CONCOURS GENERAL

Le Concours Général est une institution qui date du XVIIIème siècle. La première distribution des prix a eu lieu le 1er juillet 1744. Supprimé sous la Révolution, il a connu d'autres périodes de «disgrâce» de 1904 à 1922 et au début des années 1980. Depuis, l'épreuve a repris son essor et les candidats en mathématiques sont passés de 1700 en 1994 à 2300 en 1995.
Les lauréats reçoivent de beaux livres en présent mais le Concours Général reste avant tout une épreuve honorifique.
L'épreuve mathématique qui se déroule en une fois sur cinq heures a évolué vers un style proche de celui des Olympiades.
Une plaisante tradition est même héritée de cette dernière compétition qui consiste à insérer dans au moins un exercice les chiffres de l'année en cours.
Les épreuves sont découpées en tranches assimilables par des élèves de Terminale C.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

1744 : Création de fondations de prix et première distribution de prix le 1er juillet.

1989 : 1202 candidats

1994 : 1700 candidats

1995 : 2300 candidats

EPREUVES

Individuelles

Catégories : Terminales
5 erxercices sont proposés aux candidats. Depuis une dizaine d'années, ils sont construits sur un modèle proche des Olympiades Internationales.

PARRAINS

Ministère de l'Éducation Nationale (organisateur)

COMPETITION

Une seule épreuve de cinq heures, décentralisée dans un certain nombre de lycées.

Le nombre de participants dans chaque lycée est limité.

Pour être primé, il suffit d'avoir résolu la moitié à 2/3 de l'épreuve.

CONTACTS

Adressez-vous au rectorat de votre Académie.

1 - EXERCICE 1 (1994)

Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, on note I_n le nombre d'entiers p pour lesquels $50^n < 7^p < 50^{n+1}$

Démontrer que tout entier n, I_n vaut 2 ou 3

Demontrer qu'il existe une infinité d'entiers n pour lesquels I_n vaut 3 et donner le plus petit d'entre eux.

2 - EXERCICE 2 (1994)

Soit Σ une demi-sphère et P le plan contenant son cercle de base. Un plan variable Q, parallèle à un plan fixe non perpendiculaire à P, coupe Σ suivant un cercle C. On désigne par C' le projeté orthogonal de C sur P.

Comment doit-on placer le plan Q pour que le cylindre de bases C et C' ait un volume maximal ?

3 - EXERCICE 3 (1994)

On définit une application f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ par :
$f(1) = 0$ et pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$:
$f(2n) = 2f(n) + 1, f(2n+1) = 2f(n)$
Etant donné un entier strictement positif p quelconque, on pose :
$u_0 = p$ et, tant que u_k appartient à $\mathbb{N}^*$, $u_k + 1 = f(u_k)$.

1. Montrer que pour tout choix de p, il existe un unique entier v (p) tel que $u_{v(p)} = 0$

2. a : calculer v (1994). Quel est le plus petit entier p tel que v(p) = v(1994) ?

   b : étant donné un entier *N*, déterminer le plus petit entier p tel que v (p) = *N*.

4 - EXERCICE 4 (1994)

Soit (ABC) un triangle. Si P est un point de son plan, on note L, M, N, les projetés orthogonaux de P respectivement sur les droites (BC) (CA) et (AB).

Déterminer le point P pour lequel la quantité $BL^2 + CM^2 + AN^2$ est minimale.

5 - EXERCICE 5 (1994)

Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que : $f(1) > 0$ et quels que soient les entiers naturels m et n, on a :

$$f(m^2 + n^2) = \{ f(m) \}^2 + \{ f(n) \}^2$$

1. Calculer f (k) pour $o \leq k \leq 12$
2. Calculer f(n), n étant un entier quelconque

6 - EXERCICE 1 (1996)

Dans le plan, on considère un triangle ABC et les six points D, E, F, G, H, I tels que ABED, BCFG et ACHI soient des carrés extérieurs à ABC.

Montrer que les points D, E, F, G, H, I sont cocycliques si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivants :

- le triangle ABC est équilatéral ;
- le triangle ABC est rectangle et isocèle.

7 - EXERCICE 2 (1996)

Soient a un entier naturel ompair et b un entier naturel strictement positif.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in N}$ ainsi définie :
$u_o = b$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} \text{si } u_n \text{ est un entier pair, alors} & u_{n+1} = u_n \\ \text{sinon,} & u_{n+1} = a + u_n \end{cases}$$

1. Démontrer qu'on peut trouver un entier naturel n tel que : $u_n \leq a$

2. Démontrer que la suite est périodique à partir d'un certain rang.

8 - EXERCICE 3 (1996)

1. Soit un parallélépipède rectangle. Montrer qu'on peut choisir quatre de ses sommets de façon à obtenir un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.

2. Réciproquement, montrer que tout tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles peut s'obtenir en choisissant quatre sommets d'un triangle rectangle.

3; Rechercher parmi ces tétraèdres ceux qui ont aussi au moins deux faces isocèles. Donner les longueurs de leurs arêtes en fonction de la longueur *a* de la plus petite arête.

9 - EXERCICE 4 (1996)

1. Soit la fonction f définie pour tout réel strictement positif, par $f(x) = x^x$

Déterminer la valeur minimale prise par cette fonction lorsque x décrit l'ensemble des réels strictement positifs.

2. Soient x et y deux réels strictement positifs, montrer que $x^y + y^x > 1$

10 - EXERCICE 5 (1996)

Soient n un entier naturel non nul. On dit qu'un entier naturel non nul k vérifie la condition C_n s'il existe 2k entiers naturels non nuls $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$, tous distincts tels que les sommes $a_1 + b_1, \ldots,$ $a_k + b_k$ soient deux à deux distinctes et strictement inférieures à n.

1. Montrer que si k vérifie la condition C_n, alors $K \leqq \frac{2n-3}{5}$

2. Montrer que 5 vérifie la condition C_{14}.

3. On suppose $\frac{2n-3}{5}$ entier. Montrer que $\frac{2n-3}{5}$ vérifie la condition C_n.

1994 Exercice 1 (Solution de Robert Ferréol)

1. On a : $50^n < 7^p < 50^{n+1} \Leftrightarrow n \ln 50 < p \ln 7 < (n+1) \ln 50$

$\Leftrightarrow n\ p\ \alpha < n+1$ où $\alpha = \ln(7)/\ln(50)$

I_n est donc le nombre d'entiers p tels que $n < p\ \alpha < n+1$
comme α est $< 1/2$ (car $7^2 < 50$) $\quad I_n \geq 2$
et comme α est $> 1/3$ (car $7^3 > 50$) $\quad I_n \leq 3$
2. Supposons que I_n soit toujours égal à 2.
$50^0 < 7^1 < 7^2 < 50^1$
$50^1 < 7^3 < 7^4 < 50^2$, etc.
On aurait pour tout n : $\quad 50^n < 7^{2n+1} < 7^{2n+1} \leq 50^n$
On aurait donc $(50/49)^n < 7$ pour tout m, ce qui est absurde car
$\lim\ (50/49)^n = \infty$
1 Il existe donc des entiers n tels que In est égal à 3.
De plus, le plus petit d'entre eux est le plus grand entier n tel que $(50/49)^n$ soit < 7 ;
On trouve $\quad$ **$n = [\ln 7 / \ln (50/49)]$**

$= 96$

Montrons maintenant qu'il existe une infinité de n tels que I_n soit égal à 3.
En effet, si n est un tel entier, il existe p tel que
$50^n < 7^p < 7^{p+2} < 50^{n+1}$
donc $\quad 50^2\ n < 7^2\ p < 7^{2p+4} < 50^{2n+2}$
Comme de 7^{2p} à 7^{2p+4} il y a 5 puissances de 7 consécutives,
$I_{2n} + I_{2n+1} = 5$ donc I_{2n} ou $I_{2n+1} = 3$
Pour tout entier n tel que $I_n = 3$, il, existe un entier n' strictement plus grand tel que $I_{n'} = 3$ **CQFD**
Le lecteur pourra même montrer que le i-ème nombre n tel que $I_n = 3$ vaut $[i \ln 7 / \ln (50/49)]$.

1994 Exercice 3 (Réponse expresse)

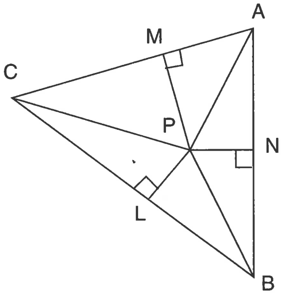
1. En utilisant l'écriture binaire des nombres, on montre que pour n>0, f(n)<n.Il en résulte que la suite u_n est strictement décroissante et qu'il
3 existe un unique entier v(p) tel que $u_{v(p)} = 0$.

2. a) v(1994) = v(42) = 6. 42 est le plus petit p tel que v(p) = 6.
2. b) Plus généralement, le plus petit p tel que v(p) = N est :
– Si N est pair, $p = (2^{N+1} - 2)/3$
– Si N est impair, $p = (2^{N+1} - 1)/3$

Solutions

4

1994 Exercice 4 (Solution de Robert Ferréol)



D'après le théorème de Pythagore,

$BL^2 = PB^2 - PL^2$ $\quad CL^2 = PC^2 - PL^2$

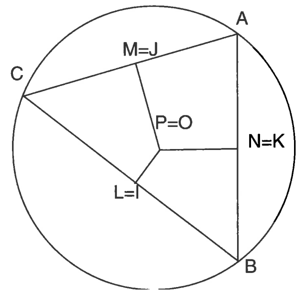
$CM^2 = PC^2 - PM^2$ et $\quad AM^2 = PA^2 - PM^2$

$AN^2 = PA^2 - PN^2$ $\quad BN^2 = PB^2 - PN^2$

En sommant ces égalités 3 par 3, on s'aperçoit que la quantité $S = BL^2 + CM^2 + AN^2$ est aussi égale à $CL^2 + AM^2 + BN^2$.

$S = 1/2\ (BL^2 + CL^2) + (CM^2 + AM^2) + (AN^2 + BN^2)$.

Or, on vérifie facilement que la quantité $x^2 + (1-x)^2$ est minimale pour $x = 1/2$, donc que $BL^2 + CL^2 \geq BI^2 + CI^2$ où I est le milieu de BC (prendre $x = BL/BC$)



De même $CM^2 + AM^2 \geq CJ^2 + AJ^2$ où J est le milieu de {AC}, et $AN^2 + BN^2 \geq AK^2 + BK^2$ où K est le milieu de {AB}).

Le point qui se projette sur les 3 côtés en I, J et K étant le point O centre du cercle circonscrit au triangle, **la quantité $BC^2 + CM^2 + AM^2$ est donc minimale**

7

1996 Exercice 2 (Solution de Gilles Cohen)

1. Raisonnons par l'absurde. On suppose que u_n est toujours strictement plus grand que a.

Alors, si u_n est impair, $u_{n+2} = (a+u_n)/2$ est plus petit que u_n (*).

Construisons alors la suite extraite (v_n) suivante à partir de $v_0 = u_0$:

- si $v_n = u_{f(n)}$ est pair, $v_{n+1} = v_n / 2 = u_{f(n)+1}$ est plus petit que v_n.
- si $v_n = u_{f(n)}$ est impair, $v_{n+1} = u_{f(n)+2}$ est plus petit que v_n d'après (*).

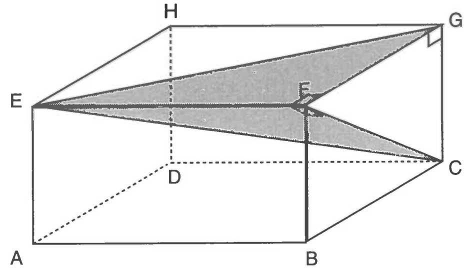
La suite (v_n) est une suite d'entiers strictement décroissante et minorée par a ce qui est impossible. (u_n) prend donc des valeurs $\leq$ a.

2. En raisonnant de la même façon au-delà de la première valeur de u_n inférieure ou égale à a, on montre que la suite prend une infinité de valeurs parmi les entiers compris entre 0 et a. D'après le principe des tiroirs, deux d'entre elles sont égales. La suite est donc périodique à partir d'un certain rang.

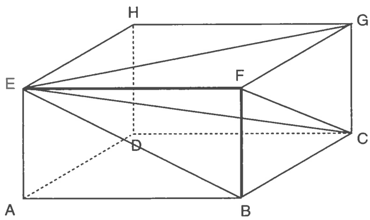
8

1996 Exercice 3 (Solution d'Elisabeth Busser)

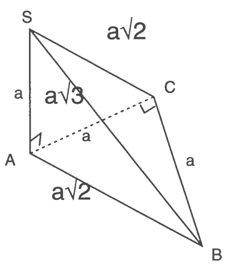
1. Le tétraèdre EFGC répond à la question. En effet, EFC est rectangle en F, FGC en G, EFG en F et EGC en G.

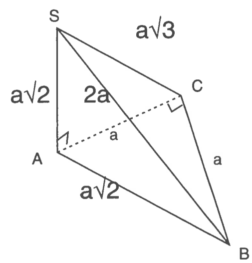


2. Soit un tétraèdre dont toutes les faces sont des triangles rectangles. On peut reconstituer le pavé dont il est issu en regroupant, comme sur cette figure, 6 tétraèdres isométriques au tétraèdre donné.



3. Caractérisons ceux de ces tétraèdres qui ont aussi au moins deux faces isocèles. Nous parvenons à deux possibilités :





9

1996 Exercice 4

1. Etudions la fonction $f : x \to x^x$ sur $\mathbb{R}^*_+$.
$f(x) = \exp(x \ln x)$ et $f'(x) = (1 + \ln x) \exp(x \ln x)$ et du signe de $1 + \ln x$.
Le minimum de f est donc obtenu pour $x = e^{-1}$, c'est $m = e^{-1/e} \approx 0{,}69$

2. Posons $S(x,y) = x^y + y^x$, où x et y sont strictement positifs. Quitte à échanger les deux nombres, on peut supposer $x>y$.
- Si $x \geq 1$, $x^y \geq 1$ et $S(x,y) \geq 1$.
- Si $1/e < x < 1$, $S(x,y) \geq e^{-y} + y > 1$.
- Si $x < 1/e$, $S(x,y) \geq y^y + y^{1/e} > 1$.