RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE

Le Rallye Mathématique d'Alsace est créé en 1973 par le Professeur GLAESER de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg. Il s'inspire des Olympiades et est la première épreuve de ce genre en France.

Il s'adresse à tous les élèves volontaires des Premières et Terminales scientifiques d'Alsace et de quelques lycées à l'étranger (Baden-Baden, Freiburg, Saarbrücken, Wien). Les 2 compétitions ont lieu durant le printemps.

Les élèves concourent par binômes et sont confrontés pendant 4 heures à 3 exercices faisant appel à l'intuition, l'imagination, l'originalité, la rigueur scientifique et la clarté de l'exposé.

Le Rapport du Rallye Mathématique d'Alsace, publié chaque année, regroupe les sujets, les corrigés, le palmarès, les remarques et les idées originales rencontrées dans les copies. Distribué à tous les enseignants de Mathématiques de notre académie, il peut, par ses remarques pédagogiques, servir de support à des Mathématiques innovantes.

Le Comité Organisateur réunit au sein de l'IREM de Strasbourg 5 membres, enseignants du Supérieur et du Secondaire.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

• Créé en 1973, le rallye mathématique d'Alsace est le premier rallye régional ayant existé en France.
• **1996** : le 23e Rallye réunit 1500 élèves de Première et de Terminale. Environ 80 seront primés.
• Le rallye est organisé à l'initiative de l'IREM de Strasbourg avec le soutien du Rectorat, de l'Université Louis Pasteur (Strasbourg I) et du département de mathématiques.

COMPETITION

2 épreuves (1 par niveau) : les élèves concourent par binômes.

Palmarès : au courant du mois de Juin, cérémonie présidée par Monsieur le Recteur de l'Académie de Strasbourg.

ÉPREUVES

2 catégories : élèves de Première et de Terminale.

Les élèves sont groupés par 2 et ont à leur disposition une salle de classe pour une durée de 4 heures.

PARRAINS

Collectivités locales :
Conseil Régional d'Alsace, Conseil Général du Bas-Rhin, municipalités.
Quelques entreprises privées,
Régionale de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques), ...

CONTACTS

Madame Claudine KAHN IREM de Strasbourg
10, rue du Général Zimmer
67000 STRASBOURG
Tél. : 88-41-63-07
Fax : 88-41-64-49

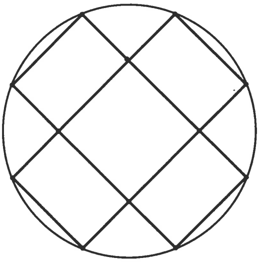
RALLYE DE TERMINALE 96

1 - Proposer une méthode et l'appliquer pour déterminer, sans l'aide d'une calculatrice, les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de 97^{1996}

2 - On fixe deux réels strictement positifs a et b . Montrer que si a et b sont inférieurs ou égaux à 2, alors $a^a + b^b > ab$.

Qu'en est-il dans les autres cas ?

3 - On désire placer 4 sets rectangulaires identiques sur une table ronde de rayon R. Ils ne peuvent ni se chevaucher, ni dépasser de la table. Ils sont disposés comme indiqué sur la figure.



On veut que ces sets soient d'aire maximale. Quelles doivent être leurs dimensions ?

RALLYE DE PREMIERE 96

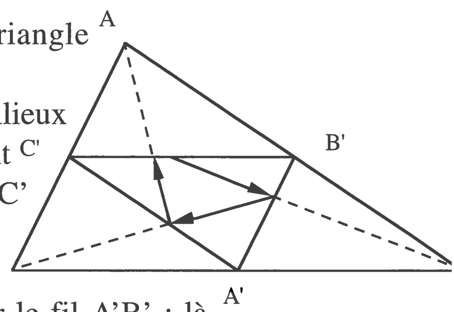
4 - On se donne trois réels a, b, et c compris entre 0 et 1.
Montrer l'inégalité :

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}\leq 2$$

5 - Danielle et Anne cultivent chacune leur jardin rectangulaire. Celui de Danielle a la plus grande longueur et la plus grande surface. **Qu'en est-il du périmètre ?**

Si Danielle avait celui de plus grande longueur et de plus grand périmètre, serait-elle sûre d'avoir celui de plus grande surface ?

6 - Le professeur Spidermath a découvert que l'espèce d'araignée «Araneida Dreiecka» tisse sa toile de la manière suivante :



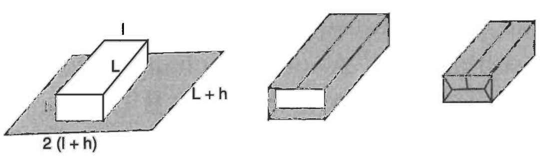
-elle place 3 fils formant un triangle noté A B C
-elle relie par 3 autres fils les milieux des côtés de ce triangle, formant un deuxième triangle noté A'B'C' (voir figure) ;
-elle part du fil B'C' et se dirige vers C jusqu'à rencontrer le fil A'B' ; là, elle change brusquement de direction et se dirige vers B en allant jusqu'au fil C'A' où elle change encore de direction se dirigeant désormais vers A jusqu'au fil B'C'.
Peut-elle retomber sur son point de départ ?

RALLYE DE TERMINALE 95

7 - Au royaume du Père Ubu, les années ne sont comptées qu'avec les nombres ubuesques. Les nombres ubuesques sont des nombres qui ne sont pas égaux à un nombre multiplié une ou plusieurs fois par lui-même.
La première année s'appelle Ubu 2, la deuxième Ubu 3, la troisième Ubu 5, la quatrième Ubu 6, la cinquième Ubu 7, la sixième Ubu 10, etc ...
Comment s'appellera la 199495$^{\text{ème}}$ année ?

8 - *Le palais de Thram II, fils d'Ottokar IV*
En Syldavie, le gouvernement est formé de cinq ministères. Pour travailler efficacement, le roi Thram II décide de faire construire un palais pentagonal. Un concours s'adressant à tous les architectes est ouvert. Le palais doit être partagé par des cloisons intérieures reliant tous les sommets. Chaque ministère disposera d'une aile triangulaire ayant deux murs extérieurs. La partie commune à deux ministères sera consacrée aux relations interministérielles. Pour éviter les jalousies, Thram II souhaite que chaque ministère dispose d'une aile d'un hectare.
Montrer que tous les projets des architectes auront la même superficie totale.

9 - Pour le Nouvel An Chinois, la compagnie des Marchands Associés de Thé a décidé d'offrir à ses plus fidèles clients sa spécialité au jasmin enveloppée dans de la soie. Pour emballer une boîte de dimensions L , l , h, on dispose d'un rectangle de tissu de dimensions (L + h) , 2(l +h).
Calculer pour un volume V fixé du paquet, les dimensions L, l, h, qui leur feront utiliser le moins de soie possible.



10 - HISTOIRE D'ŒUFS

Il est bien connu que les Shaddocks pondent des oeufs. Pour pondre un oeuf, ils doivent compter jusqu'à 4. Ou plutôt, quand un Shaddock compte régulièrement, il pond toujours un oeuf à chaque multiple de 4.

Le Ministre des Pontes a chargé son Conseiller Shaddock de compter tous les oeufs entreposés dans la réserve du Ministère.Le Conseiller, exténué d'avoir tant compté et pondu, note 1995 oeufs sur son registre.

Combien y avait-il d'oeufs initialement dans la réserve ?

(Rallye de première 95)

11 - ÉTAGERES ESTHÉTIQUES

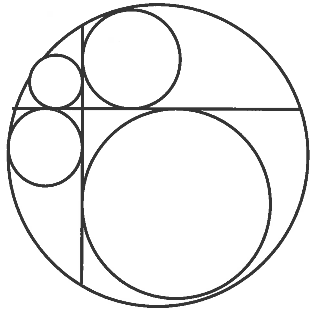
On veut empiler des assiettes identiques sur des étagères superposées pouvant supporter chacune au maximum une pile de cinq assiettes. Pour des raisons d'équilibre, le nombre d'assiettes par étagère doit diminuer strictement avec la hauteur.

Combien y a-t-il de possibilités de rangement suivant le nombre d'assiettes et le nombre d'étagères ?

(Rallye de première 95)

RALLYE DE TERMINALE 94

12 - La construction du Tramway de Strasbourg a nécessité d'enterrer 4 câbles. Une des solutions techniques envisagées a été de choisir une gaine de diamètre intérieur D compartimentée par deux parois perpendiculaires, les câbles étant collés aux deux parois.



Montrer que la somme des diamètres des 4 câbles est inférieure à $4(\sqrt{2}-1)D$.

13 - Déterminez les entiers naturels x, y, z tels que :

$$x^{(y^z)}\, y^{(z^x)}\, z^{(x^y)} = 1994^{1994}xyz$$

14 - Madame Lacraie, professeur de Mathématiques, enseigne dans deux classes de même niveau ayant chacune deux heures de Mathématiques par semaine. La classe A a une heure le lundi et une heure le jeudi. La classe B a une heure le mardi et une heure le vendredi. Normalement Madame Lacraie traite un paragraphe par heure, mais lorsqu'elle refait un cours pour la deuxième fois, elle va deux fois plus vite.

Au bout de dix semaines de classe combien de paragraphes auront été traités dans chaque classe ?

Solutions

1 **21**

3

$$L = R\sqrt{2-\sqrt{2}} = R\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{8})$$

$$1 = \frac{R}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\ ) = R\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{8})$$

7

La 199 495è année aura un nom ubuesque supérieur à 199 495. Essayons avec Ubu 200 000. Retranchons 1 et toutes les puissances d'entiers.
Or 2^{17}< 200 000<2^{18}, donc le plus grand exposant à retirer sera 17. On enlèvera k fois les puissances d'exposant p,où kest la partie entière de

$$\sqrt[p]{200000} - 1$$

On retire les puissances d'exposant 2 (il y en a 446), 3 (57), 5(10), 7(4), 11(2), 17(1). Celles d'exposants 4, 9, 16, 8 ont déjà été retirées. Quant aux puissances d'exposants 6 (carrés **et** cubes), ou 10 (carrés et puissances d'exposant 5), ou 14, ou 15, il faut les ajouter car elles ont été retirées 2 fois. Pour les puissances d'exposant 12, ajoutés 2 fois et retirés une fois, on ne les compte pas. Le rang de Ubu 200 000 est donc de :
200 000 –1 –446–57–10 +6 – 4 +2 –2 –1 + 1 + 1 –1 = 199 488, et **la 199 495ème année sera Ubu 200 007**, puisqu'aucune puissance d'exposant entre 2 et 17 ne s'intercale entre 200 001 et 200 007.

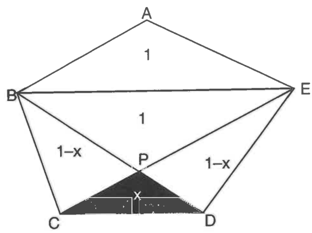
8

• Les hauteurs relatives à [CD] des triangles BCD et CDE, qui ont même aire, sont égales, donc **(BE) // (CD)**. **Chaque diagonale est donc parallèle au côté opposé.**
• Compte tenu des aires figurant sur le dessin, $\frac{\text{airePCD}}{\text{airePDE}} = \frac{PC}{PE} = \frac{\text{airePCB}}{\text{airePEB}}$

$\frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{x}$ donne après résolution, et comme x doit être inférieur ou égal à 1, $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

• L'aire totale de chaque pentagone-solution (4 – x) sera donc :

$$4 - x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$



9

Aire de la soie : $S = 2(l+h)(L+h) = 2(l+h)(\frac{V}{hl}+h)$
Pour h fixé, S est minimum pour

$l = L = \sqrt{\frac{V}{h}}$ alors, $S = 2(l+h)^2 = 2(h+\sqrt{\frac{V}{h}})^2$ est minimum pour

$h = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$ et alors ***l* = L = 2*h*.**

10

Après avoir compté 4 anciens oeufs, il en pond un nouveau qu'il compte aussitôt. Après cela, il lui suffira de compter 3 anciens oeufs de plus pour en pondre un nouveau, puis il faudra à chaque fois ajouter 3 anciens oeufs à chaque nouvel oeuf pour que le Shaddock en ponde un.

Si l'ancien nombre d'oeufs est de la forme 4+3x+r avec r = 0,1 ou 2, alors le Conseiller pondra 1+ x oeufs et il y en aura 5+4 x+r, avec r = 0 ; 1 ; 2. 1995 = 5+ 4x+r ⇔ 4x+r = 1990
Or, 1990 = 4 × 497 + 2 ⇒ x = 497
Il y avait 4 + 3 × 497+2 = **1497 oeufs**

<u>Remarque</u> : Le nombre final d'oeufs étant de la forme 5 + 4x + r avec r = 0 ;1 ; 2 il ne peut être un multiple de 4, et il ne suffit donc pas d'enlever un quart (avec 1996, il n'y aurait pas de solution).

11

On a au maximum 6 étagères et 15 assiettes.
- Si **1** étagère, on a de 0 à 5 assiettes. **1 seul** rangement dans **chaque cas**.
- Si **2** étagères, on a de 1 à 9 assiettes. Pour 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 assiettes, on a respectivement **1, 1, 2, 2, 3, 2, 2, 1, 1** rangements.
- Si **3** étagères, on a de 3 à 12 assiettes. Pour 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 assiettes, on a respectivement **1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 1** rangements, soient **19** rangements.
- Si **4** étagères, on a de 6 à 14 assiettes. Pour 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, assiettes, on a respectivement **1, 1, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 1** rangements, soient **16** rangements.
- Si **5** étagères, on a de 10 à 15 assiettes. Pour 10, 11, 12, 13, 14, 15 assiettes, on a **chaque fois1** rangement, soient **6** rangements.
- Si **6** étagères, on aobligatoirement 15 assiettes et**1 seul** rangement.

14

Dans chaque classe Madame Lacraie traite d'abord à vitesse double la partie de cours qu'elle a faite une première fois dans l'autre classe, puis elle traite à vitesse normale une nouvelle partie de cours pendant le temps qu'il lui reste. La quantité de cours faite à vitesse double correspond à la quantité faite à vitesse normale pendant l'heure précédente dans l'autre classe. Si on appelle u_n la quantité de nouveau cours traitée par Mme Lacraie à la $n^{\text{ième}}$ heure on a :

$$u_n = 1 - \frac{u_{n-1}}{2} \qquad (1)$$

(la quantité u_{n-1} est traitée à vitesse double, le temps restant est $1 - u_{n-1}/2$)
Et on a $u_o = 0$ et $u_1 = 1$
On peut programmer la calculatrice pour calculer les premiers termes :
$u_1 = 1$; $u_2 = 1/2$; $u_3 = 3/4$; $u_4 = 5/8$; etc...
On constate en continuant les calculs que u_n s'approche de 0,666 ... c'est-à-dire 2/3.
Considérons alors la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 2/3$. On aura $v_{n+1} = u_{n+1} - 2/3$. En utilisant la relation (1), on montre facilement que (v_n) est donc une suite géométrique de raison $(-1/2)$ et de premier terme $v_o = -2/3$ et par conséquent $u_n = v_n + 2/3 = (2/3) \times (1 - (-1/2)^n)$

• Cherchons maintenant la quantité totale de cours traité par Mme Lacraie

Dans la classe A : à sa 1ère heure, elle traite u_1
à sa 3ème heure, elle traite $u_2 + u_3$
à sa 5ème heure, elle traite $u_4 + u_5$
à sa (2n + 1) ème heure, elle traite $u_{2n} + u_{2n+1}$

Au bout de 10 semaines, sa dernière heure dans la classe A sera sa 39ème heure, elle aura donc traité :
$(u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{38} + u_{39})$ paragraphes dans la classe A

Dans la classe B : à sa 2ème heure, elle traite $u_1 + u_2$
à sa 4ème heure, elle traite $u_3 + u_4$
... à sa 40ème heure, elle traite $u_{39} + u_{40}$

Au bout de 10 semaines, elle aura donc traité :
$(u_1 + u_2 + ... + u_{39} + u_{40})$ paragraphes.

Conclusion :

Dans la classe A : $26 + \frac{2}{9} + \frac{1}{9 \times 2^{38}} \approx 26,222$

Dans la classe B : $26 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9 \times 2^{39}} \approx 26,889$