Motivons nos enfants pour faire des maths grâce à la magie, ceci à tout âge !

L'Association des Professeurs de Maths de l'Enseignement Public, qui organise tous les ans ses journées nationales, s'y préoccupe toujours de l'enseignement des mathématiques « de la maternelle à l'université ».
Je vous propose de ***suivre un même principe de magie mathématique*** œuvrant dans divers tours dont le niveau de connaissance en maths va ***de la classe de CP jusqu'à celle de Term S***.
Je pense que ce qui va suivre permet d'agrémenter des apprentissages ou des exercices d'entrainement variés correspondants aux programmes successifs des enfants selon leurs âges de 7 à 18 ans.

Le principe

Soient a, b, c, A, B, C des nombres et * une opération entre nombres comme l'addition ou la multiplication, mais pas la soustraction ou la division : il faut que cette opération soit commutative (a*b=b*a) et associative (a*(b*c) = a*(b*c) = a*b*c). Dressez la table de Pythagore de votre opération : vous obtenez 9 résultats sur fond blanc. Entourez 3 cases sur les 9, en veillant à ce qu'il n'y en ait qu'une seule entourée par ligne et une seule par colonne. Plusieurs solutions sont possibles…

*	A	B	C
a	a*A	a*B	a*C
b	b*A	b*B	b*C
c	c*A	c*B	c*C

Faites agir votre opération * entre vos trois valeurs. Changez vos 3 cases entourées en respectant toujours la consigne « une par ligne, une par colonne », faites agir votre opération : vous devriez trouver le même résultat que précédemment. Pourquoi ?

Il se trouve que quand vous faites agir * entre vos 3 valeurs entourées, c'est finalement entre les 6 valeurs sur fond rouge, qui ont permis de dresser la table de l'opération * , que vous la faites agir. Ainsi, par exemple :
- à partir des 3 cases (a*A), (b*C) et (c*B) vous obtenez : (a*A)*(b*C)*(c*B) qui peut s'écrire a*b*c*A*B*C grâce aux propriétés de commutativité et d'associativité de votre opération.
- à partir des 3 cases (b*A), (a*C) et (c*B) vous obtenez : (b*A)*(a*C)*(c*B) qui peut s'écrire encore a*b*c*A*B*C grâce aux propriétés de commutativité et d'associativité de votre opération. Etc.

Ce principe peut être utilisé avec diverses opérations possédant les bonnes propriétés, et des tableaux ayant un nombre de cases supérieur : 4x4 (on entoure 4 cases), 5x5 (on entoure 5 cases), …, 10x10 (on entoure 10 cases), etc. A partir du moment où les cases entourées respectent la consigne « une par ligne, une par colonne », le résultat de l'action de l'opération * entre vos cases choisies sera toujours le même : ce sera celui qu'on obtient en faisant agir * entre tous les nombres qui ont servi à dresser la table de votre opération *.

La présentation sous forme de tour de magie [Tour n°1]

Vous enseignez en primaire, vous voulez rendre les mathématiques joyeuses et les faire entrer dans la vie quotidienne, voici comment faire construire à vos élèves un cadeau d'anniversaire original pour un membre de leur famille (maman ou grand père…). Supposons qu'il s'agisse de fêter le 36^{e} anniversaire d'une personne. Choisissons un tableau de 4x4 = 16 cases qui servira de cadeau mathémagique (voir ci-dessous). Vous placez dans 7 (sur les 8) cases rouges quelques petits nombres. Vous faites leur total. Si vous trouvez 29, vous calculez alors qu'il faut mettre 36-29 = 7 dans la 8e case rouge, afin que le total des 8 cases rouges fasse bien 36. Vous dressez ensuite la table de Pythagore de l'opération « addition », et vous coupez les bords rouges (ligne du haut, et colonne de gauche) : il vous reste le tableau de 16 cases à fond blanc.

+	3	5	6	7
1	4	6	7	8
2	5	7	8	9
4	7	9	10	11
8	11	13	14	15

4	6	7	8
5	7	8	9
7	9	10	11
11	13	14	15

L'enfant apporte le tableau à la personne à laquelle il veut souhaiter bon anniversaire, avec 4 pions, et demande de placer ceux-ci en respectant la consigne « un par ligne, un par colonne ». La personne doit ajouter les 4 valeurs écrites sous les pions, elle trouvera 36. On lui fait trouver une autre solution de positionnement des pions, le total des 4 nombres sera encore 36 : décidemment, bon 36e anniversaire !

Motivons pour un apprentissage [Tour n°2]

Vous souhaitez faire apprendre à un petit enfant des mots difficiles pour désigner des nombres s'écrivant avec un 1 suivi de beaucoup de zéros : mille, cent mille, un million, un milliard, etc. (que vous appellerez les puissances de 10 plus tard) ? Voici un jeu, où il faudra cette fois-ci multiplier, pour motiver ces jeunes têtes blondes…

Partez d'une table de multiplication de 3x3 = 9 cases comme la suivante :

×	1	10	1 000
1	1	10	1 000
100	100	1 000	100 000
10 000	10 000	100 000	10 000 000

Un	Dix	Mille
Cent	Mille	Cent mille
Dix mille	Cent mille	Dix millions

Avant de couper les bords colorés habituels, et au lieu d'écrire sur les neuf cases blanches les nombres en chiffres, écrivez-les plutôt en lettres… Faites choisir 3 nombres « un seul par ligne, un seul par colonne ». Faites faire la multiplication des trois nombres choisis (en comptant bien les zéros) ! Faites écrire le résultat en chiffres avec le nombre adéquat de zéros (10 000 000 000), demandez comment le résultat se prononce, et faites-le écrire en lettres (dix milliards)… Recommencez avec d'autres positions des trois nombres pour mettre en valeur la surprise de toujours trouver le même produit. Pour présenter encore mieux, préparez avant de faire le tour une reproduction du capitaine Haddock en furie dans « Tintin et le crabe aux pinces d'or », modifiez une bulle de ses jurons en écrivant « dix millions de mille sabords c'est dix milliards de sabords et il y a dix zéros ! », mettez cette image dans une enveloppe que vous laisserez trainer sur votre table : vous la sortirez et la montrerez devant votre petit public à la fin du tour…

Vous serez d'accord, j'espère, sur le fait que voilà une façon ludique et motivante pour les plus jeunes des écoliers de se familiariser avec ces nombres et leurs écritures !

Les puissances de 10 au collège [Tour n°3]

Vous enseignez en quatrième et vous espérez faire faire à vos élèves quelques calculs d'entraînement sur les puissances de 10 à exposants entiers positifs et négatifs, sans qu'ils rechignent à la tâche, et même en leur faisant relever un défi ?

dix	10^{-2}	10^{2}	10^{5}
un centième	10^{-5}	un dixième	10^{2}
cent	10^{-1}	mille	un million
cent mille	100	un million	un milliard

Faites leur trouver le plus de positionnements « un par ligne, un par colonne » de 4 pions à partir du tableau ci-dessous, puis écrire et calculer les produits des puissances de 10 associées aux 4 pions… Surprise : tous les produits seront égaux ! Les élèves sauront-ils trouver pourquoi ?

Ci-dessous voici comment le tableau a été construit : c'est une table de multiplication à partir de 8 nombres sur fond rouge dont le produit est : $1 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{4} \times 10 \times 10^{-2} \times 10^{2} \times 10^{5} = 10^{8}$, soit 100 000 000 ou cent millions.

Comme il n'y a qu'un seul pion sur la même ligne on ne peut utiliser deux fois le nombre rouge de cette ligne pour des jetons différents. Comme il n'y a qu'un seul pion sur la même colonne on ne peut utiliser deux fois le nombre rouge de cette colonne pour des jetons différents. Les quatre jetons utilisent donc les huit nombres rouges. Le produit des quatre jetons est égal au produit des huit nombres rouges, c'est pour cela qu'on trouve toujours le même résultat final.

$\times$	**10**	**10^{-2}**	**10^{2}**	**10^{5}**
1	**10**	**10^{-2}**	**10^{2}**	**10^{5}**
10^{-3}	**10^{-2}**	**10^{-5}**	**10^{-1}**	**10^{2}**
10	**10^{2}**	**10^{-1}**	**10^{3}**	**10^{6}**
10^{4}	**10^{5}**	**10^{2}**	**10^{6}**	**10^{9}**

Et au lycée alors ?

Les occasions seront encore plus nombreuses de mettre en œuvre le principe magique qui nous occupe, pour faire passer des notions parfois ingrates, ou pour varier les présentations d'exercices d'entraînement à l'application de certaines propriétés fondamentales...

Les angles modulo 2π au lycée [Tour n°4]

Trouvez le plus de positionnements possibles « un par ligne, un par colonne » de 4 pions à partir du tableau ci-dessous, puis écrivez et calculez les sommes, modulo 2π , des 4 angles choisis.
[Pour plus d'efficacité on pourra remplacer, dans le tableau et les calculs, les mesures de certains angles par celles qui sont équivalentes entre 0 et 2π].
Que remarquez-vous ? Pourquoi ? [Voir les pages « solutions »]

$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	π
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{12}$
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	2π	$-\frac{\pi}{3}$
$\frac{11\pi}{12}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{17\pi}{12}$

Additions de logarithmes [Tour n°5]

Ln(3/4)	Ln(9/2)	Ln3	-Ln2
-Ln3	Ln2	Ln(4/3)	Ln2 – Ln9
-Ln8	Ln(3/4)	Ln(1/2)	-Ln12
Ln2	Ln4 + Ln3	Ln8	Ln(4/3)

Trouvez le plus de positionnements possibles « un par ligne, un par colonne » de 4 pions à partir du tableau ci-dessous, puis écrivez et calculez les sommes des 4 nombres choisis.
[On pourra s'aider de l'écriture de toutes les cases sous la forme du Ln d'un rationnel]
Que remarquez-vous ? Pourquoi ? [Voir les pages « solutions »]

Multiplications d'exponentielles [Tour n°6]

Trouvez le plus de positionnements possibles « un par ligne, un par colonne » de 4 pions à partir du tableau ci-dessous, puis écrivez et calculez les produits des 4 nombres choisis.
[On pourra mettre tous les nombres sous la forme e^k avec k rationnel]

$e^{1/2}$	1	$e^{-3/2}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
e^{4}	$e^{3,5}$	e^{2}	e^{3}
e^{3}	$e^{2,5}$	e	e^{2}
$\frac{1}{e}$	$e^{-1,5}$	e^{-3}	$\frac{1}{e^2}$

Que remarquez-vous ?
Vérifiez que ce tableau 4x4 peut être celui d'une table de multiplication, en imaginant pour les cases colorées des valeurs adaptées permettant sa construction :

x				
	$e^{1/2}$	1	$e^{-3/2}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
	e^{4}	$e^{3,5}$	e^{2}	e^{3}
	e^{3}	$e^{2,5}$	e	e^{2}
	$\frac{1}{e}$	$e^{-1,5}$	e^{-3}	$\frac{1}{e^2}$

[Voir les pages « solutions »]

Additions de nombres complexes [Tour n°7]

Trouvez le plus de positionnements possibles « un par ligne, un par colonne » de 4 pions à partir du tableau ci-dessous, puis écrivez et calculez les sommes des 4 nombres choisis. Que remarquez-vous ? Pourquoi ? Proposez une manière dont on a pu construire ce tableau.

$\frac{i}{1+i}$	$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$	$\frac{1+3i}{2+i}$	**-1+i**
$\frac{2-i}{1+i}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$	$\frac{3-i}{2+i}$	**-1-i**
$\frac{-1}{1+i}$	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$	$\frac{-1+2i}{2+i}$	**-2+i**
$\frac{3}{1+i}$	$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$	$2-i$	**-i**

[Voir les pages « solutions »]

Multiplications de nombres complexes [Tour n°8]

Trouvez le plus de positionnements possibles « un par ligne, un par colonne » de 4 pions à partir du tableau ci-dessous, puis écrivez et calculez les produits des 4 nombres choisis.
[On pourra mettre toutes les cases sous la forme $\alpha e^{ki\pi}$ avec α réel et k rationnel].
Que remarquez-vous ? Pourquoi ? Proposez une façon dont on a pu construire ce tableau.

$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$	$\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	1	$\sqrt{2}e^{\frac{19i\pi}{12}}$
1+i	1-i	$\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}}$	2
-i	-1	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	-1-i
$e^{i\pi}$	i	$\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$	-1+i

[Voir les pages « solutions »]

A vous, lecteur, maintenant, de poursuivre cette aventure mathématique : je suis sûr que vous trouverez d'autres idées à la fois utiles et originales pour faire des maths en jouant…

Remerciements :
à Monsieur Fabien Sommier, du lycée André Boulloche, pour ses idées et son travail de compléments pour le niveau lycée, donnés lors d'un stage au Palais de la Découverte à Paris.

<u>SOLUTIONS</u> : « faire des maths grâce à la magie »

Les angles modulo 2π [Tour n°4]

On trouve toujours pour total des 4 cases : $\frac{2\pi}{3}$ modulo 2π.

Une possibilité de construction de la table d'addition est de prendre les 8 nombres sur fond de couleur, dont le total des mesures modulo 2π est $\frac{2\pi}{3}$.

+ Mod 2π	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	π
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{12}$
$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	2π	$-\frac{\pi}{3}$
$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{17\pi}{12}$

Additions de logarithmes [Tour n°5]

On trouve toujours pour total des 4 cases : 0.

Une possibilité de construction de la table d'addition est de prendre les 8 nombres sur fond de couleur, dont le total est 0.

+	0	Ln3 + Ln2	2Ln2	Ln2 – Ln3
Ln3 -2Ln2	Ln(3/4)	Ln(9/2)	Ln3	-Ln2
- Ln3	-Ln3	Ln2	Ln(4/3)	Ln2 – Ln9
-3Ln2	-Ln8	Ln(3/4)	Ln(1/2)	-Ln12
Ln2	Ln2	Ln4 + Ln3	Ln8	Ln(4/3)

Multiplications d'exponentielles [Tour n°6]

On trouve toujours comme produit des 4 cases la valeur e^3.
On peut construire la table de multiplication à partir des nombres des 8 cases de couleur ci-dessous, dont le produit est e^3.

x	e^3	$e^{2,5}$	e	e^2
$e^{-2,5}$	$e^{1/2}$	e^0	$e^{-3/2}$	$e^{-1/2}$
e	e^4	$e^{3,5}$	e^2	e^3
1	e^3	$e^{2,5}$	e	e^2
e^{-4}	e^{-1}	$e^{-1,5}$	e^{-3}	e^{-2}

Additions de nombres complexes [Tour n°7]

Le total des 4 cases est toujours 1.
On peut construire la table d'addition à partir des nombres des 8 cases de couleur ci-dessous, dont la somme est 1.

$+$	$\frac{2-i}{1+i}$	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$	2	0
$-1+i$	$\frac{i}{1+i}$	$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$	$\frac{1+3i}{2+i}$	$-1+i$
$-1-i$	$\frac{2-i}{1+i}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$	$\frac{3-i}{2+i}$	$-1-i$
$-2+i$	$\frac{-1}{1+i}$	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$	$\frac{-1+2i}{2+i}$	$-2+i$
$-i$	$\frac{3}{1+i}$	$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$	$2-i$	$-i$

Multiplications de nombres complexes [Tour n°8]

On trouve toujours comme produit des 4 cases la valeur 2.
On peut construire la table de multiplication à partir des nombres des 8 cases de couleur ci-dessous, dont le produit est 2.

x	$e^{-i\frac{\pi}{6}}$	$e^{-2i\frac{\pi}{3}}$	1	$\sqrt{2}e^{\frac{19i\pi}{12}}$
1	$e^{-i\frac{\pi}{6}}$	$e^{-2i\frac{\pi}{3}}$	e^0	$\sqrt{2}e^{\frac{19i\pi}{12}}$
$\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}}$	$\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$	$\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$	$\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}}$	$2\ e^0$
$e^{-i\frac{\pi}{3}}$	$e^{-i\frac{\pi}{2}}$	$e^{-i\pi}$	$e^{-i\frac{\pi}{3}}$	$\sqrt{2}e^{-\frac{3i\pi}{4}}$
$e^{\frac{7}{6}i\pi}$	$e^{i\pi}$	$e^{i\frac{\pi}{2}}$	$e^{\frac{7}{6}i\pi}$	$\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$