OLYMPIADES ITALIENNES

L'école normale supérieure de Pise organise, depuis 1985, la sélection des participants italiens aux Olympiades internationales. La vraie fête des «matheux» est la finale à Cesenatico au bord de la mer Adriatique où, en plus, les clubs Ferrari, partenaires de la compétition, se rencontrent avec leurs voitures.
Aux mêmes dates, est organisé un congrès sur les mathématiques reservé aux professeurs responsables régionaux de l'organisation.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

Les olympiades internationales débutent dans le monde en 1959. En Italie la première competition date de 1967. A partir de 1985, la compétition nationale italienne sert à sélectionner l'équipe qui participera aux olympiades. Pour mieux entraîner l'équipe, il est prévu un stage de 4 semaines auquel participent les 20-25 meilleurs élèves avec 4 professeurs et 4 assistants.

EPREUVES

Individuelles
Catégories : 2
a) terminale, première, seconde
b) troisième, quatrième.
Problèmes
Premier niveau :
(dans les etablissements scolaires)
a) 15 problèmes1 réponse sur 5
b) 10 problèmes 1 rép sur 5
Deuxième niveau (Finale régionale)
a) 15 problèmes 1 réponse sur 5
b) la catégorie b termine au premier niveau
Troisième niveau (finale nationale)
6 problèmes ouverts. On demande une demonstration des réponses.

COMPETITION

Premier niveau :
au mois de novembre.
Deuxième niveau :
au mois de fevrier pour les meilleurs
Troisième niveau:
mois de mai pour les 300 meilleurs.
La finale mondiale a lieu en été.

PARRAINS

AGIP
FERRARI
INTEL
CASSA DI RISPARMIO DI CESENA (banque)
Ministère de l'Education Nationale.

CONTACTS

Noschese Dott, Givseppe Scuola Normale Superiore
Piazza Dei Cavalieri 7
I 56100 PISA
ITALIE
Tel: ++ 39/50/50 92 60

1 - COUPLES RATIONNELS

Dire si l'équation $x^2 + xy + y^2 = 2$ admet comme solution les couples (x,y), où x et y sont rationnels.

Dire se l'equatione $x^2 + xy + y^2 = 2$ ammette soluzioni (x,y) con x e y entrambi razionali.

2 - DIVISEUR COMMUN

Soit n ($n \geq 3$) entiers naturels non supérieurs à 100 , et soit d leurs plus grand diviseur commun. Démontrer qu'il existe trois nombres parmi ces nombres dont le diviseur commun est encore égal à d.

Siano dati ($n \geq 3$) numeri naturali non superiori a 100, e sia il loro massimo comun divisore Dimostrare che esistono tre fa questi numeri il cui massimo comun divisore è ancora uguale a d.

3 - JETONS

Un certain nombre de jetons sont repartis dans 2n+1 sachets. Supposons que, en retirant l'un quelconque des ces sachets , il soit possible de répartir le reste en deux groupes de n sachets, de telle sorte que chaque groupe contienne le même nombre total de jetons. Démontrer que chaque sachet contient le même nombre de jetons.

Alcune palline sono distribuite in 2n+1 sacchetti. Supponiamo che, tolto un qualunque sacchetto, sia possibile suddividere i rimanenti in due gruppi di n sacchetti, in modo che ciascun gruppo contenga lo stesso numero complessivo di palline. Dimostrare che ogni sacchetto contiene lo stesso numero di palline.

4 - CARRÉS

Démontrer qu'il existe un entier N tel que pour tout n≥N, il est possible de partager un carré en n petit carrés 2 à 2 disjoints (deux petits carrés sont disjoints si ils n'ont aucun point intérieur en commun).

Si dimostri che esiste un intero N tale che per ogni n ≥N è possibile suddividere un quadrato in n quadratini a due a due disgiunti . (Due quadratini sono considerati disgiunti se non hanno punti interni in comune).

5 - TABLE RONDE

Les 60 places autour d'une table circulaire sont occupées par 30 hommes et leurs 30 épouses. Montrer qu'il y a au moins 2 femmes assises à la même distance de leur mari respectif.

In una tavola circolare ci sono 60 posti occupati da 30 uomini e dalle 30 rispettive mogli. Mostrare che esistono almeno due signore che siedono alla stessa distanza dai rispettivi mariti.

6 - SUITE

Soit une suite $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$ verifiant la relation de récurrence :

$$\mathbf{a}_1 = 1 \qquad \mathbf{a}_{\mathbf{n}+1} = 2\mathbf{a}_\mathbf{n} + \sqrt{3\mathbf{a}_\mathbf{n}^2 + 1} \qquad \mathbf{n} = 1, 2, \ldots\ldots$$

Démontrer que, pour tout n, a_n est un entier.

Si definiscano i numeri $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$ tramite la formula ricorrente:

$$\mathbf{a}_1 = 1 \qquad \mathbf{a}_{\mathbf{n}+1} = 2\mathbf{a}_\mathbf{n} + \sqrt{3\mathbf{a}_\mathbf{n}^2 + 1} \qquad \mathbf{n} = 1, 2, \ldots\ldots$$

Dimostrare che a_n è intero per ogni n.

7 - ÉGALITÉ

Démontrer que si x, y, z sont trois nombres tels que :

$$(x-y)/(1+xy) + (y-z)/(1+yz) + (z-x)/(1+zx) = 0$$

alors au moins deux des nombres sont égaux.

Si dimostri che se x, y, z sono tre numeri tali che:

$$(x-y)/(1+xy) + (y-z)/(1+yz) + (z-x)/(1+zx) = 0$$

allora almeno due tra i numeri x, y, z sono uguali.

8 - DROITES

On considère une droite r, et un triangle ABC situé dans l'un des demi-plans de frontière r.

Les points A', B', C' sont symétriques respectivement de A, B et C par rapport à r ; on trace par A' la parallèle à (BC), par B' la parallèle à (CA), par C' la parallèle à (AB). Démontrer que ces trois droites sont concourantes.

Si consideri una retta r ed un triangolo ABC che giace in uno dei semipiani individati da r.

Detti A', B', C' i punti simmetrici di A, B, C rispetto ad r, si conducta da A' la parallela a BC, da B' la parallela ad AC e da C' la parallela ad AB. Si dimostri che queste tre rette passano per uno stesso punto.

9 - PENTAGONE

Soit P un point intérieur à un pentagone régulier. Démontrer que la somme des distances de P aux cinq côtés (ou leurs prolongements) est indépendante de la position de P. Dire de plus que cette propriété est encore vraie pour :

-a) un pentagone convexe à 5 cotés égaux,
-b) un pentagone convexe à 5 angle égaux,
-c) un pentagone convexe.

Assegnato un pentagono regolare e un punto P interno ad esso, si dimostri che la somma delle distaze di P dai lati o dai loro prolungamenti è indipendente dalla posizione di P. Si dica inoltre se vale la stessa tesi per:

-a) ogni pentagono convesso avente i 5 lati uguali,
-b) ogni pentagono convesso avente i 5 angoli uguali,
-c) ogni pentagono conveso.

10 - CUBE

On considère un cube (d'arête 1u) et (OP) une de ses diagonales. Déterminer la valeur minimum et la valeur maximum de l'aire de la figure obtenue par intersection entre le cube et un plan contenant (OP).

Si consideri un cubo di spigolo unitario e sia (OP)una sua diagonale. Si determini il valore minimo e il valore massimo dell'area della figura che risulta dalla intersezione fra il cubo e un piano passante per (OP).

11- MESURES

Soient a, b, c les mesures des côtés d'un triangle.
Sachant que $a + b + c = 1$, démontrer que :

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < 1/2.$$

Siano a, b, c le misure dei lati di un triangolo. Sapendo che $a + b + c = 1$, dimonstrare che :

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < 1/2.$$

12 - TETRAEDRE

On donne un tétraèdre dont les arêtes de la base mesurent a, b, c et les 3 autres arêtes mesurent x, y et z.
Démontrer que :

$$x + y + z < a + b + c + 3d$$

où d est la mesure de la distance entre le sommet et le barycentre de la base.

Dato un tetraedro con spigoli alla base di lunghezza a, b, c e i tre spigoli rimanenti di lunghezza x, y, z .
Dimostrare che si ha:

$$x + y + z < a + b + c + 3d$$

dove d indica la distanza tra il vertice opposto alla base e il baricentro della base stessa.

1

COUPLES RATIONNELS

$$y^2 + xy + (x^2-2) = 0$$

En calculant l'une des variables par rapport à l'autre, on obtient:

$$y=(-x+ x^2-4(x^2-2) \quad)/2 = (-x+ 8-3x^2)/2$$

et donc $(8-3x^2)$ doit être le carré d'un nombre rationnel ce qui suppose qu'il existe des entiers p, q et a tels que:

$$8q^2 - 3p^2 = a^2$$

On peut diviser cette équation par 3 :

$$3(2q^2-p^2)+2q^2 = a^2$$

Mais un carré, dans la division par 3, ne peut avoir pour reste que 0 ou 1. Donc la seule solution est q=3h avec h entier: Dans le cas contraire $2q^2$ aurait pour reste 2 dans la division par 3; ce qui signifie que a est un multiple de 3.

De cette relation, on déduit alors que $3q^2$ est un multiple de 9 alors que p est un multiple de 3, ce qui est contradictoire avec le fait que p et q soient premiers entre eux.

2

DIVISEURS COMMUNS

Observons d'abord qu'il suffit d'envisager le cas de quatre nombres. De plus on pourra supposer que leur P G C D est 1 dans le cas contraire il suffirait de les diviser tous par ce PGCD.

Soit donc 4 nombres a, b, c et d (non supérieurs à 100) ayant 1 pour plus grand diviseur commun. Supposons, par l'absurde, qu'on ne puisse pas trouver 3 d'entre eux dont le plus grand diviseur commun soit 1. Il existerait alors quatre nombres premier distincts tels que:

- p_1 divise a, b, c mais pas d,
- p_2 divise b, c, d mais pas a,
- p_3 divise c, d, a mais pas b,
- p_4 divise d, a, b mais pas c.

Or ces nombres premiers sont distincts quand le PGCD de a, b, c et d est 1. Il faudrait donc :

$$a \geq p_1p_3p_4 \qquad b>p_1p_2p_4 \qquad c>p_1p_2p_3 \qquad d>p_2p_3p_4$$

Or, les quatre plus petits nombres premiers sont 2, 3, 5, 7.

L'un des 4 nombres a,b,c ou d devra être supérieur à 3.5.7=105

Ce qui est contradictoire avec le fait que les 4 nombres ne doivent pas être supérieurs à 100.

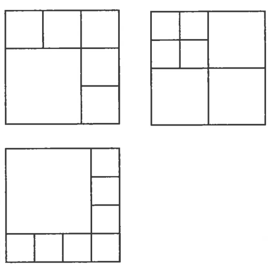
3 JETONS

Soit x_i ($i=1,2,...2n+1$) le nombre de jetons contenus dans le i-ième sachets, et $X=x_1+x_2+...+X_{2n+1}$ le nombre de jetons (X différent de 0).
D'après la condition de l'énoncé, pour tout i $(X-x_i)$ est PAIR, et donc $(X-x_j)-(X-x_i)$ est pair, donc x_i-x_j est pair pour tout i et j.
Ce qui signifie que tous les x_i ont la même parité.
Remarquons que la condition de l'énoncé reste vraie si le nombre de jetons de chaque sachet est augmenté ou diminué, multiplié ou divisé par une constante.
Posons donc: $y_i=x_i/2$ si tout x_i est pair

$y_i=(x_i-1)/2$ si tout x_i est impaire.

On obtient une nouvelle répartition des jetons ayant la même propriété, mais un plus petit nombre de jetons.
On réitère l'opération jusqu'à ce que tous les sachets soient vides. Mais seule une distribution telle que $x_1=x_2=...=x_i=...=x_{2n+1}$ permet d'arriver à ce résultat. Ce qui démontre la proprieté.

4 CARRÉS



Remarquons que, si on réussit à partager un carré en n petits carrés, alors on peut aussi le diviser en n+3, en remplaçant l'un des carrés par 4 quarts ce qui ajoute 3 carrés.
Les figures ci-contre fournissent une solution pour n = 6, 7, 8. Donc, pour tout $n \geq 6$, le découpage est possible. On montre en revanche qu'il est impossible avec 5.

5 TABLE RONDE

On colorie les 60 places alternativement blanc et noir; 15 femmes devront s'asseoir à des places de couleurs opposées à celles de leur maris et 15 autres à des places de même couleur que leurs maris (ce qui leur permettrait d'être, par couple, à des distances différentes: 1,2,3,...30).
Après avoir assis les 15 premiers couples utilisant 15 places noires et 15 places blanches, alors il ne sera pas possible d'asseoir les 15 couples restants puisque chaque couple occupe un nombre pair de places.