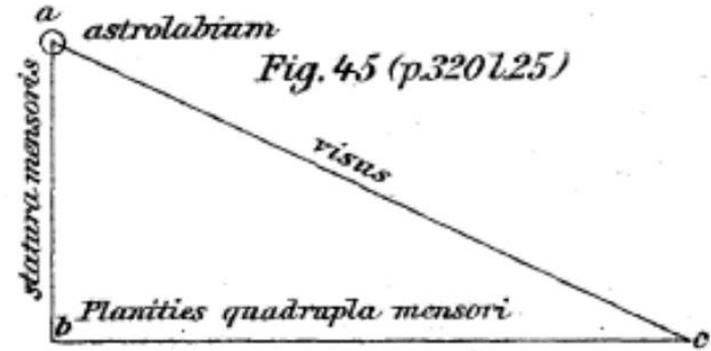
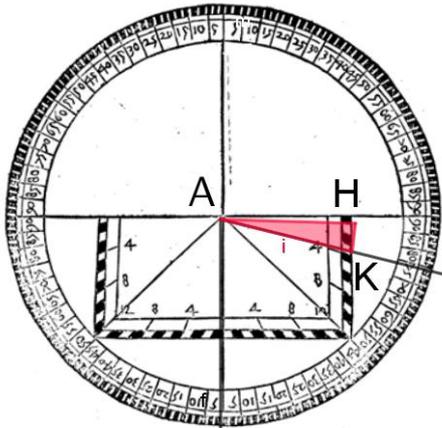


Si tu veux mesurer quelque surface plane [longueur] que ce soit avec un astrolabe, dirige ton regard à travers les deux trous de l'alidade jusqu'à ce que ton regard borne la limite de la grandeur à mesurer.

Après cela, regarde à quel quantième de carré se trouve l'alidade et compare ce nombre avec 12 qui est le nombre de degrés maximum ; le rapport de la grandeur de l'arpenteur à la surface [longueur] totale est le même que le rapport de la graduation à 12.

Par exemple : soit  $ab$  la hauteur de l'arpenteur,  $bc$  la surface plane, 3 le nombre de degrés qui, comparé à 12, donne le quart sans aucun doute. Donc  $ab$ , qui est la grandeur de l'arpenteur se trouve être le quart de la grandeur du plan, comme 3 est le quart de 12.

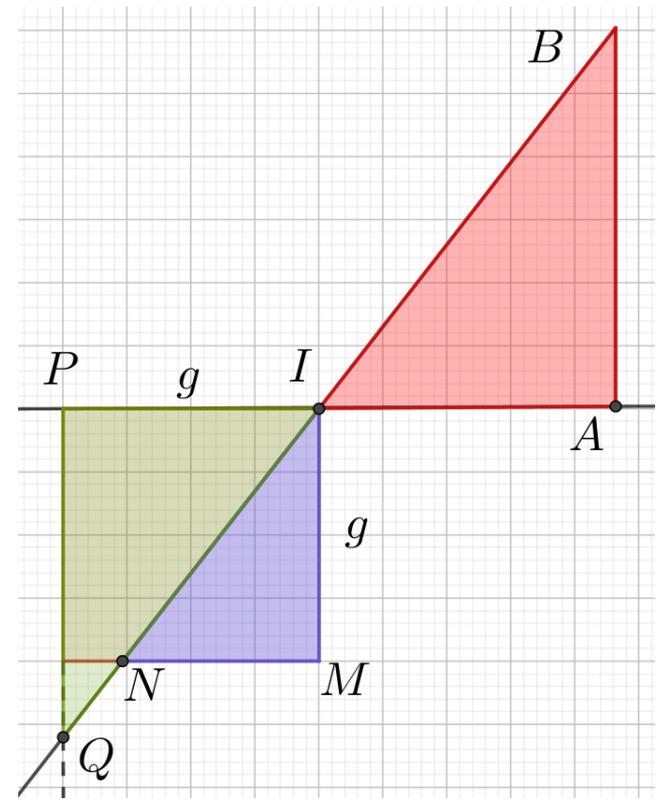
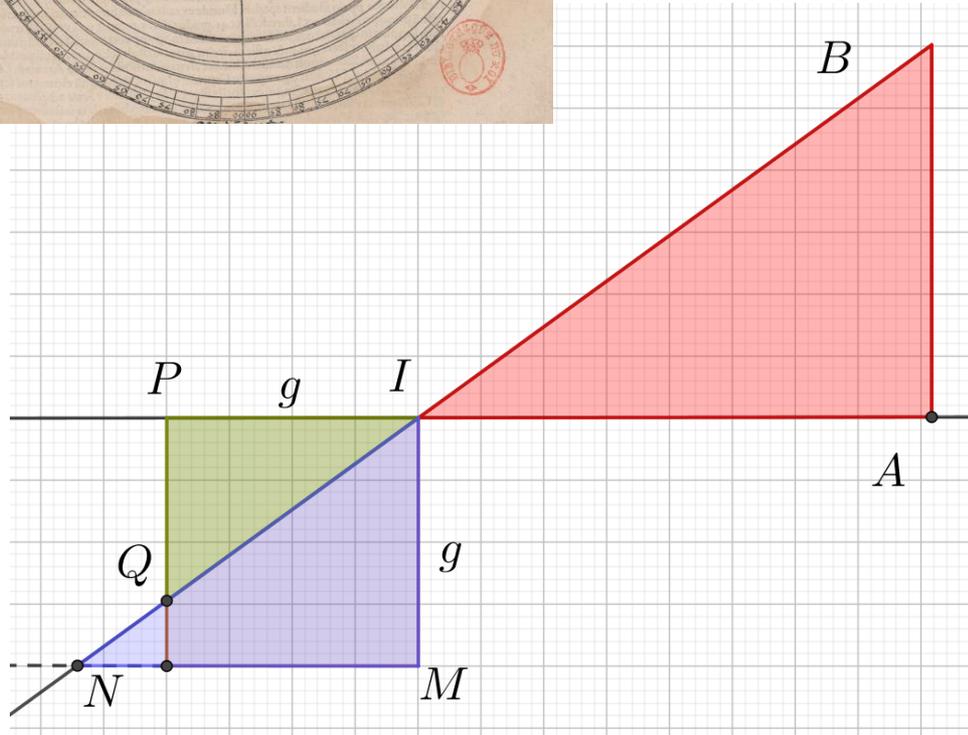
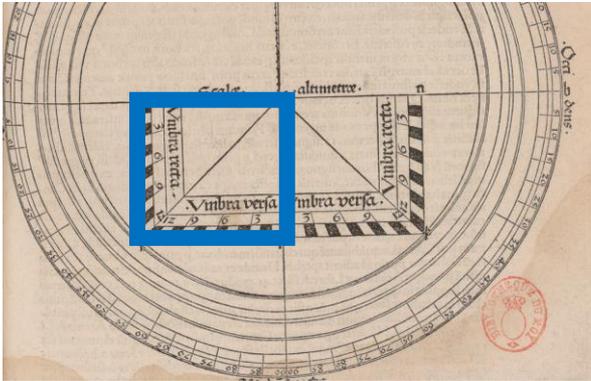
# Gerbert problème 4



B

C

# Deux cas de figures



# Parcours chronologique

à la recherche des angles et des lignes trigonométriques

- Liu Hui, « l'Euclide chinois » (III<sup>e</sup> siècle ap. JC)
- En Inde :  
Aryabatha (476–550) et Brahmagupta (598-670)
- En pays d'islam :  
As Sufi (903-986), Al Biruni (973-1050)
- Les géométries pratiques en Occident après le XI<sup>e</sup> siècle

# Sources chinoises

1. Le ***gnomon des Zhou*** (ou ***canon des calculs gnomoniques des Zhou - Zhoubi Suanjing***) (dynastie des Zhou : 1121 av JC -256 av JC)
2. ***Les neuf chapitres sur l'art mathématique*** compilés sous les Han (202 av JC – 220 ap JC)
3. ***Le classique de l'île maritime***, œuvre de Liu Hui (IIIème ap JC, nommé parfois « l'Euclide chinois » ), il se présente comme un complément au 9ème chapitre du recueil précédent.

Du latin **gnomon**, du grec ancien γνώμων, gnōmōn (« discerner, interpréter ; **gnomon** »).

# Liu Hui : *le classique de l'île maritime* (263)

9 problèmes comportant chacun : un énoncé, une réponse numérique, la méthode de calcul.

Premier problème :

Maintenant, pour regarder une île dans la mer, érige deux piquets de même hauteur, 3 shang, distants de 1000 bu, de sorte que le piquet à l'arrière soit aligné avec le piquet de devant.

Si on recule de 123 bu depuis le piquet de devant, et que l'on regarde depuis le niveau du sol jusqu'au sommet de la montagne sur l'île, celui-ci coïncide avec l'extrémité du piquet.

Si on recule de 127 bu depuis le piquet arrière, et que l'on regarde depuis le niveau du sol jusqu'au sommet de la montagne, celui-ci coïncide encore avec l'extrémité du piquet (de derrière).

La question est de trouver la hauteur de l'île et la distance qui la sépare du piquet de devant.

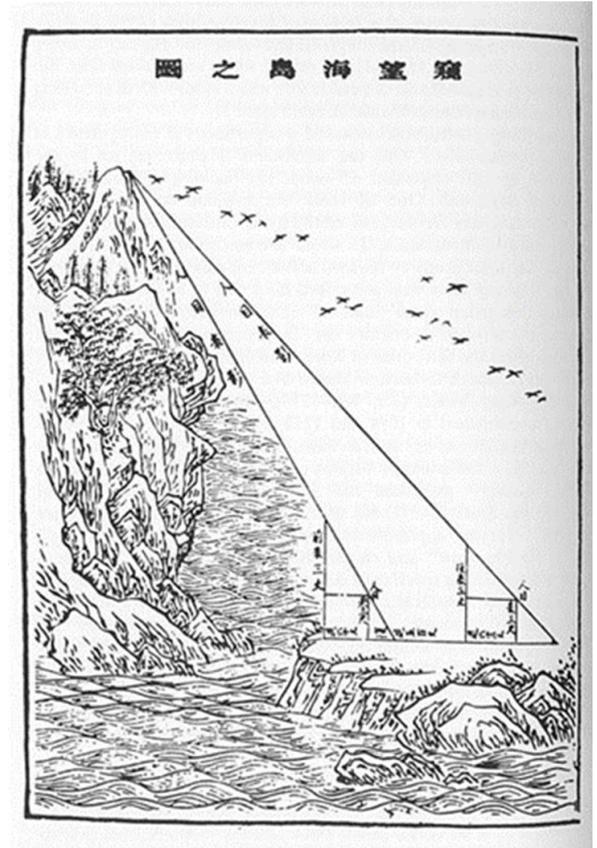


Illustration dans une édition de 1726

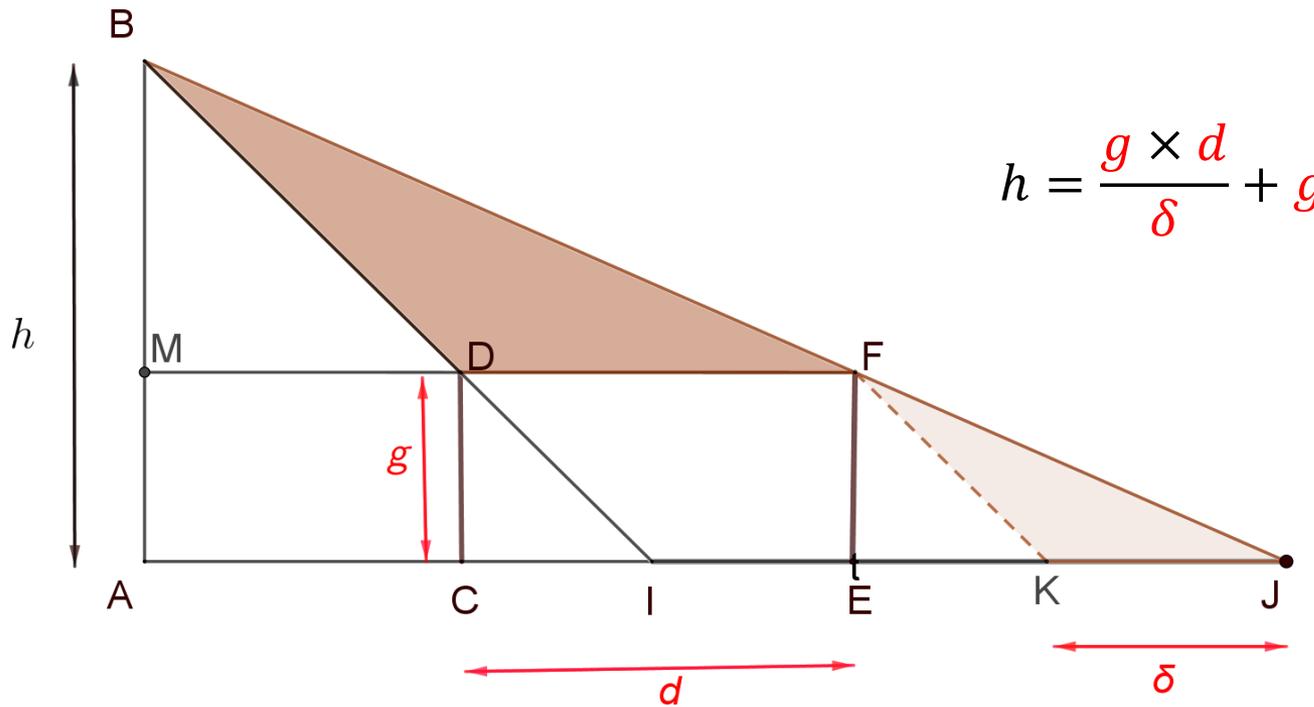
Mis en français, d'après le texte de Kurt Vogel, 2002, p. 1,

# Liu Hui : le classique de l'île maritime (263)

Démonstration hypothèse 1

(BIJ) et (FKJ) semblables

$$\frac{BM}{FE} = \frac{DF}{KJ}$$



$$h = \frac{g \times d}{\delta} + g$$

# Liu Hui : le classique de l'île maritime (263)

Démonstration hypothèse 2 (« la double différence »)

MFB et EJF semblables  $\frac{MF}{MB} = \frac{EJ}{EF}$

$$MF = MB \frac{EJ}{EF}$$

MDB et CID semblables  $\frac{MD}{MB} = \frac{CI}{CD}$

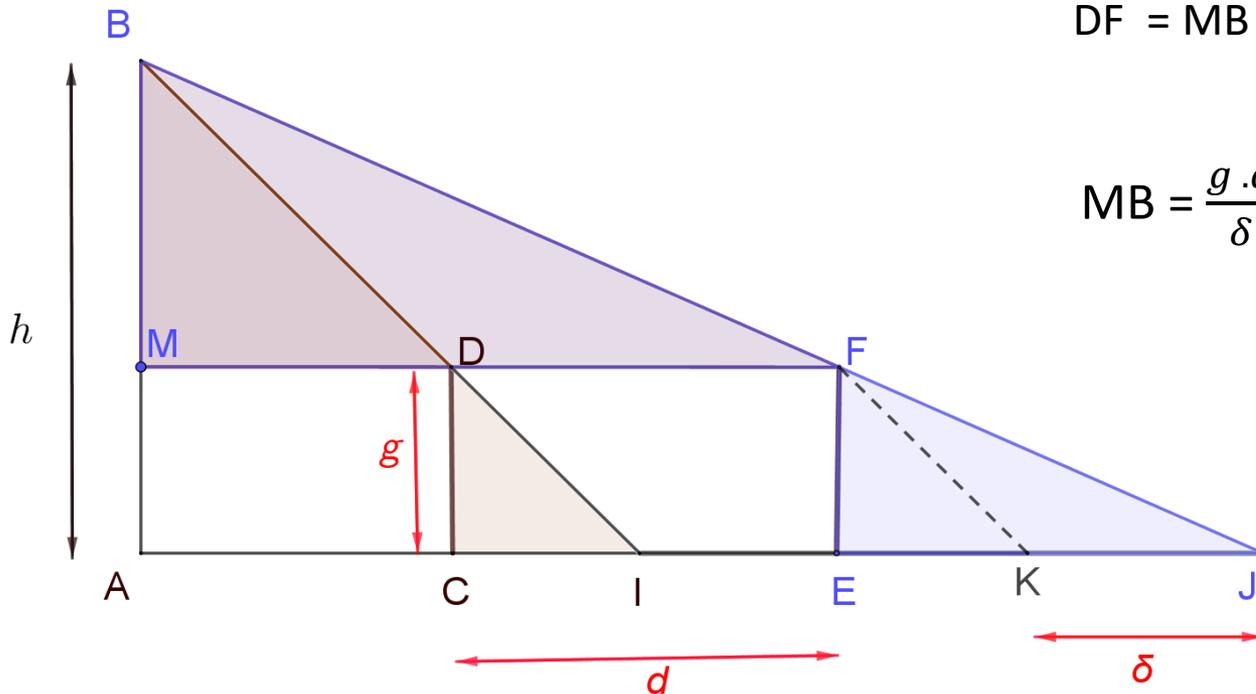
$$MD = MB \frac{CI}{CD}$$

---


$$DF = MB \frac{KJ}{CD} \quad d = MB \frac{\delta}{g}$$

$$MB = \frac{g \cdot d}{\delta} = g \cdot \frac{MF - MD}{EJ - CI}$$

$$h = \frac{g \cdot d}{\delta} + g$$





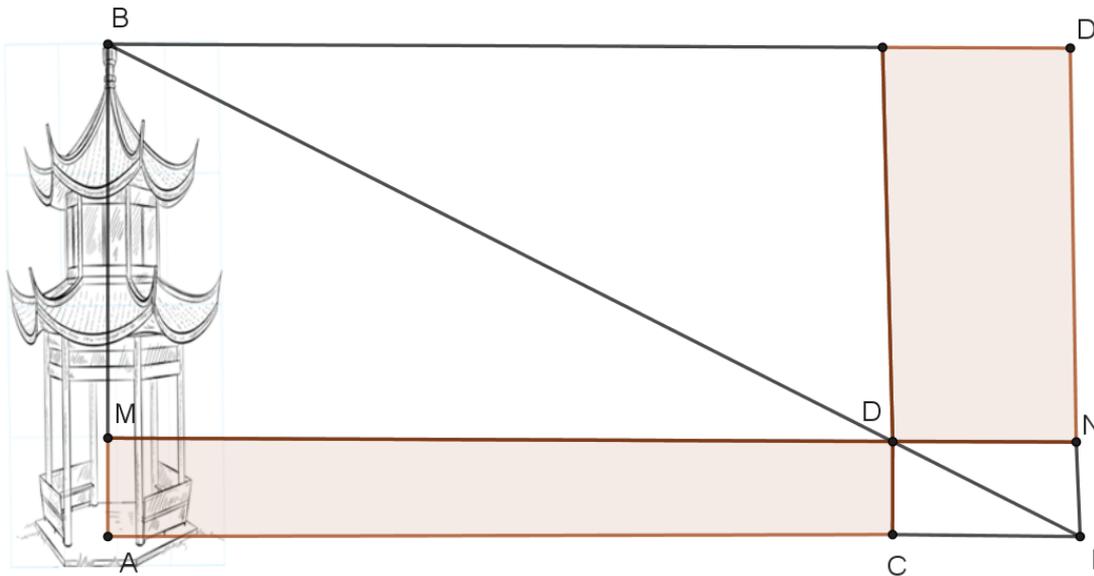
# En Chine : la méthode des aires

$$(AD) = (DD') \quad BM \cdot DN = DC \cdot AC$$

$$(AN) = (CD') \quad AB \cdot CI = AI \cdot DC$$

$$\frac{BM}{DC} = \frac{AC}{DN}$$

$$\frac{AB}{DC} = \frac{AI}{CI}$$



*Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes qui sont autour de la diagonale sont égaux entre eux*

Euclide livre I, prop. 43

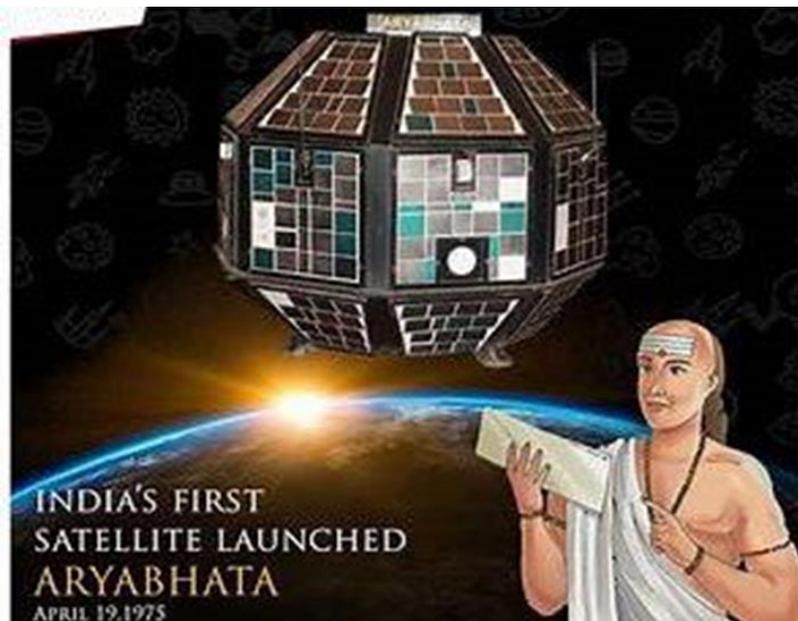


Inde : Aryabhata (476 – 550 ), Brahmagupta (598-670) ,  
Bhaskara I ( ~600 - ~ 680)

Aryabhatya 499 :  
Brahmasphutasiddhanta 628

} versifiés, très concis

commentaire de l'Aryabhatya par Bhaskara 629



## Des feuilles de palmier



En Inde, les manuscrits sont le plus souvent des feuilles de palmier traitées de manière à devenir étanches. Les textes y sont gravés à l'aide d'un stylet. Ces feuilles sont ensuite enduites d'encre : celle-ci s'insère dans les sillons tracés par le stylet rendant les lettres visibles. Ces manuscrits se conservent mal : ils souffrent de l'humidité, de la chaleur et sont rongés par les vers. Les plus anciens manuscrits de ce type qui nous sont parvenus ont moins de 700 ans.

[Keller, 2000, p. 12-14]

# Aryabhata (476 – 550 )

L'Âryabhatîya : 4 chapitres, tous écrits en vers sous forme de distiques :

1) *Harmonies célestes* qui est un recueil de tables numériques (13 distiques).

2) Éléments de calcul (33 distiques, dont une méthode de construction d'une table de jiva = demi-cordes) (trad. française de L. Rodet, 1879)

3) *Du temps et de sa mesure* (25 distiques).

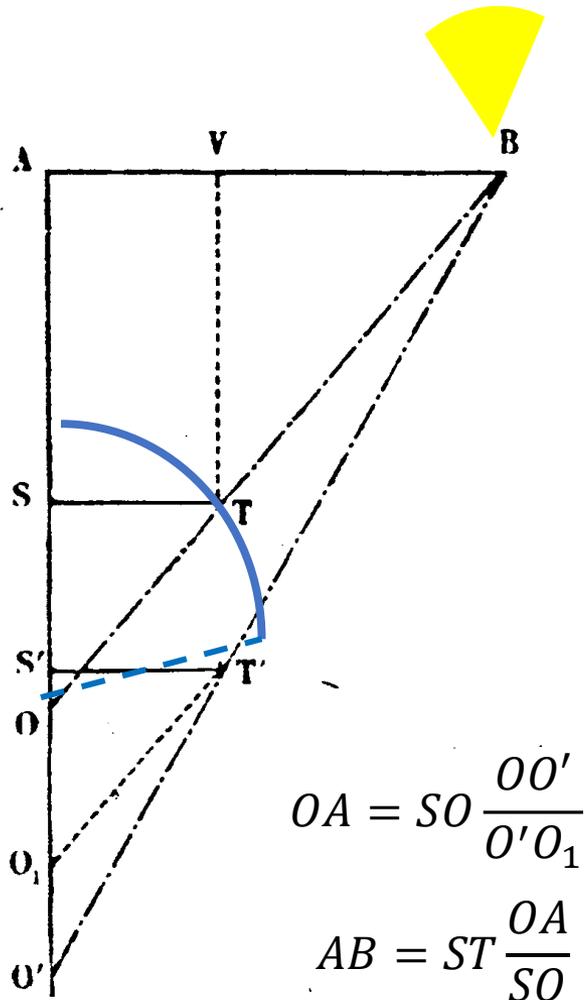
4) *Des sphères* (50 distiques).

# Aryabatha (476 – 550)

XVI.

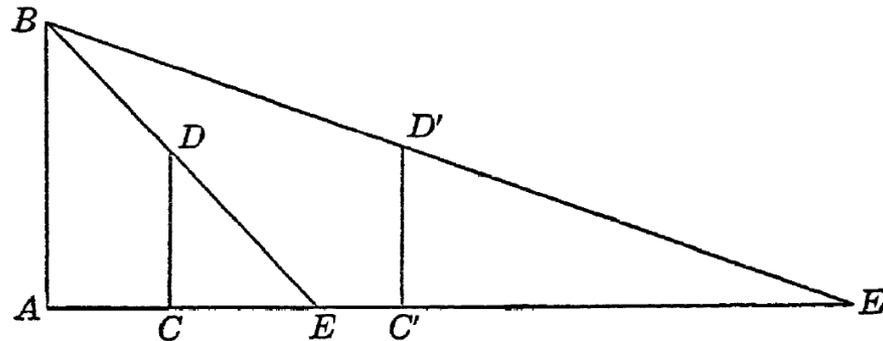
Multipliez par l'ombre la distance des extrémités des deux ombres  $OO'$ , et divisez par la différence  $O_1O'$  [des ombres], vous aurez la hauteur  $OA$  [du triangle] ;

- cette hauteur multipliée par le style  $ST$  et divisée par l'ombre  $SO$  donne  $AB$  le bras [du candélabre]



$AB$  = le bras = *bhuja* ;  $OA$  = la hauteur = *Koti*  
[traduction Rodet, 1879, p. 417-418]

## Aryabatha : d'autres interprétations

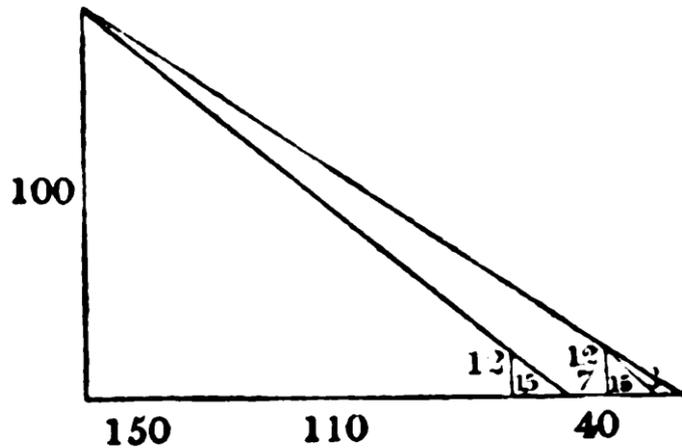


$AB = bhuja$

$AE = koti$

The word *kotī* means perpendicular (or upright) and the rule might be interpreted, as Rodet takes it, as meaning that the *bhujā* and the gnomon extend horizontally from a perpendicular wall. But the words *bhujā* and *kotī* also refer to the sides of a right-angle triangle without much regard as to which is horizontal and which is upright.

# Brahmagupta (598-670)



- L'ombre multipliée par la distance entre les extrémités des ombres et divisée par la différence des ombres est la base.
- La base, multipliée par le gnomon, et divisée par l'ombre est la hauteur de la flamme du luminaire

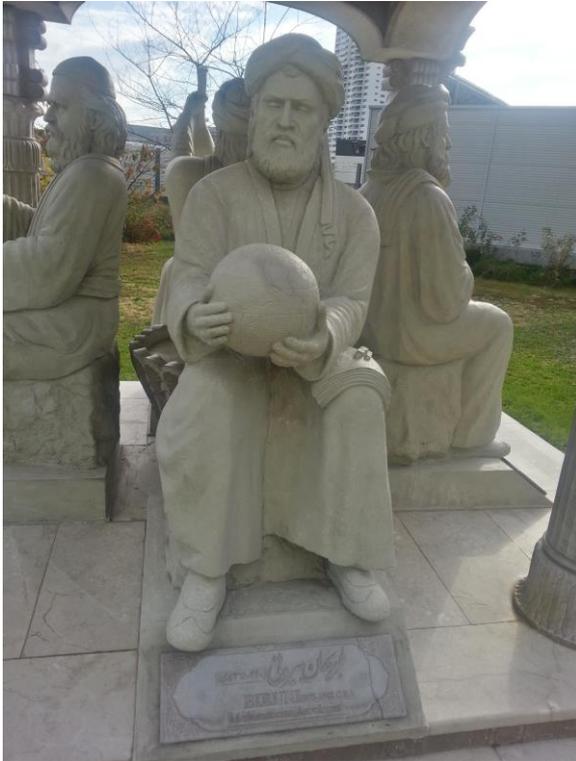
D'après le texte anglais de  
[Colebrooke, 1817, p. 318]

# Inde : le commentaire de l'Aryabathiya par Bhaskara ( ~600 - ~ 680)

En élargissant le champ géographique de nos investigations, l'échange continué avec Karine Chemla [auteure de l'édition français-chinois des *Neuf Chapitres*] nous a amené à remarquer de nombreuses similitudes entre les mathématiques pratiquées par Bhaskara et le commentaire de Liu Hui aux Neuf Chapitres. Il existe en premier lieu une parenté de problèmes et algorithmes considérés : règle de trois, problèmes de bambous cassés et lotus immergés, rencontres de deux corps, problèmes du pulvérisateur, tous ont leur équivalent dans les textes chinois, quoiqu'il existe d'évidentes différences dans leurs traitements....

Il s'agit là d'un pan entier de l'histoire internationale des mathématiques qui reste pour l'instant inexploré. [Keller, 2000, p. 256]

# Al Biruni (973-1050)



- [1976] *The exhaustive Treatise on Shadows* , traduction et commentaires : Edward S. Kennedy (d'après un manuscrit de 1234), Alep
- [1985] *Livre des clefs de l'astronomie* trad. Marie-Thérèse Debarnot, Damas
- [1934/1029] *The Book of Instruction in the Elements of the Art of Astrology*, trad. R. Ramsay Wright, Londres

[1910/1030] *An Account of the Religion, Philosophy, Literature, Geography, Chronology, Astronomy, Customs, Laws and Astrology of India about a.d. 1030.*, 2 vol. trad. Edward Sachau

# Al Biruni : astrologue mais pas dupe ?

كتاب التفهيم  
لاوائل صناعة التنجيم

[1934/1029] *The  
Book of Instruction  
in the Elements of  
the Art of Astrology*

..à sa demande, j'ai préparé un aide mémoire pour Rayhanah (la Khwarizmia), fille de al-Hasan, sous la forme de questions et réponses qui, non seulement est élégant, mais facilite aussi la formation des concepts.

J'ai commencé par la Géométrie, et j'ai poursuivi par l'Arithmétique et la Science des Nombres, puis par la structure de l'Univers, et finalement par l'Astrologie Judiciaire, car nul n'est digne du titre d'Astrologue s'il n'est pas d'abord bien informé de ces quatre sciences.

[p. 1]

.....

Il est temps de passer aux expressions dont usent les Astrologues concernant les décisions des étoiles, et qui intéressent le lecteur. En majorité, les gens considèrent les décisions des étoiles comme relevant des sciences exactes, tandis que ma confiance dans ses résultats et dans la profession me rangent plutôt dans la minorité.

[p. 346-347]

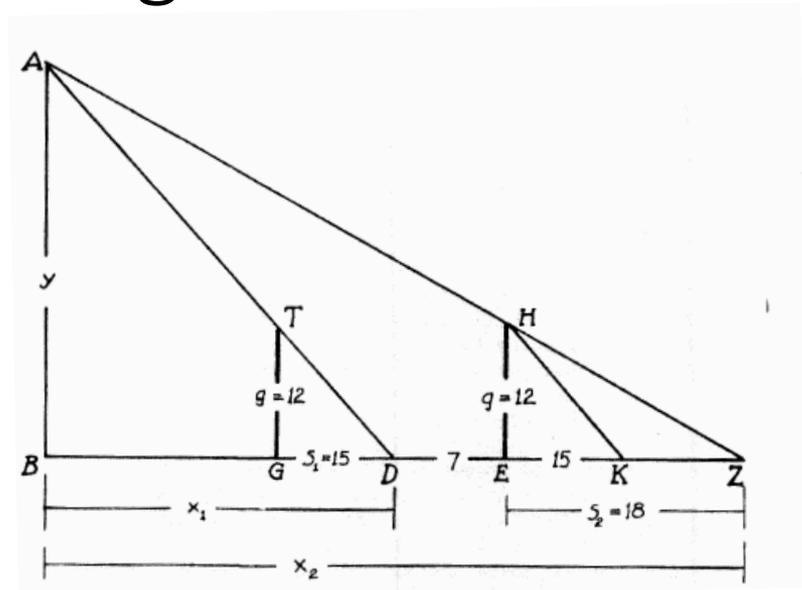
# Al Biruni et l'héritage indien

C'est ce type de technique qui est expliqué ainsi par Brahmagupta dans le livre mentionné (Brahmasiddhantha) :

S'il y a une lampe sur un minaret (منارة), avec un obstacle intervenant entre nous et sa base, et près de nous un gnomon dont la longueur est de 12 doigts, et derrière un autre gnomon de même taille, son ombre étant 18 doigts et si de la pointe de la première ombre à la base du second gnomon il y a 7 doigts, soit à trouver la hauteur du minaret...

[ Biruni/ Kennedy, traité des ombres, Vol 1 p. 258]

La règle est bien chez Brahmagupta, les valeurs numériques sont celles d'un commentateur indien.  
[Kennedy vol 2, p. 162]

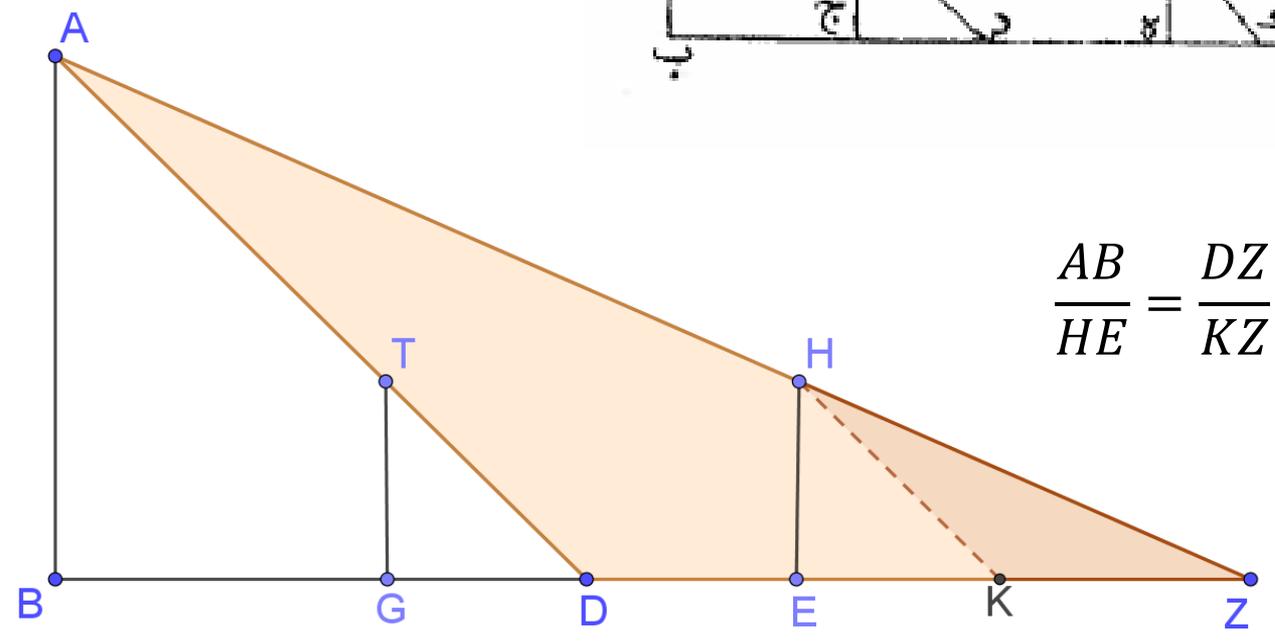
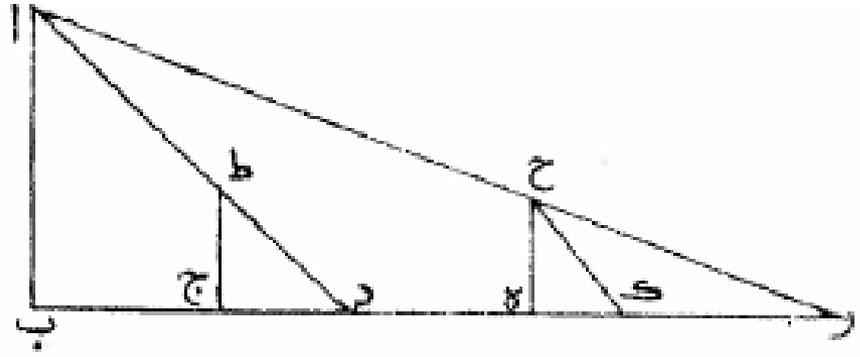


Minaret :

منارة (manara) phare, tour à feu ;  
lumière : نور (nour)

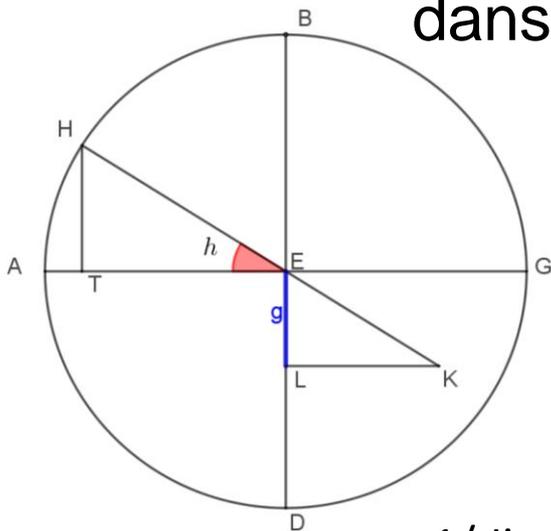
مأذنة (madhana) ; annoncer : أذن  
(adhana) ; muezzin : موذن

# Biruni (913-1050) : traité exhaustif des ombres



$$\frac{AB}{HE} = \frac{DZ}{KZ}$$

# Al Biruni : de la trigonométrie dans le *Traité exhaustif des ombres*

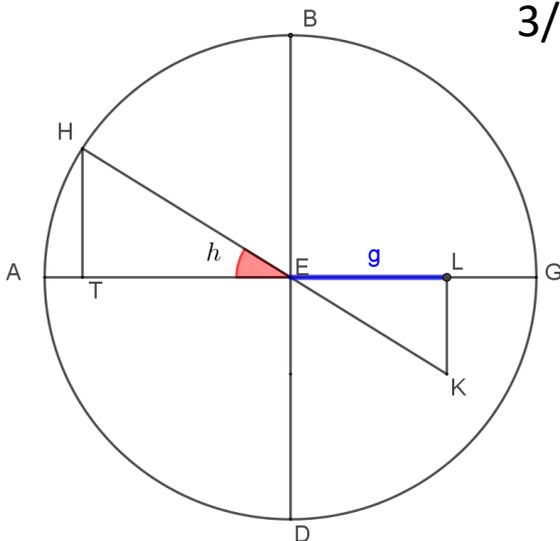


Nous faisons EL égal au gnomon, et le soleil est au point H. Ainsi AH sera sa hauteur et la perpendiculaire HT est le **sinus** (1) de cette hauteur, et HB le complément de sa hauteur, et ET est égal à son sinus. Traçons le rayon HEK et LK perpendiculaire à EL. Ainsi LK sera **l'ombre directe** (2) de la hauteur AH et KE le **diamètre de l'ombre** (3) [Kennedy p. 90, Biruni p. 59]

1/ Jiva ou Siva (demi-corde en sanscrit) → جيب (jaïb = ouverture) → sinus

2/ الظل المتوى = l'ombre directe = cotangente

3/ القطر الظل = la diagonale de l'ombre = la cosécante ( $= \frac{1}{\sin}$ )



de même si le gnomon g est horizontal :

LK = الظل المعكوس = l'ombre verse (la tangente)

الظل الزاوية = l'ombre de l'angle = tangente

(en arabe moderne selon les dictionnaires Mounded 1972 et Reverso 2021)

# Dans le Traité des Ombres : Des tables trigonométriques

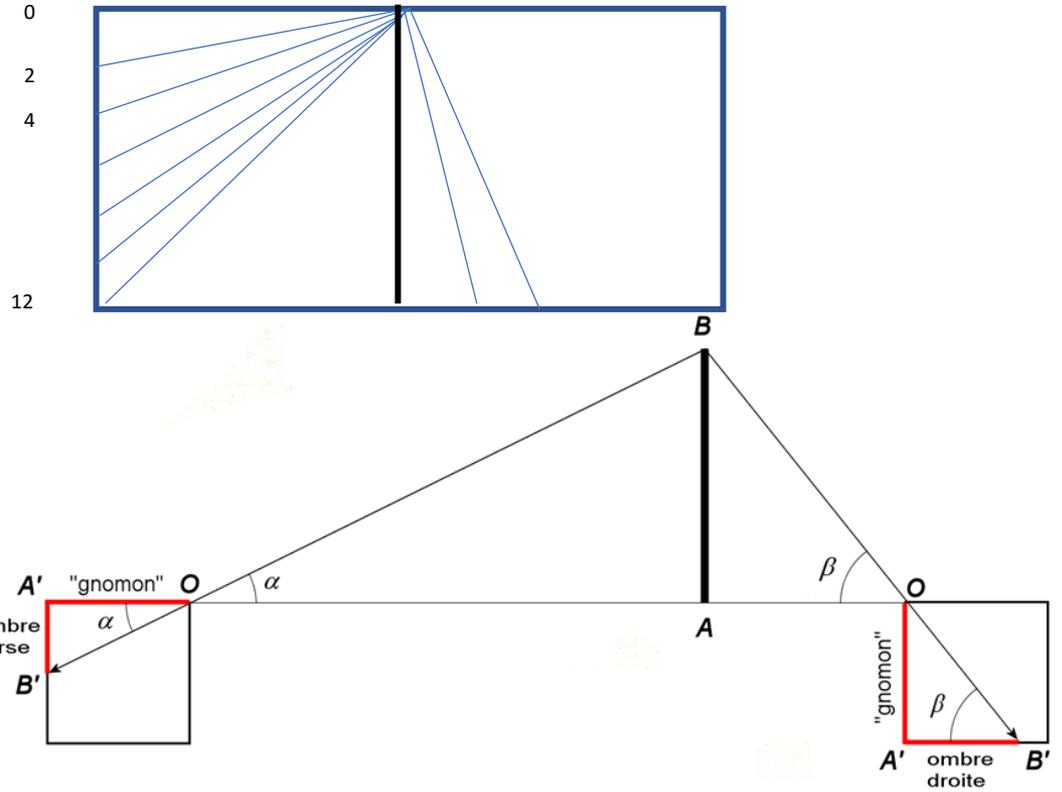
| The Direct Shadow | The Reversed Shadow | Digits | feet 6.30 | feet 7 | Parts  | The Direct Shadow | The Reversed Shadow | Digits | feet 6.30 | feet 7 | Parts |    |    |      |      |      |       |
|-------------------|---------------------|--------|-----------|--------|--------|-------------------|---------------------|--------|-----------|--------|-------|----|----|------|------|------|-------|
| 1                 | 85                  | 443.92 | 372.52    | 400.00 | 247.22 | 31                | 55                  | 19.72  | 2549      | 11.28  | 99.51 | 61 | 29 | 6.30 | 3.26 | 3.53 | 33.70 |
| 2                 | 80                  | 243.28 | 187.45    | 200.00 | 131.11 | 32                | 56                  | 19.75  | 10.26     | 21.02  | 96.1  | 62 | 28 | 6.24 | 3.27 | 3.43 | 33.94 |
| 3                 | 87                  | 218.48 | 172.35    | 193.34 | 124.32 | 33                | 57                  | 18.78  | 10.11     | 20.47  | 92.24 | 63 | 27 | 6.7  | 3.19 | 3.34 | 30.34 |
| 4                 | 86                  | 171.24 | 92.42     | 100.00 | 88.1   | 34                | 56                  | 17.47  | 9.36      | 19.33  | 85.57 | 64 | 26 | 6.21 | 3.20 | 3.15 | 29.30 |
| 5                 | 85                  | 156.25 | 81.28     | 90.00  | 80.43  | 35                | 55                  | 17.00  | 9.17      | 19.0   | 81.61 | 65 | 25 | 5.96 | 3.2  | 3.26 | 27.87 |
| 6                 | 84                  | 124.00 | 61.28     | 63.86  | 57.52  | 36                | 54                  | 16.7   | 8.57      | 9.58   | 82.35 | 66 | 24 | 5.21 | 2.54 | 3.7  | 26.12 |
| 7                 | 83                  | 37.46  | 32.14     | 51.7   | 40.44  | 37                | 53                  | 15.55  | 8.37      | 9.07   | 79.37 | 67 | 23 | 5.7  | 2.46 | 2.79 | 25.53 |
| 8                 | 82                  | 85.77  | 46.12     | 48.49  | 42.57  | 38                | 52                  | 15.21  | 8.21      | 8.58   | 76.33 | 68 | 22 | 4.51 | 2.38 | 2.50 | 24.14 |
| 9                 | 81                  | 75.45  | 41.1      | 44.12  | 37.82  | 39                | 51                  | 14.72  | 8.2       | 8.39   | 74.6  | 69 | 21 | 4.34 | 2.31 | 2.41 | 23.1  |
| 10                | 80                  | 46.23  | 36.52     | 39.42  | 240.17 | 40                | 50                  | 14.18  | 7.69      | 8.21   | 71.30 | 70 | 20 | 4.22 | 2.33 | 2.13 | 21.1  |
| 11                | 79                  | 41.44  | 32.24     | 36.1   | 206.40 | 41                | 49                  | 13.59  | 7.24      | 8.3    | 68.1  | 71 | 19 | 4.9  | 2.19 | 2.13 | 20.20 |
| 12                | 78                  | 56.27  | 30.32     | 32.56  | 201.1  | 42                | 48                  | 13.18  | 7.12      | 7.46   | 66.0  | 72 | 18 | 3.54 | 2.2  | 2.18 | 19.30 |
| 13                | 77                  | 57.16  | 28.9      | 30.18  | 194.32 | 43                | 47                  | 12.52  | 6.86      | 7.30   | 63.2  | 73 | 17 | 5.40 | 1.88 | 2.0  | 18.21 |
| 14                | 76                  | 46.7   | 26.4      | 28.2   | 140.39 | 44                | 46                  | 12.12  | 6.54      | 7.16   | 62.8  | 74 | 16 | 3.26 | 1.55 | 2.0  | 17.12 |
| 15                | 75                  | 44.47  | 24.35     | 26.7   | 203.54 | 45                | 45                  | 11.6   | 6.30      | 6.9    | 60.0  | 75 | 15 | 3.15 | 1.45 | 1.55 | 16.15 |
| 16                | 74                  | 41.51  | 22.40     | 24.25  | 208.18 | 46                | 44                  | 11.25  | 6.1       | 6.25   | 57.86 | 76 | 14 | 2.59 | 1.35 | 1.45 | 14.50 |
| 17                | 73                  | 36.55  | 21.16     | 22.74  | 196.15 | 47                | 43                  | 10.11  | 6.1       | 6.1    | 55.57 | 77 | 13 | 2.46 | 1.30 | 1.37 | 13.51 |
| 18                | 72                  | 36.25  | 20.1      | 21.25  | 184.40 | 48                | 42                  | 10.48  | 5.9       | 6.08   | 54.1  | 78 | 12 | 2.33 | 1.23 | 1.23 | 12.65 |
| 19                | 71                  | 34.23  | 19.53     | 20.20  | 172.19 | 49                | 41                  | 10.22  | 5.7       | 6.15   | 52.9  | 79 | 11 | 2.19 | 1.16 | 1.21 | 11.80 |
| 20                | 70                  | 32.1   | 17.57     | 19.14  | 164.50 | 50                | 40                  | 10.7   | 5.8       | 5.52   | 50.21 | 80 | 10 | 2.0  | 1.1  | 1.14 | 10.54 |
| 21                | 69                  | 31.75  | 16.56     | 18.16  | 156.18 | 51                | 39                  | 9.43   | 5.14      | 5.40   | 46.38 | 81 | 9  | 1.54 | 1.1  | 1.0  | 9.50  |
| 22                | 68                  | 29.40  | 15.6      | 17.20  | 148.30 | 52                | 38                  | 8.23   | 5.5       | 5.28   | 44.53 | 82 | 8  | 1.41 | 0.95 | 0.59 | 8.25  |
| 23                | 67                  | 28.16  | 15.0      | 16.29  | 141.21 | 53                | 37                  | 8.7    | 4.55      | 5.36   | 45.13 | 83 | 7  | 1.28 | 0.92 | 0.51 | 7.22  |
| 24                | 66                  | 26.12  | 14.36     | 15.43  | 134.96 | 54                | 36                  | 8.44   | 4.43      | 5.15   | 43.56 | 84 | 6  | 1.15 | 0.91 | 0.44 | 6.18  |
| 25                | 65                  | 25.44  | 13.56     | 15.1   | 128.47 | 55                | 35                  | 8.24   | 4.33      | 5.54   | 42.1  | 85 | 5  | 1.2  | 0.95 | 0.37 | 5.25  |
| 26                | 64                  | 24.36  | 13.75     | 14.81  | 123.1  | 56                | 34                  | 8.5    | 4.24      | 4.94   | 40.78 | 86 | 4  | 0.92 | 0.27 | 0.29 | 4.12  |
| 27                | 63                  | 23.31  | 12.45     | 13.44  | 117.46 | 57                | 33                  | 7.4    | 4.2       | 4.7    | 39.2  | 87 | 3  | 0.87 | 0.20 | 0.22 | 3.9   |
| 28                | 62                  | 22.34  | 12.14     | 13.20  | 112.51 | 58                | 32                  | 7.2    | 4.4       | 4.2    | 37.30 | 88 | 2  | 0.25 | 0.14 | 0.15 | 2.6   |
| 29                | 61                  | 21.26  | 11.44     | 12.58  | 108.15 | 59                | 31                  | 7.1    | 4.33      | 4.18   | 36.1  | 89 | 1  | 0.2  | 0.7  | 0.8  | 1.5   |
| 30                | 60                  | 20.47  | 11.15     | 12.7   | 103.5  | 60                | 30                  | 6.55   | 3.46      | 4.5    | 34.8  | 90 | 0  | 0.0  | 0.0  | 0.0  | 0.0   |

|        |        |                     |
|--------|--------|---------------------|
| 2      | 1      | The Direct Shadow   |
| 88     | 89     | The Reversed Shadow |
| 345.38 | 687.23 | Digits              |
| 109.91 | 572.21 | feet 6.30           |
| 121    | 401.0  | feet 7              |
| 545    |        | Parts               |

|    |    |      |      |     |      |
|----|----|------|------|-----|------|
| 45 | 45 | 12:0 | 6:30 | 7:0 | 60:0 |
|    |    |      | 0.91 |     |      |

# L'astrolabe et le carré des ombres

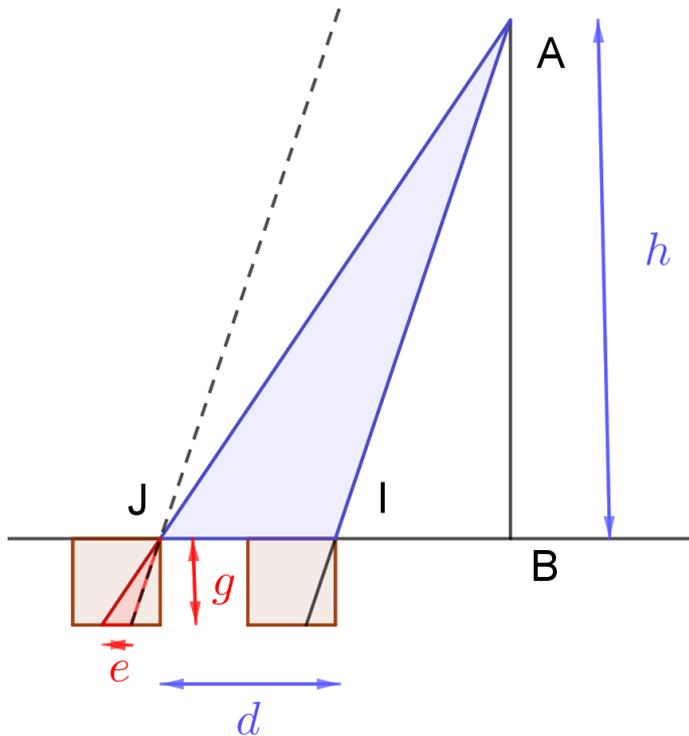
L'astrolabe est un instrument des Grecs ... Al Biruni, éléments d'astrologie, p. 194



le pilastre, l'alidade : أعضادة

Aider, assister, fortifier : عضد

# Mesurer avec l'astrolabe



$$\frac{AB}{IJ} = \frac{g}{e}$$

$$h = d \frac{g}{e}$$

$$g = 12 \quad e = 1$$

Pour trouver la hauteur d'un minaret, d'une colonne ou d'une montagne dont la base est inaccessible, reste d'abord là où tu es, et tourne la règle jusqu'à ce que tu voies le sommet par les deux viseurs, exactement comme tu le fais pour prendre la hauteur d'une étoile, note alors le nombre de doigts auquel pointe la règle dans le carré des ombres, et déplace-toi vers l'avant ou vers l'arrière (là où le sol est le plus plat), si c'est vers l'avant place la pointe de la règle à un doigt de moins, si c'est vers l'arrière, à une graduation de plus, et marche jusqu'à ce que le sommet soit de nouveau visible à travers les deux viseurs. La distance entre les deux points d'observation multipliée par 12 est la hauteur de la montagne,

*Eléments d'astrologie p. 346*

# Abd ar Rahman AS SUFI

(Téhéran 903-Chiraz 986)

- Astronome,
- traduit l'Almageste de Ptolémée en arabe
- Découvre la galaxie d'Andromède
- exploite et améliore l'astrolabe
- Laisse un travail de recension méticuleux dans des documents de grande qualité esthétique



Livre des étoiles fixes

# Abd ar Rahman AS SUFI (903-986)

## L'Epître sur l'utilisation de l'astrolabe

74



### DE L'USAGE DE L'ASTROLABE PLANISPHERIQUE

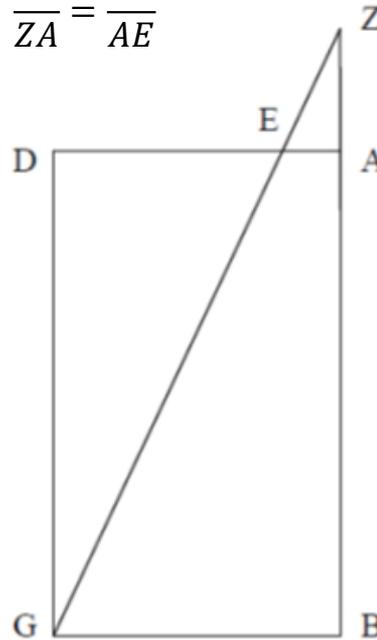


tant en matière Astronomique que Topographique et également pour l'Astrologie  
sur l'admirable instrument  
construit au lycée Branly de Créteil  
en l'an



M. M.

$$\frac{ZB}{ZA} = \frac{AD}{AE}$$



وَمَا شَيْئًا يَبِينُ شَيْئًا بِهَا إِلَّا بِمَا فِيهَا مِنْ شَيْءٍ ذَلِكِ آه كُتِبَ  
 رَبِّ إِيَّيَّكَ جَوَّالًا بَعْدَ جَوَّالٍ آه كُتِبَ  
 لَهُ نَقْطَةُ بَاءٍ وَبَسْمُ حَجْرٍ دَهُو نَقْطَةُ جِيمٍ فَادِ الْعَبَّابِ  
 حَطَّ ذَا الَّذِي يُوَطُّو لِّلْمَنْشَبَةِ الْمَنْشُوبَةِ فِي حَطِّ آدٍ يُوَفَّقُ  
 الْيَبِي الَّذِي يُوَفَّقُ نَجْدًا وَفِي الْمَنْشَبَةِ الْجَمْعُ مِنْ كِتَابِ آه الَّذِي  
 الْمَنْشَبَةُ الْمَعْرُوفَةُ حَرَجٌ لِنَا حَطَّ رَبِّ الَّذِي يُوَفَّقُ الْيَبِي حَطَّ  
 الْمَنْشَبَةُ الْمَنْشُوبَةُ فَادِ الْيَبِي مِنْ حَطِّ رَبِّ حَطَّ ذَا  
 الَّذِي يُوَطُّو لِّلْمَنْشَبَةِ الْمَنْشُوبَةِ بِحَطِّ آبٍ وَفِي الْمَنْشَبَةِ شَأْنٌ آه

**وهذه صورة اليب**

# L'Epître sur l'utilisation de l'astrolabe et les élèves du lycée Branly de Créteil

Sur l'astrolabe ci-contre, chaque côté du carré des ombres est gradué de 0 à 12. En tenant l'astrolabe verticalement devant les yeux, on vise à l'aide de l'alidade. Le rôle du carré des ombres est alors de donner la tangente de l'angle de visée

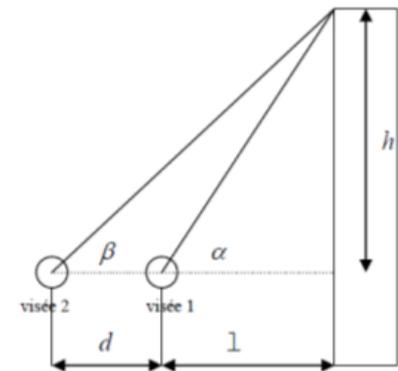
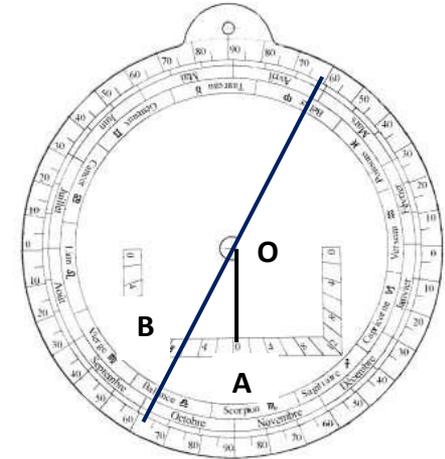
1) Pour la visée ci-contre, l'alidade est sur la graduation horizontale 6. Les graduations horizontales sont nommées "ombres droites", car on peut considérer que AB est l'ombre d'un bâton droit OA, donnée par le Soleil situé dans l'axe de l'alidade. Calculer dans ce cas  $\tan \widehat{OBA}$ .

Supposons qu'à la visée 1, l'alidade soit sur la graduation 6 des ombres droites et qu'à la visée 2, elle soit sur la graduation 7.

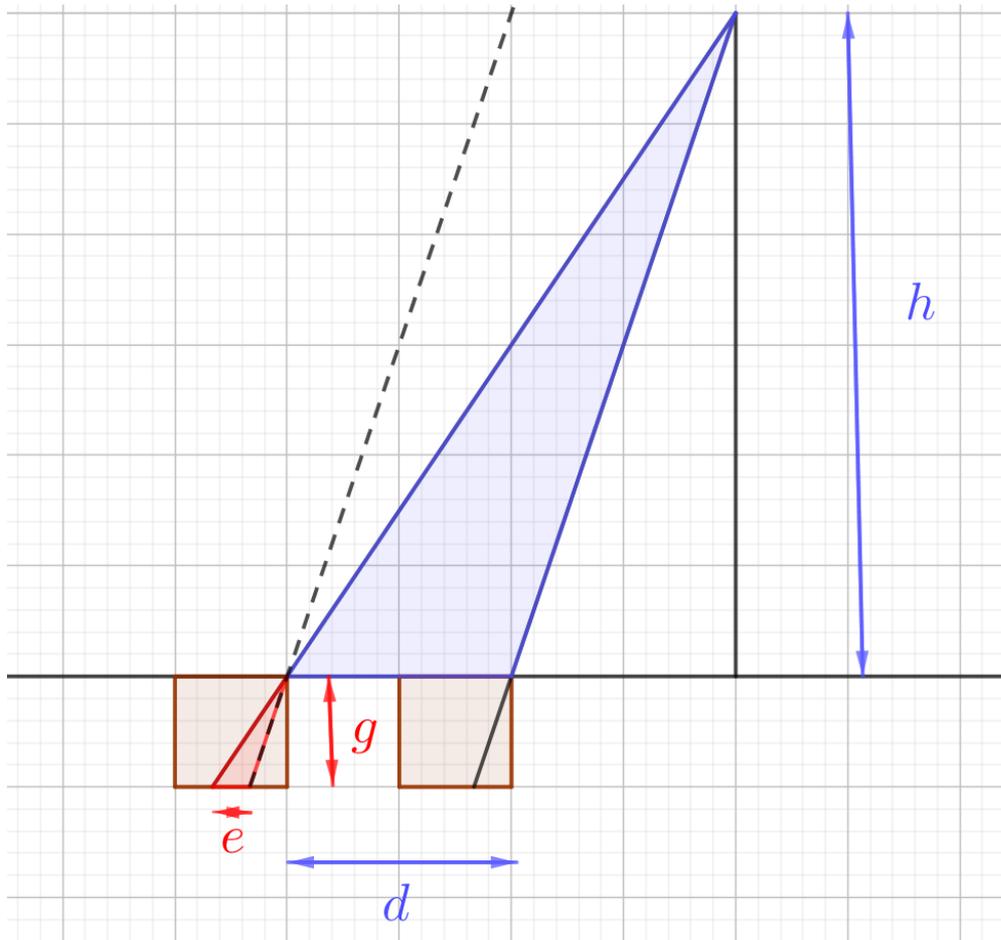
2) Exprimer  $\tan \alpha$  et  $\tan \beta$  en fonction de  $h$ ,  $l$  et  $d$ .

3) Montrer que  $h = 12xd$ .

C'est le résultat donné par AS SUFI



# L'Epître sur l'utilisation de l'astrolabe



$$\frac{h}{d} = \frac{g}{e} = 12$$

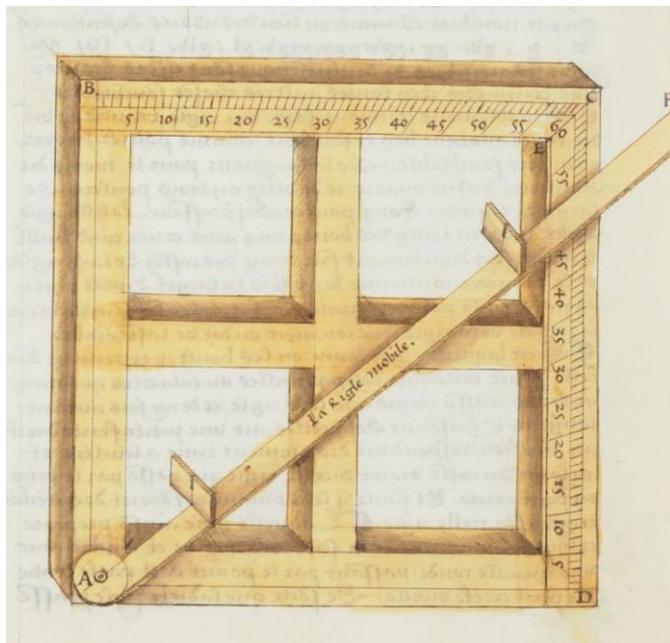
- Dans les traités de géométrie pratique occidentaux :

l'intervention progressive des angles et des lignes trigonométriques

# ORONCE FINE (1494-1555)

Composition et usage du carré  
géométrique [1538]

Offert à François 1<sup>er</sup> par Oronce Fine,  
lecteur ordinaire du dit seigneur es  
sciences mathématiques en l'université  
de Paris



Document disponible sur gallica

# Une géométrie militaire ?

ORONCE FINE

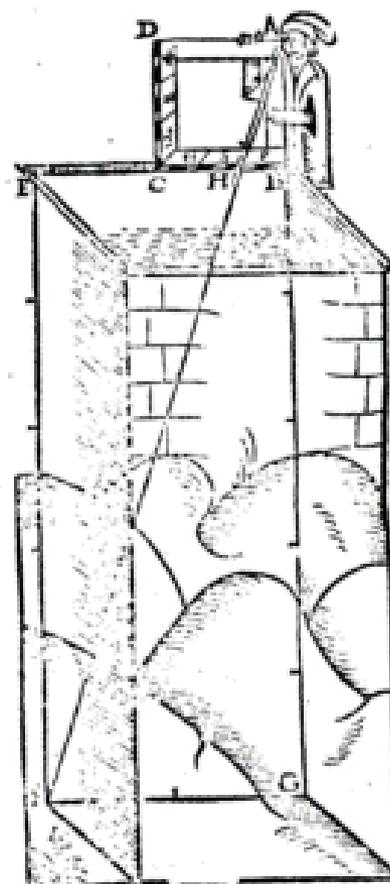
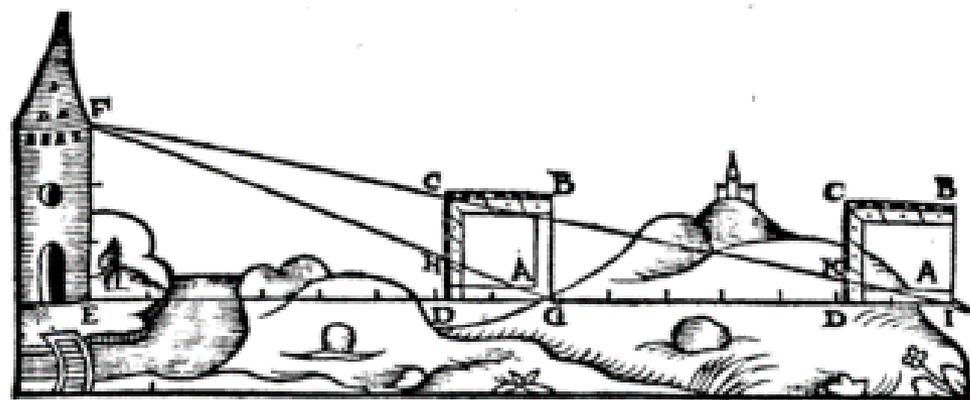
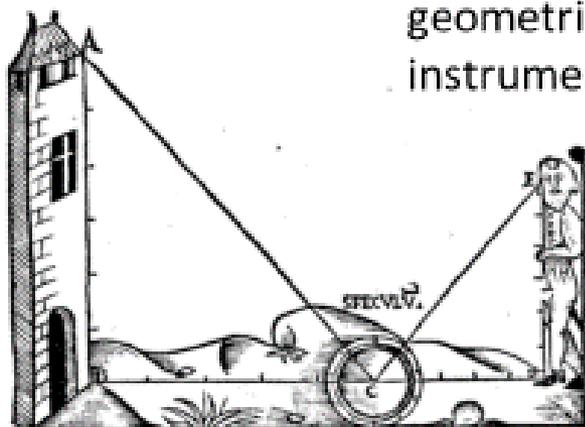
1538

*Et qui plus est sans que l'on erre  
On peut mesurer sur la terre  
Toutes les hauteurs qui de tranchées  
Ou de fossez sont empechees  
Qui sert beaucoup en temps de guerre*

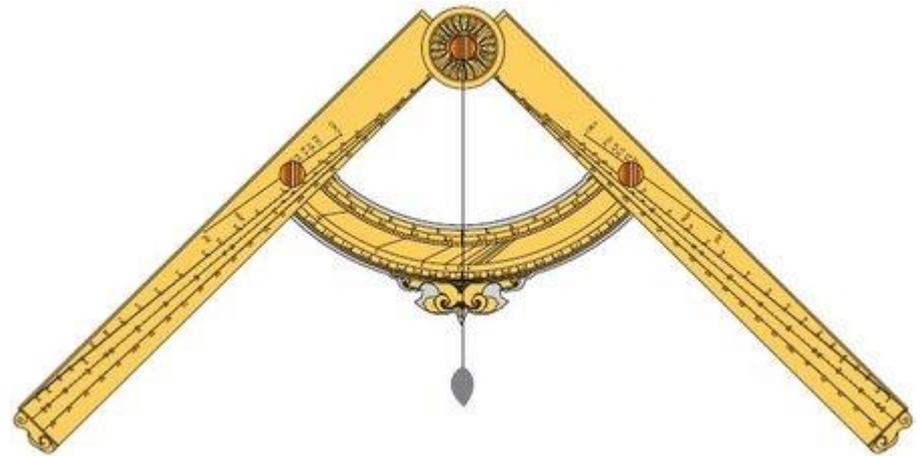
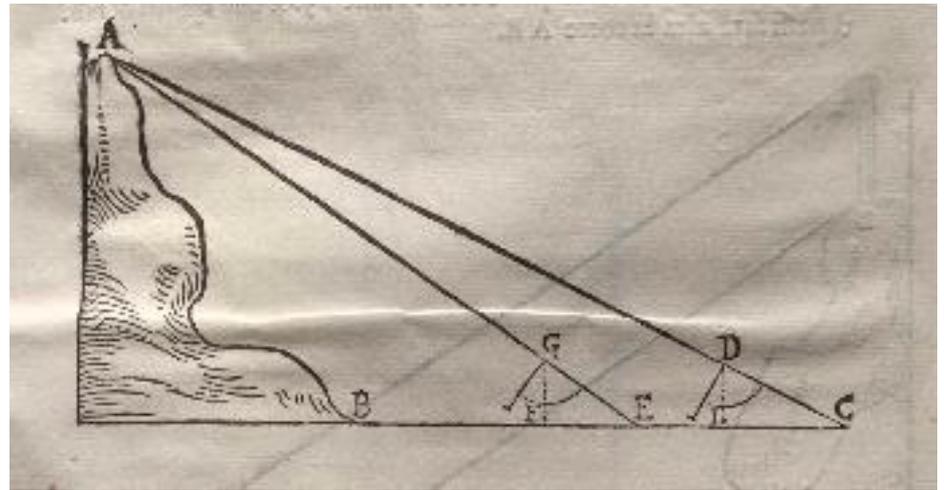
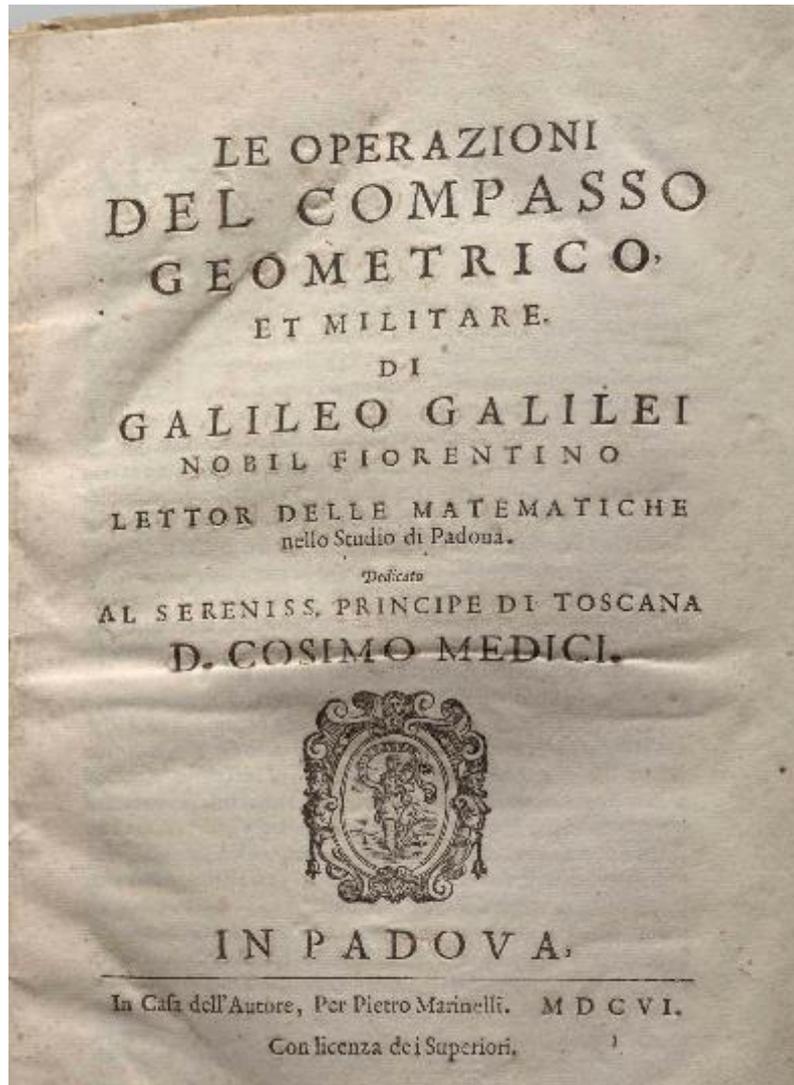


# ORONCE FINE 1585

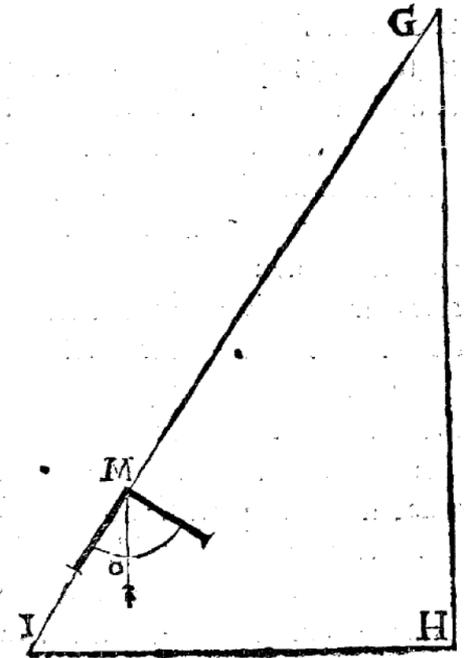
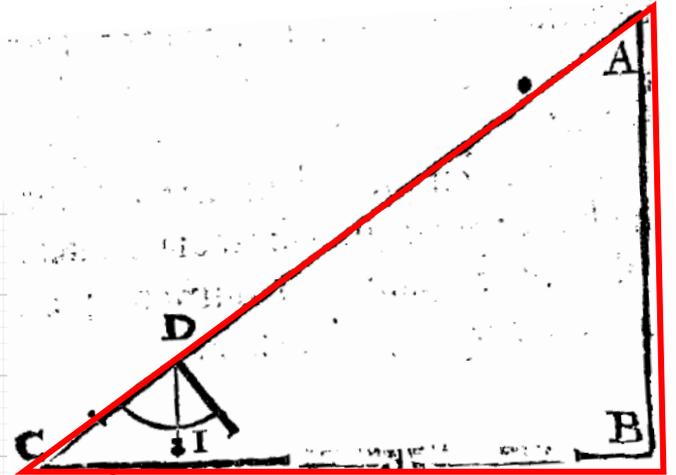
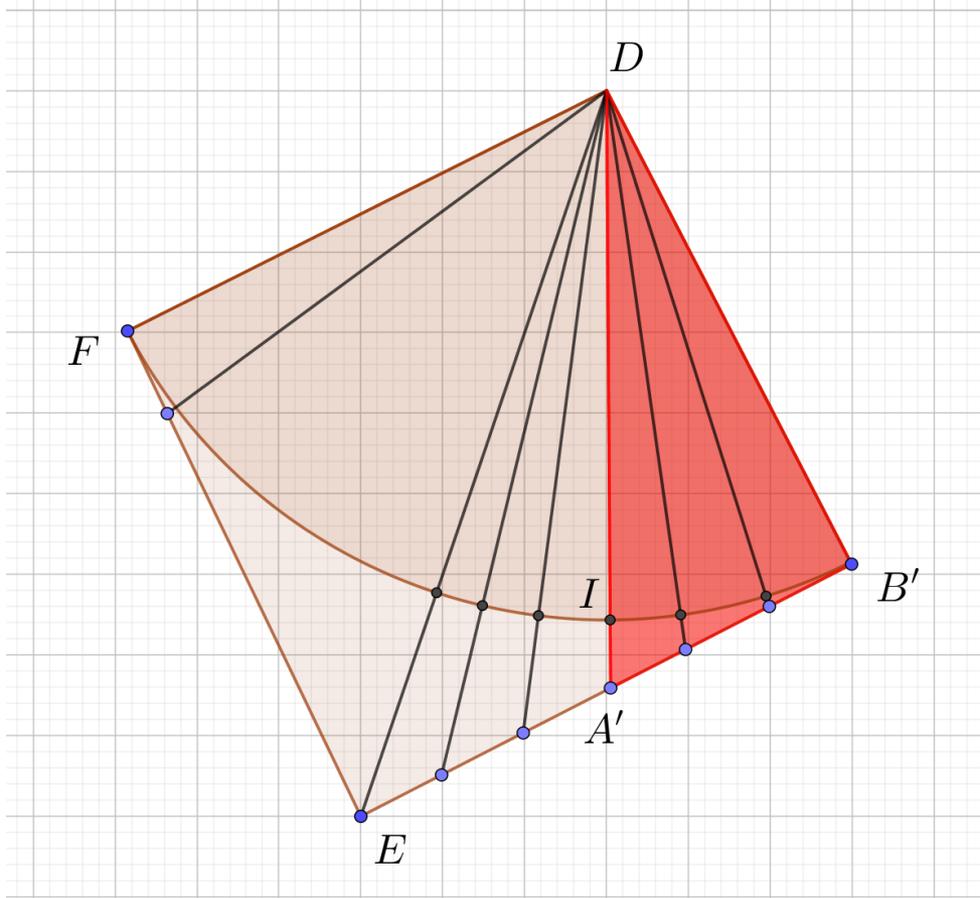
La pratique de la geometrie d'Oronce, professeur du roy és mathématiques, en laquelle est compris l'usage du quarré geometrique, & de plusieurs autres instrumens servans à mesme effect



# GALILÉE 1606 : intervention des angles ?



Le compas de Galilée :  
les deux cas de figure et le  
« carré virtuel »



Francesco Maurolico,  
(1558) : table des  
ombres

TABELLA FOECVND A.

| g  | Vmbra  | Dra  | 6 <sup>m</sup> | g  | Vmbra      | Dra        | 6 <sup>m</sup> |
|----|--------|------|----------------|----|------------|------------|----------------|
| 1  | 1745   | 174  | 29. 5          | 46 | 103551     | 3551.      | 59. 11         |
| 2  | 3492   | 1747 | 29. 7          | 47 | 107236     | 3685.      | 61. 25         |
| 3  | 5241   | 1749 | 29. 9          | 48 | 111062     | 3826.      | 63. 46         |
| 4  | 6992   | 1751 | 29. 11         | 49 | 115037     | 3975.      | 66. 15         |
| 5  | 8748   | 1756 | 29. 16         | 50 | 119197     | 4160.      | 69. 20         |
| 6  | 10510  | 1762 | 29. 22         | 51 | 123491     | 4294.      | 71. 34         |
| 7  | 12278  | 1768 | 29. 28         | 52 | 127994     | 4503.      | 75. 5          |
| 8  | 14053  | 1775 | 29. 35         | 53 | 132704     | 4710.      | 78. 30         |
| 9  | 15838  | 1785 | 29. 45         | 54 | 137639     | 4935.      | 82. 15         |
| 10 | 17633  | 1795 | 29. 55         | 55 | 142813     | 5174.      | 86. 14         |
| 11 | 19439  | 1806 | 30. 6          | 56 | 148253     | 5440.      | 90. 40         |
| 12 | 21256  | 1817 | 30. 17         | 57 | 153987     | 5734.      | 95. 34         |
| 13 | 23087  | 1831 | 30. 31         | 58 | 160033     | 6046.      | 100.46         |
| 14 | 24932  | 1845 | 30. 45         | 59 | 166429     | 6396.      | 106.36         |
| 15 | 26794  | 1862 | 31. 2          | 60 | 173205     | 6776.      | 112.56         |
| 16 | 28674  | 1880 | 31. 20         | 61 | 180405     | 7200.      | 120. 0         |
| 17 | 30573  | 1899 | 31. 39         | 62 | 188073     | 7668.      | 127.48         |
| 18 | 32492  | 1919 | 31. 59         | 63 | 196261     | 8188.      | 136.28         |
| 19 | 34433  | 1941 | 32. 21         | 64 | 205030     | 8769.      | 146. 9         |
| 20 | 36396  | 1963 | 32. 43         | 65 | 214451     | 9421.      | 157. 1         |
| 21 | 38387  | 1991 | 33. 11         | 66 | 224603     | 10152.     | 169. 12        |
| 22 | 40402  | 2015 | 33. 35         | 67 | 235585     | 10982.     | 183. 2         |
| 23 | 42448  | 2046 | 34. 6          | 68 | 247509     | 11924.     | 198.44         |
| 24 | 44522  | 2074 | 34. 34         | 69 | 260509     | 13000.     | 216. 40        |
| 25 | 46631  | 2109 | 35. 9          | 70 | 274747     | 14238.     | 237.18         |
| 26 | 48772  | 2141 | 35. 41         | 71 | 290421     | 15674.     | 261. 14        |
| 27 | 50952  | 2180 | 36. 20         | 72 | 307768     | 17347.     | 289. 7         |
| 28 | 53170  | 2218 | 36. 58         | 73 | 327084     | 19316.     | 321. 56        |
| 29 | 55432  | 2262 | 37. 42         | 74 | 348742     | 21658.     | 360. 58        |
| 30 | 57735  | 2303 | 38. 23         | 75 | 373205     | 24463.     | 407.43         |
| 31 | 60086  | 2351 | 39. 11         | 76 | 401078     | 27873.     | 464.33         |
| 32 | 62486  | 2400 | 40. 0          | 77 | 433148     | 32070.     | 534.30         |
| 33 | 64940  | 2454 | 40. 54         | 78 | 470453     | 37305.     | 621.45         |
| 34 | 67452  | 2512 | 41. 51         | 79 | 514455     | 44002.     | 733.22         |
| 35 | 70022  | 2570 | 42. 50         | 80 | 567128     | 52673.     | 877.53         |
| 36 | 72654  | 2632 | 43. 52         | 81 | 631375     | 64247.     | 1070.47        |
| 37 | 75356  | 2702 | 45. 2          | 82 | 711537     | 80162.     | 1336. 2        |
| 38 | 78129  | 2773 | 46. 13         | 83 | 814435     | 102898.    | 1714.18        |
| 39 | 80978  | 2849 | 47. 29         | 84 | 951436     | 137001.    | 2233.21        |
| 40 | 83909  | 2931 | 48. 51         | 85 | 1143005    | 191569.    | 3192.49        |
| 41 | 86929  | 3020 | 50. 20         | 86 | 1430067    | 287062.    | 4784.22        |
| 42 | 90040  | 3111 | 51. 51         | 87 | 1908113    | 478046.    | 7967.26        |
| 43 | 93252  | 3212 | 53. 52         | 88 | 2863625    | 955512.    | 15925.12       |
| 44 | 96571  | 3319 | 55. 19         | 89 | 5728995    | 2865370.   | 47756.10       |
| 45 | 100000 | 3429 | 57. 9          | 90 | Infinitum. | Infinitum. | Infinitum.     |

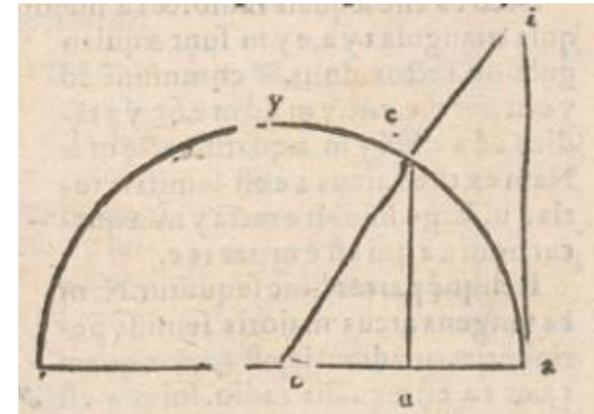
| g | Vmbra | Dra  | 6 <sup>m</sup> | g  |
|---|-------|------|----------------|----|
| 1 | 1745. | 1745 | 29. 5          | 46 |
| 2 | 3492  | 1747 | 29. 7          | 47 |
| 3 | 5241  | 1749 | 29. 9          | 48 |
| 4 | 6992  | 1751 | 29. 11         | 49 |
| 5 | 8748  | 1756 | 29. 16         | 50 |
| 6 | 10510 | 1762 | 29. 22         | 51 |
| 7 | 12278 | 1768 | 29. 28         | 52 |

89. 15. . . . . 7638998.  
89. 30. . . . . 11458872.  
89. 45. . . . . 22918162.

# FINKE Thomas [1583] *Geometria Rotundi* : l'apparition du terme « tangente »

22. *Tangens est à termino peripheria altero perpendicularis in radium extra per reliquum terminum continuatum.*

|              |                                  |                   |            |  |       |                                  |    |                   |           |        |            |   |        |                |                       |   |         |                          |   |        |   |        |        |   |       |          |             |         |        |                        |                           |         |   |            |           |   |                      |         |          |
|--------------|----------------------------------|-------------------|------------|--|-------|----------------------------------|----|-------------------|-----------|--------|------------|---|--------|----------------|-----------------------|---|---------|--------------------------|---|--------|---|--------|--------|---|-------|----------|-------------|---------|--------|------------------------|---------------------------|---------|---|------------|-----------|---|----------------------|---------|----------|
| Rotundum est | Circularis: in cuius Geomet. est | Partitio: Eff. m. | Simplex in | Obliquus   | folis | cum rectis                       | 1  |                   |           |        |            |   |        |                |                       |   |         |                          |   |        |   |        |        |   |       |          |             |         |        |                        |                           |         |   |            |           |   |                      |         |          |
|              |                                  |                   |            |  |       |                                  |    | Segmento quod est | Sector in | centro | peripheria | 1 |        |                |                       |   |         |                          |   |        |   |        |        |   |       |          |             |         |        |                        |                           |         |   |            |           |   |                      |         |          |
|              |                                  |                   |            |  |       |                                  |    |                   |           |        |            |   | Sector | Fabrica quadam | comparatio in angulis | 4 |         |                          |   |        |   |        |        |   |       |          |             |         |        |                        |                           |         |   |            |           |   |                      |         |          |
|              |                                  |                   |            |  |       |                                  |    |                   |           |        |            |   |        |                |                       |   | Species | Semicirculus in quo sunt | 1 | Anguli | 4 |        |        |   |       |          |             |         |        |                        |                           |         |   |            |           |   |                      |         |          |
|              |                                  |                   |            |  |       |                                  |    |                   |           |        |            |   |        |                |                       |   |         |                          |   |        |   | Latera | primus | 2 | Sinus | secundus |             |         |        |                        |                           |         |   |            |           |   |                      |         |          |
|              |                                  |                   |            |  |       |                                  |    |                   |           |        |            |   |        |                |                       |   |         |                          |   |        |   |        |        |   |       |          | ei connecti | Tangens | Secans |                        |                           |         |   |            |           |   |                      |         |          |
|              |                                  |                   |            |  |       |                                  |    |                   |           |        |            |   |        |                |                       |   |         |                          |   |        |   |        |        |   |       |          |             |         |        | inæqualis semicirculo. |                           |         |   |            |           |   |                      |         |          |
|              |                                  |                   |            |  |       |                                  |    |                   |           |        |            |   |        |                |                       |   |         |                          |   |        |   |        |        |   |       |          |             |         |        |                        | Coniuncta in adscrip.ione | circuli | 6 |            |           |   |                      |         |          |
|              |                                  |                   |            |  |       |                                  |    |                   |           |        |            |   |        |                |                       |   |         |                          |   |        |   |        |        |   |       |          |             |         |        |                        |                           |         |   | rectilinei | trianguli | 7 |                      |         |          |
|              |                                  |                   |            |  |       |                                  |    |                   |           |        |            |   |        |                |                       |   |         |                          |   |        |   |        |        |   |       |          |             |         |        |                        |                           |         |   |            |           |   | triangulati ordinati | communi | Quadrati |
|              |                                  |                   |            |  |       |                                  |    |                   |           |        |            |   |        |                |                       |   |         |                          |   |        |   |        |        |   |       |          |             |         |        |                        |                           |         |   |            |           |   |                      |         |          |
| tetragonismo | 8                                |                   |            |  |       |                                  |    |                   |           |        |            |   |        |                |                       |   |         |                          |   |        |   |        |        |   |       |          |             |         |        |                        |                           |         |   |            |           |   |                      |         |          |
|              |                                  | Canone            | 9          |  |       |                                  |    |                   |           |        |            |   |        |                |                       |   |         |                          |   |        |   |        |        |   |       |          |             |         |        |                        |                           |         |   |            |           |   |                      |         |          |
|              |                                  |                   |            | Calculo: theoremat. & postulatis novo modo exposito: | 10    |                                  |    |                   |           |        |            |   |        |                |                       |   |         |                          |   |        |   |        |        |   |       |          |             |         |        |                        |                           |         |   |            |           |   |                      |         |          |
|              |                                  |                   |            |  |       | unde deducitur Geodesia reclarum | 11 |                   |           |        |            |   |        |                |                       |   |         |                          |   |        |   |        |        |   |       |          |             |         |        |                        |                           |         |   |            |           |   |                      |         |          |
|              |                                  |                   |            |  |       |                                  |    | Sphæra            |           |        |            |   |        |                |                       |   |         |                          |   |        |   |        |        |   |       |          |             |         |        |                        |                           |         |   |            |           |   |                      |         |          |



$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

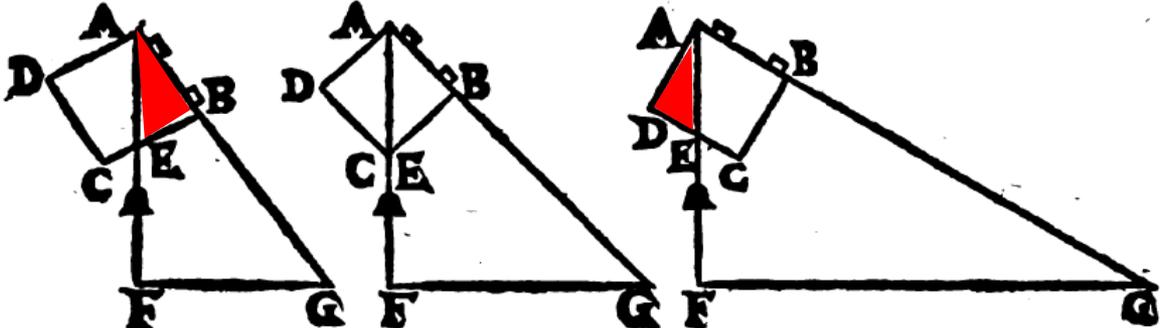
# Christophorus Clavius (1538-1612)

## GEOMETRIA PRACTICA.



*Cum gratia & Privilegio Sac. Caf. Maieftat.  
Superiorum Permiſſu.*

*MOCVNTIÆ,  
Ex Typographico IOANNIS ALBINI.*



*Vt latus AB, par-  
tium 1000.*

*ad umbram rectam  
abscissam BE,*

*Ita altitudo no-  
ta AF,*

*ad FG, distan-  
tiam,*

*Vt umbra versa  
abscissa DE,*

*ad latus DA, partium  
1000.*

*7m altitudo  
nota AF.*

*ad FG, distantiam*

# Clavius 1606 : la hauteur du gnomon est le sinus total

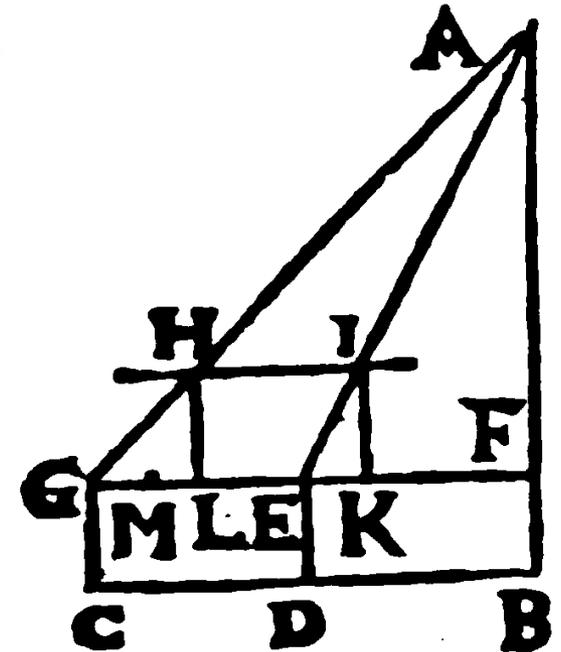
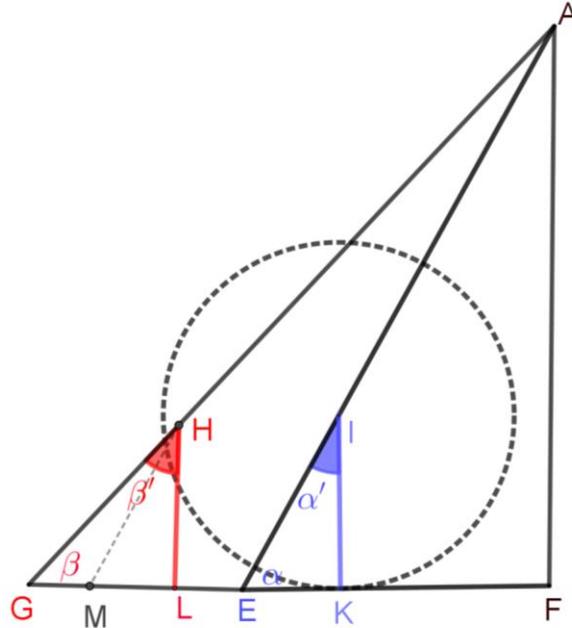
$$R = HL = KI = \text{sinus total}$$

$$R \tan \alpha' = EK$$

$$R \tan \beta' = GL$$

$$R \tan \beta' - R \tan \alpha' = GM$$

$$\frac{GM}{GE} = \frac{LH}{FA}$$



*Vt GM, differentia **Tangentium**  
GL, EK, complementorum an-  
gularum observationum.*

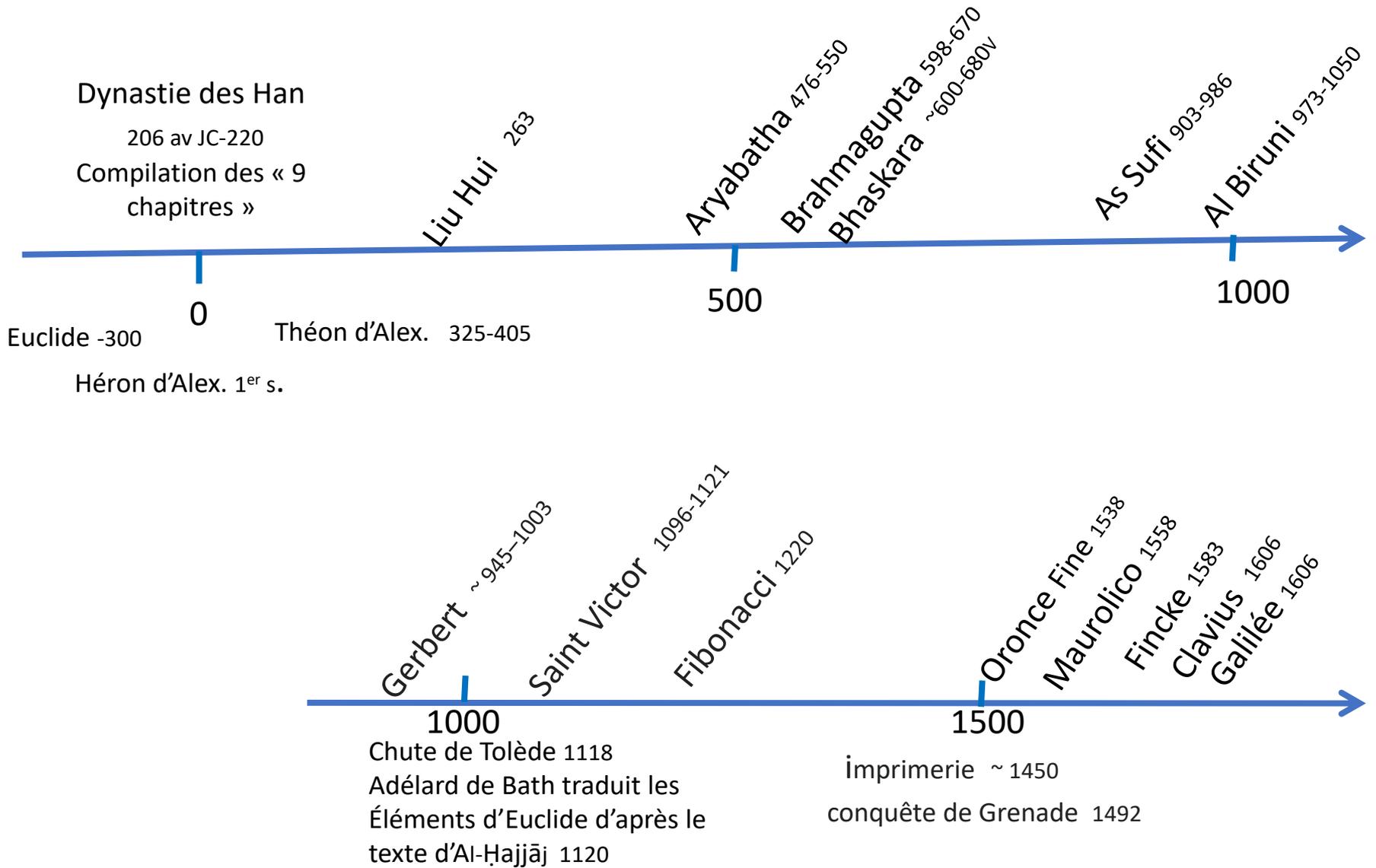
*ad GE, differ-  
entiam sta-  
tionum.*

*ita LH, ad FA,  
sinus to-  
tus.*

GM, différence des  
tangentes des  
compléments des  
angles observés,

est à GE,  
distance des  
stations

comme LH, le sinus  
total, est à FA





As Sufi

Al Biruni

Brahmagupta

Aryabatha

Liu Hui

Il est concevable que l'auteur [des manuscrits de Gerbert] se trouve à **Luxeuil ou Corbie**, dont les ateliers de copies ont produit des manuscrits – certains incluant de la géométrie et de la grammaire – dès les IX<sup>e</sup>, X<sup>e</sup> et XI<sup>e</sup> siècles.  
Kurt Vogel

Bath

Corbie

Reims

Luxeuil

Aurillac

Bobbio

Pise

Ripoll

Tolède

Cordoue

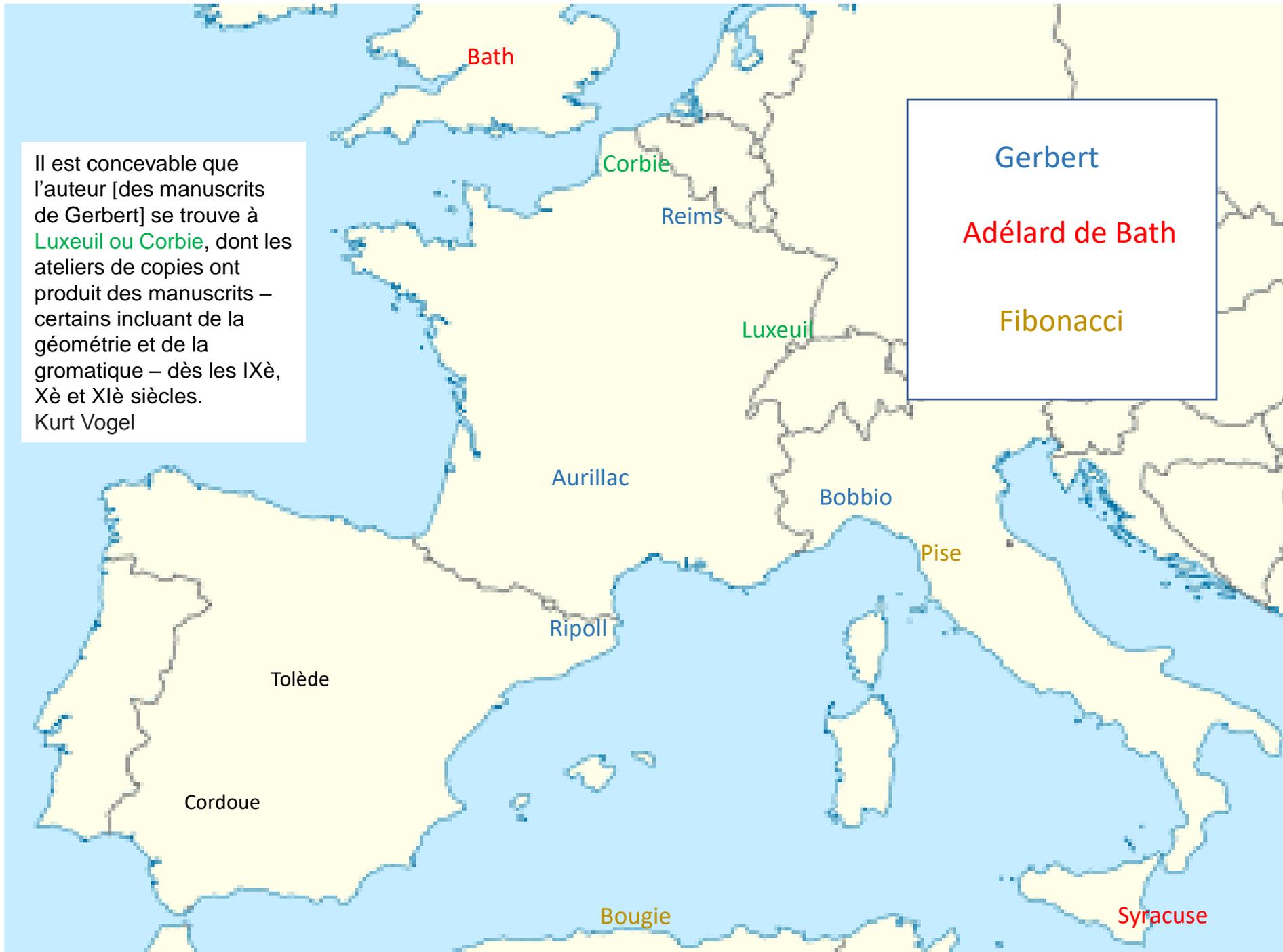
Bougie

Syracuse

Gerbert

Adélarde de Bath

Fibonacci



# Géométries pratiques ?

## Géométries pour tous ?

Considérant que la discipline géométrique toute entière est soit théorique, c'est-à-dire spéculative, soit pratique, c'est-à-dire active, si la théorique est vraiment celle qui recherche avec soin la dimension des espaces et des distances par les seules spéculations du raisonnement, la pratique est celle qui est réalisée à l'aide de quelques instruments et qui tranche en conjecturant proportionnellement certaines distance]de certaines autres.

Hughes de Saint Victor, *Practica geometria* , XIII<sup>e</sup> siècle, trad. Marc Moyon

Leur utilité me semble plus scolaire et pédagogique que professionnelle. .... Aucune de ces mesures ne peut être réalisée sur le terrain directement, car il faut supposer des conditions idéales qui ne sont jamais réunies dans la pratique. Si on entend pratique au sens d'utilitaire, la géométrie pratique n'est pas pratique !

Catherine Jacquemard, *Avant la Practica Geometria attribuée à H de Saint Victor*, 1997