RALLYE MATHEMATIQUE DE LYON

L'ojectif central du rallye est de développer chez les élèves l'intérêt pour les mathématiques, la curiosité, le goût de la recherche, en permettant à chacun d'exprimer ses qualités propres, de se découvrir peut-être des capacités insoupçonnées.
Le principe essentiel est celui de la compétition entre classes, dans laquelle chaque élève doit pouvoir jouer son rôle. Ce principe affirme la volonté de promouvoir une culture mathématique accessible au plus grand nombre, d'où le refus de toute exclusion et le souci d'éviter les dérives iées au jeu et à la compétition.
Cet objectif et ce principe guident la forme et le contenu des épreuves du rallye : la conception des épreuves doit amener les élèves à communiquer, s'organiser, débattre entre eux. Les problèmes posés sont assez divers par le cadre, la formulation, la difficulté, pour que tous les élèves puissent valablement s'impliquer dans une recherche.
Enfin n'oublions pas que l'aspect ludique reste primordial ; il s'agit avant tout d'un jeu, donc d'une activité libre et gratuite.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

novembre1993 : premier rallye de la fête des maths

décembre 1996 : deuxième rallye

EPREUVES

Par classes

Catégories : 3

A : sixième cinquième
B: quatrième, troisième, seconde.
C : première terminale

PARRAINS

Partenaires de la fête des maths

COMPETITION

matin 9h 11h 30 : déroulement du rallye

13h 30 remise des prix

après midi : ateliers stands, films, vidéo, jeux conférences, animations diverses en accès libre.

CONTACTS

IREM de LYON
Université Claude Bernard
43, boulevard du 11 Novembre 1918
69622 VILLEURBANNE CEDEX

1 - HECTOR ET ACHILLE

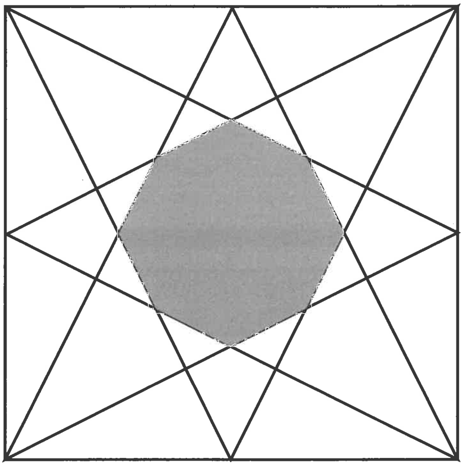
Hector et Achille partent au même moment en courant : le premier de A vers B, le deuxième de B vers A sur la même route. Leurs mouvements sont uniformes. Ils se croisent en C, entre A et B.
À ce moment, il faudrait encore 16 minutes à Hector et 25 minutes à Achille pour parvenir à leurs destinations respectives B et A.

Quel est le rapport de leurs vitesses ?

2 - L'OCTOGONE

Dans le carré ci-contre, de côté 1 mètre, on a tracé, comme l'indique le dessin, les segments joignant les sommets aux milieux des côtés.

Calculer l'aire de l'octogone rouge ainsi construit.



3 - LA FOURMI

Une fourmi se promène sur le plan rapporté à un repère de la façon suivante : lorsqu'elle repart d'un point de coordonnées (x, y) où elle était arrêtée, elle marche, sans s'arrêter, jusqu'au point de coordonnées $(-3x-y\ ;\ 7x+ky)$, où k est un nombre entier.

Trouvez k sachant que, quel que soit son point de départ, la fourmi s'y retrouvera après un nombre fini de déplacements.

4 - DROLE DE FONCTION

La fonction f est définie pour les entiers n et k par :

$f(0\ ;\ n) = n+1$

$f(k\ ;\ 0) = f(k-1\ ;\ 1)$

$f(k+1\ ;\ n+1) = f(k\ ;\ f(k+1\ ;\ n))$

Calculez le nombre f(2 ; 2)

5 - EXORBITANTS !

m étant un entier positif, on donne le nombre entier A qui s'écrit avec m chiffres tous égaux à 1.
On donne aussi l'entier B qui s'écrit : B = 1000…05, le nombre de zéros étant (m–1).

Montrez alors que le nombre AxB+1 est, quel que soit m, le carré d'un entier à préciser.

6 - QUI NE MENT PAS ?

Pendant le cours, un grand coup de sifflet retentit. Le professeur en colère se dirige vers quatre garnements au fond de la classe ; il est sûr que le coupable se trouve parmi eux.
«Qui a sifflé ?» demande-t-il.
- «C'est Aziz» dit Bruno.
- «C'est Philippe» répond Jacques.
- «Ce n'est pas moi !» crie Philippe.
- «Ce n'est pas Philippe» confirme Aziz.

Un seul des quatre garçons dit la vérité. Lequel ?

7 – UN BON BARREUR ?

On écrit à la suite les uns des autres les nombres entiers de 1 à 60 de la façon suivante :
1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 0 1 1 1 2 1 3 1 4 ... 5 7 5 8 5 9 6 0

Puis on a barré cent des chiffres de façon que le nombre formé des chiffres restants soit le plus grand possible.

Quel est ce nombre ?

8 - LA PESÉE

F. Léaud dispose de 162 boules indiscernables (elles ont toutes la même apparence) et d'une balance de Roberval. Parmi toutes ces boules il y en a exactement une plus lourde que les autres. Franck l'a identifiée en quatre pesées.

Comment a-t-il fait ? Pouvez-vous faire mieux ?

Solutions

1

HECTOR ET ACHILLE

En appelant V_H la vitesse d'Hector en mètres par minute, V_A celle d'Achille et t le temps qui s'est écoulé lorsque les deux coureurs arrivent en C, on a : AC = V_H t = 25 VA et CB = V_A t = 16 VH

En écrivant t de deux manières différentes, on tire le carré du rapport

$$\left(\frac{V_H}{V_A}\right)^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow \frac{V_H}{V_A} = \frac{5}{4}$$

:

2

L'OCTOGONE

Pas moins de trois solutions sont proposées. Nous avons choisi celle qui fait intervenir des homothéties :

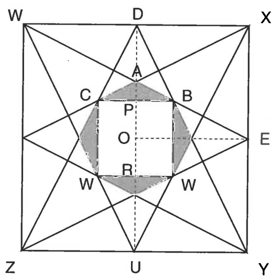
Les triangles DBC et DYZ sont homothétiques. On en déduit DP = BC, puis, de manière analogue, EV=BS=PR= RU=DP.

Le carré BCTS a donc pour aire 1/9. Pour des raisons d'homothétie, OA = 1/4.

Comme OP = 1/6, AP = 1/12.

Le triangle ABC a donc une aire de 1/72.

L'octogone a pour aire 1/9+1/18, soit 1/6.



3

LA FOURMI

Le problème revient à trouver k de telle sorte que l'application affine proposée f admette l'identité parmi ses puissances. Une solution, au-dessus du niveau des lycéens, consiste à exprimer que son déterminant 7–3k ne peut être égal qu'à 1 ou –1. **Le seul entier k qui convienne est 2**. On vérifie alors que f^3 = Id.

On pouvait utiliser une solution plus pragmatique : partir d'un point (1,0) par exemple, trouver ses images successives jusqu'à ce qu'il soit possible de retomber sur le point initial (c'est possible à la troisième itération), résoudre en k (on trouve k=2), et essayer la valeur sur tout point de départ (ça marche !). Mais il reste à prouver que d'autres valeurs de k ne conviendraient pas…

Solutions

4

DROLE DE FONCTION

$f(1 ; n + 1) = f(0 ; f(1,n)) = f(1 ; n) + 1$
Or, $f(1 ; 0) = f(0 ; 1) = 2$
et par récurrence, $f(1 ; n) = n + 2$
Alors, $f(2 ; 2) \quad = f(1 ; f(2,1)) \quad = f(2 ; 1) + 2$
Mais $f(2 ; 1) \quad = f(1 ; f(2 ; 0)) \quad = f(2 ; 0) + 2$
$= f(1 ; 1) + 2 \quad = 3 + 2 \quad = 5$
D'où, $f(2 ; 2) = 7$

5

EXORBITANTS !

On constate que $B = 9A + 6$. Ainsi,

$$AB + 1 = 9A^2 + 6A + 1 = (3A + 1)^2$$

AB + 1 est le carré de 3A + 1 = 3333…34
commençant par (m–1) chiffres 3

6

QUI NE MENT PAS ?

Le seul des 4 garçons qui dise la vérité est Jacques

7

ETES VOUS.UN BON BARREUR ?

99 999 785 960

8

LA PESÉE

La stratégie optimale est la suivante :
Diviser le nombre de boules par 3, soit $n = 3q + r$
- si $r = 0$ écarter un paquet de q boules et comparer les deux paquets de q restants.
- si $r = 1$ écarter un paquet de q + 1 boules et comparer les deux paquets de q boules restants
- si $r = 2$ écarter un paquet de q boules et comparer les deux paquets de q + 1 boules restants.

Dans tous les cas, la première pesée pesée permet de savoir dans quel paquet de q ou q + 1 boules se trouve la boule cherchée et on recommence ensuite l'opération ...pour 162 boules on est sûr du résultat en **cinq pesées au plus.**