CONCOURS NATIONAL TUNISIEN DE MATHÉMATIQUES A.T.S.M.

Instrument privilégié de motivation des lycéens pour les mathématiques, le Concours National de Mathématiques organisé par l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques (A.T.S.M.) est ouvert aux meilleurs élèves de sixième année du secondaire. Il leur permet de mettre en valeur leur capacité à appréhender les situations nouvelles faisant intervenir les qualités de patience, d'intuition, de finesse et de rigueur.

Le concours national représente pour l'ATSM et donc pour les enseignants de mathématiques, un des instruments privilégiés pour évaluer certains aspects de l'enseignement des mathématiques, en particulier le degré d'assimilation de certains concepts importants. Il permet également de recenser certains types d'erreurs de nature à amener les enseignants à changer d'attitude et de comportement pédagogiques dans l'introduction de certaines notions.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

Le Concours se déroule chaque année au mois de mai depuis 1976.

Une préparation des jeunes lauréats est prise en charge par l'ATSM en vue des Olympiades maghrébines et internationales.

L'ATSM organise aussi depuis quelques années les phases tunisiennes (demi-finales et finale nationale) du championnat international des jeux mathématiques FFJM.

EPREUVES

Individuelles.
Catégorie : 6ème année du secondaire.
Exercices : Aucun programme officiel, aucune érudition supposée.Les énoncés sont choisis de manière à ce que les candidats puissent utiliser leurs connaissances et les méthodes qu'ils ont acquises en secondaire.

COMPETITION

Les élèves sont sélectionnés par établissements.
Le concours a lieu chaque année au mois de mai.

PARRAINS

Ministère de l'Education Nationale de Tunisie.

Revue de l'ATSM :
Omar Khayam

CONTACTS

ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
Bechir Kachouch
43, rue de la Liberté
2019 Le Bardo
Tunis TUNISIE
Tél : (216) 1 261 455
Fax : (216) 568 954

1 - EXERCICE 1 (1986)

Soient a_1, a_2 ....a_n des rééls. Pour tout réel x, on pose :

$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x ...... + a_n \sin nx$.

On suppose que : $\forall x \in r \quad | f(x) | \leq | \sin x |$

Montrer que : $|a_1 + 2a_2 + ... n\, a_n| \leq 1$

2 - EXERCICE 2 (1986)

Soit ABC un triangle tel que ACB = $\pi/3$

Montrer que : $1/BC + 2/CA \geq 2/AB$

3 - EXERCICE 3 (1986)

Un cercle (C) varie tout en restant tangent à une droite fixe D en un point fixe A.

Déterminer l'ensemble des sommets du carré admettant un diamètre [MN] comme diagonale, sachant que la droite (MN) appartient à une direction fixe.

4 - EXERCICE 4 (1986)

Trouver tous les entiers n tels que $(n^4 + 4)$ est premier.

5 - EXERCICE 1 (1995)

Soit ABC un triangle ; on désigne par α, β, γ, les mesures en radians des angles BAC, ABC, BCA respectivement.
On suppose que $\pi/3 < \gamma < \alpha$.

Déterminer le signe du réel $x = \sin \alpha + \sin \gamma - 2 \sin \beta$.

6 - EXERCICE 2 (1995)

ABC est un triangle isocèle (AB = AC). On suppose que :

a - M est le milieu de [BC] et O est le point de la droite (AM) tel que le droite (OB) soit perpendiculaire à la droite (AB) ;

b - Q est un point quelconque du segment [BC] différent de B et de C

c - E est un point de la droite (AB) et F de la droite (AC) tels que E, Q et F soient alignés et distincts.

Montrer que la droite (OQ) est perpendiculaire à la droite EF si et seulement si QE = QF.

7 - EXERCICE 3 (1995)

Soient a et b deux réels strictement positifs.

Démontrer que $\sqrt{b} < 1 + \sqrt{a}$ si et seulement si :

pour tout réel $x > 1$, $ax^2 + (1 - a - b)x + b > 0$

8 - EXERCICE 4 (1995)

Dans le plan orienté on considère un triangle isocèle (ABC) où AB = AC. On désigne par I,J,K les pieds des hauteurs de ce triangle issues respectivement de A, B et C.
Soient ω_1, ω_2, H le milieu de [AB], le milieu de [AC] et l'orthocentre de (ABC) respectivement.
Soit Δ une droite variable passant par A ; les perpendiculaires à Δ issues de B et C coupent Δ respectivement en M et N.
1) Montrer que $(IM, IN) = (I\omega_1, I\omega_2) \quad [2\pi]$
Comparer BM et KN d'une part et CN et JM d'autre part.
2) les droites (BM) et (KN) se coupent en P et les droites (CN) et (JM) se coupent en Q.
Montrer que la droite (PQ) passe par un point fixe lorsque (Δ) varie. Comparer BP et JQ puis CQ et KP.

1

Exercice n° 1

Nous avons : $f'(x) = a_1 \cos x + 2a_2 \cos 2x + \ldots + na_n \cos nx$
d'où $f'(o) = a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n$.
D'autre part, au voisinage de 0, $\lim f(x)/x = f'(o)$
D'après l'hypothèse, $f(x) \leq \sin x$ d'où pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[- \{o\}$
$F(x)/x = f(x)/\sin x \times \sin x/x \leq \sin x/x \leq 1$
On vérifie facilement que $\sin x \leq x$ et par suite
$\lim f(x)/x = f'(o) \leq 1$.

2

Exercice n°2

Posons $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.
Dans le triangle ABC, nous avons $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \pi/3$ ou
$c^2 = a^2 + b^2 - ab$; d'autre part il est évident que $a^2 + b^2 - ab \geq ab$
d'où (1) : $c^2 \geq ab$; d'un autre côté $(1/a + 1/b)^2 \geq 4/ab$ (2)
donc $ab \geq 4(1/a + 1/b)^{-2}$ (3) ; de (1) et de (3) nous concluons que
$c^2 \geq 4(1/a + 1/b)^{-2}$ et par suite $1/a + 1/b \geq 2/c$

3

Exercice n° 3

Soient δ la direction de la droite donnée, $\mathcal{C}_o$ un cercle fixe tangent en A à D et $\mathcal{C}$ un cercle variable tangent en A à D.
Dans le cercle $\mathcal{C}_o$ le diamètre recherché est $M_o N_o$ et dans le cercle $\mathcal{C}$ c'est MN. Ces deux diamètres se correspondent dans l'homothétie de centre A qui fait correspondre les deux cercles. Donc A, M et M_o sont alignés. Il en est de même pour A, N et N_0. Les ensembles des points M et N sont donc respectivement les droites (AM_o) et (AN_o). Soit P_oQ_o le diamètre de $\mathcal{C}_o$ perpendiculaire à $M_o N_o$; $P_o Q_o$ coupe $\mathcal{C}$ en P et en Q. $P_o Q_o$ et PQ se correspondent dans l'homothétie considérée donc $P \in (AP_o)$ et $Q \in (AQ_o)$. Les ensembles des points P et Q sont respectivement les droites (AP_o) et (AQ_o).

4

Exercice n° 4

$n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$. On remarque que pour $n \in \mathbb{N}$, $(n^2 + 2n + 2) > 1$. Pour que $n^4 + 4$ soit premier, il est donc nécessaire que $(n^2 - 2n + 2)$ soit égal à 1. La seule valeur de l'entier n pour laquelle $(n^2 + 2n + 2) = 1$ est $n = 1$. Et on vérifie que pour $n = 1$, $n^4 + 4 = 5$ est premier.

5

Exercice n° 1 (1995)

$x = 2\sin[(\alpha+\gamma)/2]\cos[(\alpha-\gamma)/2] - 4\sin\beta/2\cos\beta/2$

$= 2\cos\beta/2\cos[(\alpha+\gamma)/2] - 4\sin\beta/2\cos\beta/2$

$= 2\cos\beta/2\,[\cos(\alpha+\gamma)/2 - 2\sin\beta/2]$

$= 2\cos\beta/2\,[\cos(\alpha+\gamma)/2 - 2\cos(\alpha+\gamma)/2]$

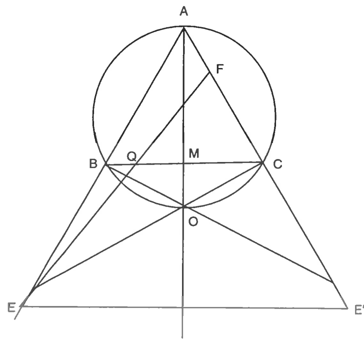
$= 2\cos\beta/2\,[3\sin\alpha/2\sin\gamma/2 - \cos\alpha/2\cos\gamma/2]$

$= 2\cos\beta/2\cos\alpha/2\,[3\,\mathrm{tg}\,\alpha/2\,\mathrm{tg}\,\gamma/2 - 1]$

Or $\pi/6 < \alpha/2 < \pi/2$ et $\pi/6 < \gamma/2 < \pi/2$ d'où $\mathrm{tg}\,\alpha/2\,\mathrm{tg}\gamma/2 > (1/\sqrt{3})^2$ et par suite $3\,\mathrm{tg}\,\alpha/2\,\mathrm{tg}\,\gamma/2 - 1 < 0$. En conclusion, $x > 0$.

6

Exercice n° 2 (1995)



1. Supposons (OQ $\perp$ (QF). Les quadrilatères (OQFC) et (OQBE) sont inscriptibles donc EFO = BCO = OBC = FEO par suite OF = OE et QF = QE.

2. Supposons que QF = QE Soit E' le symétrique de E par rapport à (AO) ; O est donc le centre du cercle (FEE') donc OE = OF et par suite (OQ) $\perp$ (EF).

7

Exercice n° 3 (1995)

Posons $f(x) = ax^2 + (1 - a - b)x + b$ et $x = 1 + X$. Nous avons :

$g(X) = f(1 + X) = aX^2 + (a - b + 1)X + 1$.

La proposition P : $\forall x > 1, f(x) > 0$ est équivalente à

(P') : $\forall X > 0, g(X) > 0$. Il s'agit de prouver que (P') $\Leftrightarrow \sqrt{a} + 1 > \sqrt{b}$.

1. Supposons (P')

α) si $\Delta = (a - b + 1)^2 - 4a < 0$ alors $-2\sqrt{a} < a - b + 1 < 2\sqrt{a}$.

Ce qui implique $a - b + 1 > -2\sqrt{a}$ ou $(\sqrt{a} + 1)^2 > b$ d'où $\sqrt{a} + 1 > \sqrt{b}$

β) si $\Delta \geq 0$ alors g admet deux racines X' et X'' distinctes ou confondues et (P') implique nécessairement $X' + X'' = (b - a - 1)/a < 0$ d'où $(a + 1) > b$ et $\sqrt{a} + 1 > \sqrt{(a+1)} > b$ et par suite $\sqrt{a} + 1 > b$.

2. Supposons $\sqrt{a} + 1 > \sqrt{b}$.

L'hypothèse $\sqrt{a} + 1 > \sqrt{b}$ est équivalente à (*) $a - b + 1 > -2\sqrt{a}$

Envisageons alors les deux cas suivants :

γ) $a - b + 1 < 2\sqrt{a}$. Dans ce cas $\Delta < 0$ donc $g(X) > 0\ \forall X > 0$

δ) $a - b + 1 \geq 2\sqrt{a}$. Dans ce cas $\Delta \geq 0$, $X' + X'' = b - a - 1/a < 0$

d'où $\mathbf{g(X) > 0}\ \forall X > 0$.