CONCOURS NATIONAL TUNISIEN DE MATHÉMATIQUES A.T.S.M.

Instrument privilégié de motivation des lycéens pour les mathématiques, le Concours national de mathématiques organisé par l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques (A.T.S.M.) est ouvert aux meilleurs élèves de sixième année du secondaire. Il leur permet de mettre en valeur leur capacité à appréhender les situations nouvelles faisant intervenir les qualités de patience, d'intuition, de finesse et de rigueur.

Le Concours national représente pour l'A.T.S.M. et donc pour les enseignants de mathématiques en Tunisie, un des instruments privilégiés pour évaluer des aspects de l'enseignement des mathématiques, en particulier le degré d'assimilation de certains concepts importants. Il permet également de recenser quelques types d'erreurs de nature à mener les enseignants à changer d'attitude et de comportement pédagogiques dans l'introduction de certaines notions.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

Le concours se déroule chaque année au mois de mai, depuis 1976.

Une préparation des jeunes lauréats est prise en charge par l'ATSM en vue des Olympiades maghrébines et internationales.

L'ATSM organise aussi depuis quelques années les phases tunisiennes (demi-finales et finale nationale) du championnat international des jeux mathématiques FFJM.

COMPÉTITION

Les élèves sont sélectionnés par établissement.
Le concours a lieu chaque année au mois de mai.

ÉPREUVES

Individuelles.
Catégorie : 6ème année du secondaire.
Exercices : Aucun programme officiel, aucune érudition supposée. Les énoncés sont choisis de manière à ce que les candidats puissent utiliser leurs connaissances et les méthodes qu'ils ont acquises en secondaire.

PARRAINS

Ministère de l'Éducation Nationale de Tunisie.

Revue de l'ATSM :
Omar Khayyam

CONTACTS

ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
Bechir Kachoukh
43, rue de la Liberté
2019 Le Bardo
Tunis TUNISIE
Tél : (216) 1 261 455
Fax : (216) 568 954

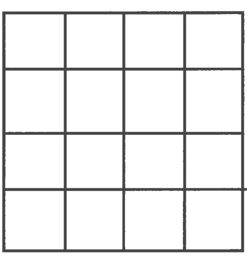
1 - EXERCICE 1 $1^{ère}$

Soient x, y, α, β, des réels tels que :
$x^2 \sin\alpha \sin\beta + y^2 \cos\alpha \cos\beta = 0$

Démontrer que :
$$x^2 (\sin\beta - \sin\alpha)^2 + y^2 (\cos\beta - \cos\alpha)^2 = (x^2 + y^2) \sin^2 (\beta - \alpha)$$

2 - EXERCICE 2 $1^{ère}$

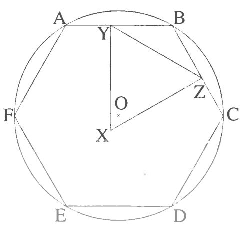
Un carré de côté n est divisé en n^2 carrés. Soit R(n) le nombre de rectangles (y compris les carrés) dont les sommets appartiennent aux points de subdivision de la grille obtenue et dont les côtés sont parallèles au quadrillage. On désigne par C(n) le nombre de carrés.



1) Déterminer R(n) et montrer que :
$R(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.
2) Montrer que :
$C(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

3 - EXERCICE 3 $1^{ère}$

Soit ABCDEF un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R.
Un triangle XYZ isométrique au triangle OAB est placé initialement de telle sorte que les points X, Y, Z coïncident respectivement avec les points O, A, B.
Le triangle XYZ se déplace de façon à ce que les points Y et Z se trouvent sur les côtés de l'hexagone et que X reste à l'intérieur de celui-ci.



1) Montrer que lorsque Y appartient à [AB] et Z appartient à [BC] alors Y, B, Z, X sont cocycliques et que X reste à l'intérieur de celui-ci.
2) Déterminer l'ensemble décrit par X lorsque Y parcourt entièrement le bord de l'hexagone.

4 - EXERCICE 4 $1^{ère}$

Soit ABCD un tétraèdre tel que (AB) ⊥ (CD) et (BC) ⊥ (AD).

1) Montrer que : (AC) ⊥ (BD).
2) On appelle hauteur du tétraèdre une droite passant par un sommet et perpendiculaire à la face opposée. Démontrer que les quatre hauteurs sont concourantes.

Solutions

1

EXERCICE N° 1

Posons :

$$t = x^2(\sin\beta - \sin\alpha)^2 + y^2(\cos\beta - \cos\alpha)^2 - (x^2 + y^2)\sin^2(\beta - \alpha)$$

$$t = 4x^2 \sin^2(\frac{\beta - \alpha}{2})\cos^2(\frac{\beta + \alpha}{2}) + 4y^2 \sin^2(\frac{\beta - \alpha}{2})\sin^2(\frac{\beta + \alpha}{2})$$

$$-4(x^2 + y^2)\sin^2(\frac{\beta - \alpha}{2})\cos^2(\frac{\beta - \alpha}{2})$$

$$t = 2\sin^2\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)(x^2[1 + \cos(\alpha + \beta)] + y^2[(1 - \cos(\alpha - \beta))] -$$
$$\left(x^2 + y^2\right)[(1 + \cos(\alpha + \beta))]).$$

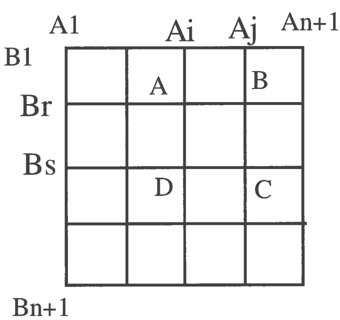
$$t = 2\sin^2(\frac{\beta - \alpha}{2})[(1 + \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)x^2 +$$
$$y^2(1 - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) - (x^2 + y^2)(1 + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)]$$

$$t = 2\sin^2(\frac{\beta - \alpha}{2})[-2x^2 \sin\alpha\sin\beta - 2y^2 \cos\alpha\cos\beta] = 0$$

2

EXERCICE N° 2

1) Pour obtenir un rectangle ABCD vérifiant les données, il



suffit de choisir deux points distincts A_i, A_j de la subdivision $(A_1, A_2, ..., A_{n+1})$ et deux points distincts B_r, B_s de la subdivision $(B_1, B_2, ..., B_{n+1})$.

Par suite :

$$R(n) = (C_{n+1}^2)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2

Un raisonnement par récurrence montre que :

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \sum_{k=1}^{n} k^3$$ ce qu'il fallait démontrer.

2) Il y a $(n - k + 1)^2$ carrés de côtés k. Donc :

$$C(n) = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1) = \sum_{p=1}^{n} p^2$$

3

EXERCICE N° 3

1) Orientons le cercle dans le sens BAF, nous avons :

$(\widehat{BY,BZ}) = (\widehat{ZX,ZY}) = \dfrac{2\pi}{3}\ [\pi]$ et $(\widehat{XY,XZ})$

Par suite:

$(\widehat{BY,BZ}) = (\widehat{XY,XZ})\ [\pi]$. Donc les quatre points (B, Y, Z, X) sont cocycliques.

On en déduit que :

$(\widehat{BY,BX}) = (\widehat{ZY,ZX}) = \dfrac{\pi}{3}\ [\pi]$

comme $(\widehat{ZY,ZX}) = (\widehat{BY,BO})\ [\pi]$

nous obtenons : $(\widehat{BY,BX}) = (\widehat{BY,BO})\ [\pi]$.

D'où l'alignement de O, B, X.

2) Réponse : l'ensemble décrit par X est la réunion de six segments de même longueur $R\ (\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1)$