

Mon (petit) théorème de mathémagicien découpeur...

Dominique SOUDER

L'artiste lance un défi à son jeune public...

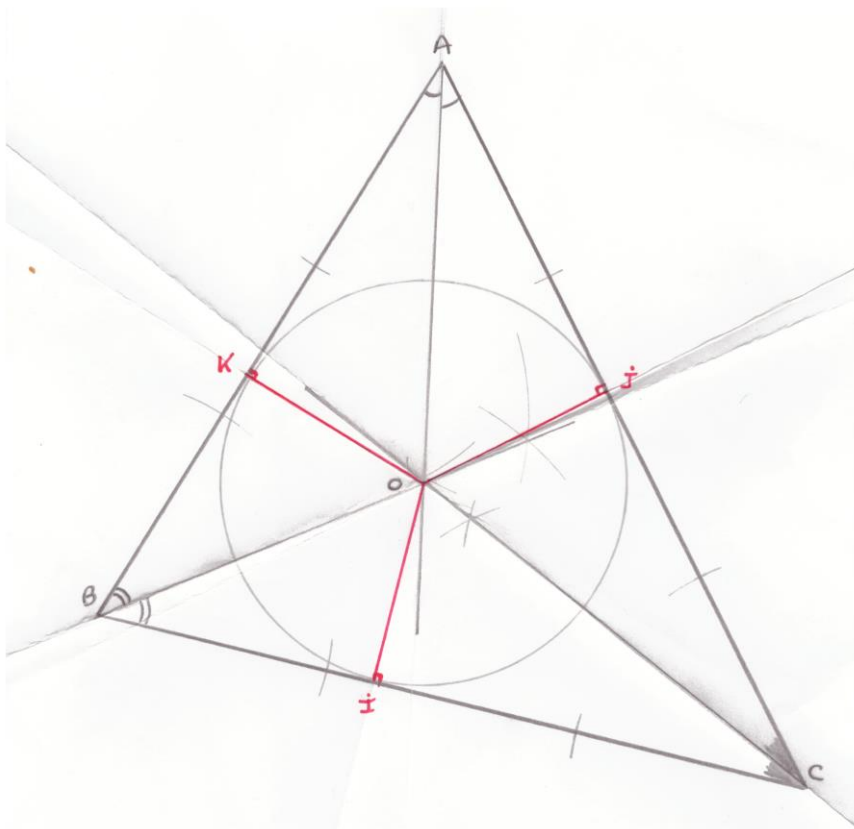
Comment découper d'un seul coup de ciseaux rectiligne le dessin, sur une feuille, d'un triangle !

En classe de 6e on apprend à construire avec un compas la bissectrice d'un angle, c'est-à-dire la droite qui partage un angle en 2 angles égaux.

En classe de 4e j'ai appris que les 3 bissectrices intérieures des angles d'un triangle se coupent en un seul point qui est le centre du cercle inscrit dans ce triangle, lequel est tangent aux 3 côtés du triangle.

Sur la figure ci-dessous :

Le triangle ABC a pour centre de son cercle inscrit le point O obtenu grâce aux droites (AO), (BO), (CO) qui sont les bissectrices des angles du triangle. On a abaissé depuis O les perpendiculaires OI, OJ, OK aux 3 côtés du triangle, et les 3 distances du point O aux côtés du triangle sont égales : $OI = OJ = OK$.

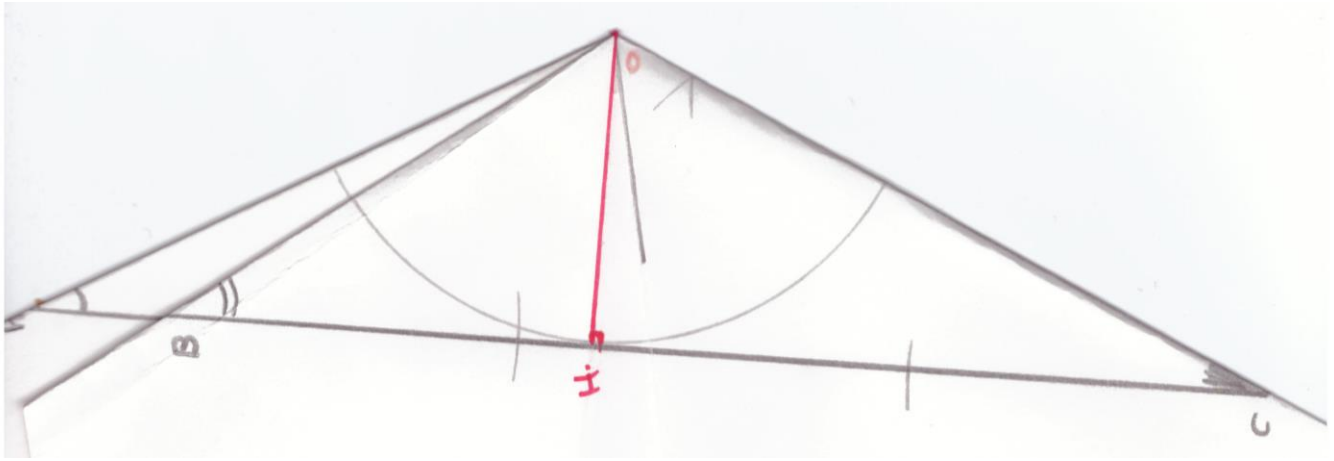


Un peu d'origami maintenant : il s'agit de plier la feuille de papier...

Marquons 3 plis de la feuille selon les bissectrices (AO), (BO), (CO) en plis "montagne".

Marquons maintenant au contraire 3 plis "vallée" (en creux) selon (OI), (OJ), (OK).

Plions en deux la feuille selon la bissectrice (AO) en pli montagne : par transparence on peut voir les droites (AB) et (AC) se superposer même si les longueurs AB et AC ne sont pas égales.



En tenant la feuille avec le point O vers le ciel, utiliser les 3 plis 'vallée" selon (OI), (OJ), (OK) pour que les segments OI, OJ, OK soient confondus et verticaux. En regardant au dessus du point O on voit 3 plans se coupant selon la verticale de O. Si on pousse un des 3 plans sur un autre plan on voit des superpositions de droites :

- par exemple (BIO) peut se superposer sur (AKO), et la droite (BI) donc (BC) se superpose à la droite (AK) donc à (AB).
- par exemple (BKO) peut se superposer sur (CIO), et la droite (BK) donc (BA) se superpose à la droite (CI) donc à (CA).

Les côtés (AB), (BC) et (AC) peuvent se superposer (à voir par transparence).

Vous pouvez couper d'un seul coup de ciseaux en ligne droite selon le plus grand côté (AC) dans notre dessin, ce qui coupe en même temps les 2 autres côtés superposés. Vous pouvez aussi replier les 3 plans l'un sur l'autre pour couper (sur une épaisseur plus grande) : la découpe rectiligne sera plus courte mais dégagera bien le triangle.

Les maths c'est magique !



Vous pouvez voir une petite vidéo de ce découpage à l'adresse :

<https://youtu.be/xVylVpxpMhI>

C'est une « Capsule » réalisée par l'Association Pierre de Fermat de Beaumont de Lomagne.

Réfléchissons maintenant sur une **généralisation**, pour un polygone ayant plus de 3 côtés.

Ce qui compte c'est de pouvoir faire se superposer tous les côtés perpendiculairement à un même segment commun, qui correspondrait aux rayons, perpendiculaires à tous les côtés, d'un cercle inscrit dans ce polygone. Il faut donc s'assurer qu'un tel cercle inscrit dans le polygone existe !

Voici la façon dont le magicien va ruser et proposer son **nouveau tour**...

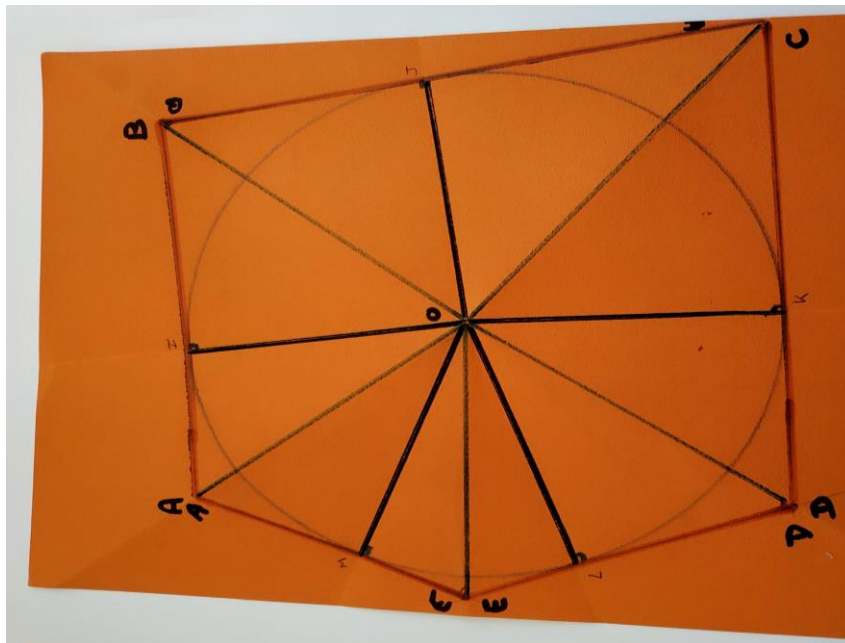
L'artiste demande à un spectateur de dessiner sur une feuille de papier un grand cercle de centre O, puis de tracer un polygone circonscrit à ce cercle, qui pourra avoir 3, 4, 5 ou davantage de côtés. Ceux-ci doivent donc être tous tangents au cercle. Le polygone peut être irrégulier et sans axe de symétrie.

Le magicien annonce alors au spectateur qu'il est capable de découper d'un seul coup de ciseaux rectiligne le polygone que celui-ci vient de tracer.

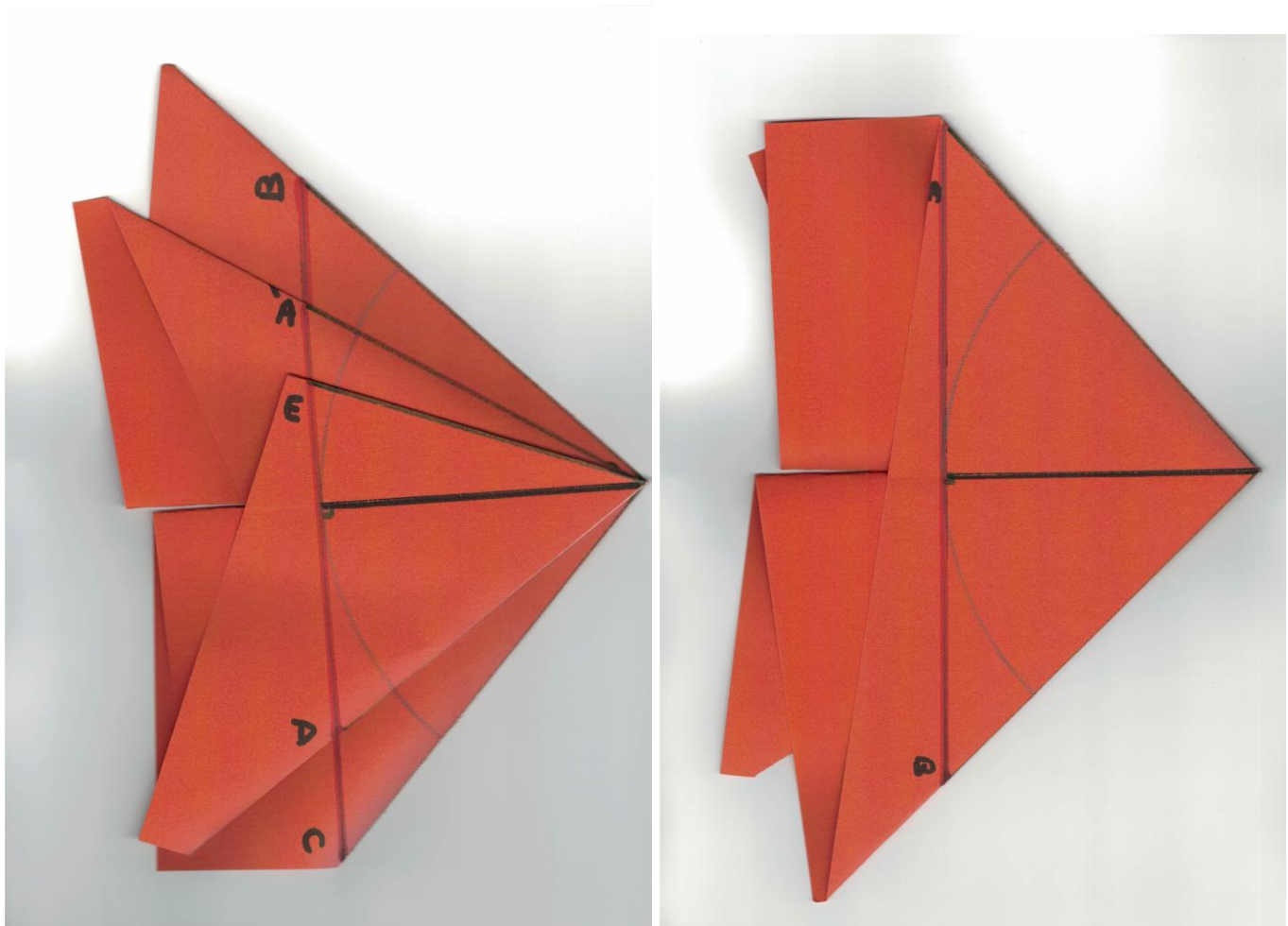
La figure ABCDE ci-dessous est un exemple avec 5 côtés.

Par exemple (AB) est perpendiculaire à (OI), et (AE) est perpendiculaire à (OM).

Depuis un point qui lui est extérieur, les tangentes tracées à un cercle ont la même longueur : ainsi $AI = AM$. Les triangles rectangles AIO et AMO ont les mêmes dimensions, donc ils ont aussi les mêmes angles. La droite (AO) est bissectrice de l'angle EAB. De même (BO), (CO), (DO), (EO) sont les bissectrices des angles du polygone.



La suite est évidente quand on a lu l'exemple premier du triangle. On marque les plis « montagne » des bissectrices (AO), (BO), (CO), (DO), (EO). On marque les plis « vallée » des rayons [OI], [OJ], [OK], [OL], [OM]. On tient la feuille en O, et on fait se superposer ces 5 rayons en un seul. Perpendiculaires à ce rayon, les côtés du polygone vont alors se trouver dans le prolongement l'un de l'autre (voir figures suivantes présentant recto et verso). Il suffira d'un seul coup de ciseaux rectiligne pour découper le polygone.



Le mathémagicien est alors fier de proposer à son public son (petit) théorème :

« Un cercle étant tracé sur une feuille de papier, le dessin de tout polygone convexe qui lui sera circonscrit pourra être découpé d'un seul coup de ciseaux rectiligne ».

Si vous vous posez la question de savoir si l'on peut s'en sortir avec un polygone déjà tracé, qui n'admet pas de cercle inscrit, il faudra faire quelques années d'études mathématiques supplémentaires pour pouvoir affirmer :

« avec un coup de ciseau rectiligne nous pouvons couper n'importe quel polygone ou ensemble de polygones ou encore des polygones avec des trous polygonaux et ce, en coupant uniquement les côtés des polygones et rien d'autre. »

Pour des compléments possibles :

https://www.unige.ch/semainedesmaths/files/3115/0357/2236/CO-PO-Coup_de_ciseau_3.pdf

<http://erikdemaine.org/foldcut/>