CONCOURS GÉNÉRAL

Le Concours Général est une institution qui date du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. La première distribution des prix a eu lieu le 1er juillet 1744.
Supprimé sous la Révolution, il a connu d'autres périodes de "disgrâce" de 1904 à 1922 et au début des années 1980. Depuis, l'épreuve a repris son essor et les candidats en mathématiques sont passés de 1700 en 1994 à plus de 2000 en 1995.
Les lauréats reçoivent de beaux livres en présent, mais le Concours Général reste avant tout une épreuve honorifique.
L'épreuve mathématique qui se déroule en une fois sur cinq heures a évolué vers un style proche de celui des Olympiades. Une plaisante tradition est même héritée de cette dernière compétition qui consiste à insérer dans au moins un exercice les chiffres de l'année en cours.
Les épreuves sont découpées en tranches assimilables par des élèves de Terminale S.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

1744 : Création de fondations de prix et première distribution de prix le 1er juillet.

1989 : 1202 candidats

1994 : 1700 candidats

1995 : 2300 candidats

COMPÉTITION

Une seule épreuve de cinq heures, décentralisée dans un certain nombre de lycées.

Le nombre de participants dans chaque lycée est limité.

Pour être primé, il suffit d'avoir résolu la moitié à 2/3 de l'épreuve.

ÉPREUVES

Individuelles

Catégories : Terminales. Cinq exercices sont proposés aux candidats. Depuis une dizaine d'années, ils sont construits sur un modèle proche des Olympiades Internationales.

PARTENAIRE

Ministère de l'Éducation Nationale (organisateur)

CONTACTS

Adressez-vous au Rectorat de votre académie

1 - LE TÉTRAÈDRE

Un tétraèdre ABCD vérifie les conditions suivantes :
(a) les arêtes AB, AC et AD sont deux à deux orthogonales
(b) $AB = 3$ et $CD = \sqrt{2}$.

Déterminer la valeur minimale de $BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6$.

2 - DRÔLE DE SUITE

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant, pour tout entier naturel n, la relation :

$$u_{n+2} = |u_{n+1}| - u_n$$

Montrer qu'il existe un entier p non nul tel que la relation $u_n = u_{n+p}$ ait lieu pour tout entier naturel n.

3 - VALEURS DE FONCTION

Pour tout réel x, on note E(x) le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. Soit k un entier fixé, supérieur ou égal à 2. On considère la fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par :

$$f(n) = n + E\left(\sqrt[k]{n + \sqrt[k]{n}}\right)$$

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la fonction f.

4 - LES POINTS INTÉRIEURS

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère un ensemble A de n points du plan, cet ensemble ne contenant pas trois points alignés.
Montrer qu'il existe un ensemble S de 2n – 5 points du plan tel que, pour tout triangle dont les sommets sont des points de A, il existe au moins un point de S qui lui soit strictement intérieur.

5 - GÉOMÉTRIE

On considère deux droites D_1 et D_2 sécantes en O, et un point M n'appartenant à aucune de ces deux droites. On considère deux points variables, A sur D_1 et B sur D_2 tels que le point M appartienne au segment [AB].

(Les questions 1 et 2 sont indépendantes)
1) Montrer qu'il existe une position des points A et B pour laquelle l'aire du triangle OAB est minimale.
Construire les points A et B ainsi déterminés.
2) Montrer qu'il existe une position des points A et B pour laquelle le périmètre du triangle OAB est minimal et qu'on a alors l'égalité des périmètres des triangles OAM et OBM, ainsi que la relation : $\dfrac{AM}{\tan\frac{\widehat{OAM}}{2}} = \dfrac{BM}{\tan\frac{\widehat{OBM}}{2}}$
Construire les points A et B ainsi déterminés.

6 - LE CUBE

Soit C un cube d'arête 1 et p la projection orthogonale sur un plan.
Quelle est la valeur maximum de l'aire de p(C) ?

On ne donne que les solutions des problèmes 2, 4 et 6.

2

DRÔLE DE SUITE

La solution tient dans un simple tableau. On suppose que :
$u_0 = a$ et $u_1 = b$ sont positifs.

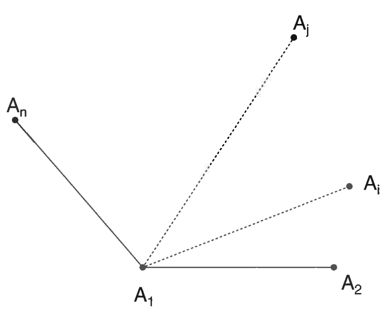
u_0	$a>0$			
u_1	$b>0$			
u_2	$b-a$			
	$b>a$		$b<a$	
u_3	$-a$		$a-2b$	
	$a<b<2a$	$b>2a$	$b<a<2b$	$a>2b$
u_4	$2a-b$	$2a-b$	b	$2a-3b$
u_5	$3a-b$	$b-a$	$3b-a$	$a-b$
u_6	a	$2b-3a$	$2b-a$	
u_7	$b-2a$		$-b$	
u_8	$a-b$			
u_9	a			
u_{10}	b			

On retrouve donc une période de 9 dans tous les cas. Si a ou b est négatif, on tombe rapidement sur deux valeurs positives consécutives et on se ramène au problème précédent.

4

LES POINTS INTERIEURS

(Solution de Gérard Tisse et Jean-Louis Garcin)
Numérotons les points de A. Nous avons choisi de prendre deux points de l'enveloppe convexe A_1 et A_2 (tous les autres points sont du même côté de la droite A_1A_2) et de numéroter A_3, … A_n de manière que l'angle $\widehat{A_2A_1A_i}$ soit une fonction croissante de i.



4

Ainsi, l'inégalité d'angles $\widehat{A_2A_1A_i} < \widehat{A_2A_1A_j}$ entraîne i < j.

Maintenant, à chaque point A_i, associons les entiers suivants :

• m(i) est l'indice inférieur à i tel que l'angle $\widehat{A_1A_iA_{m(i)}}$ soit minimum.

• M(i) est l'indice inférieur à i tel que l'angle f(i) = $\widehat{A_1A_iA_{M(i)}}$ soit maximum.

• P(i) est l'indice supérieur à i tel que l'angle g(i) = $\widehat{A_1A_iA_{P(i)}}$ soit maximum.

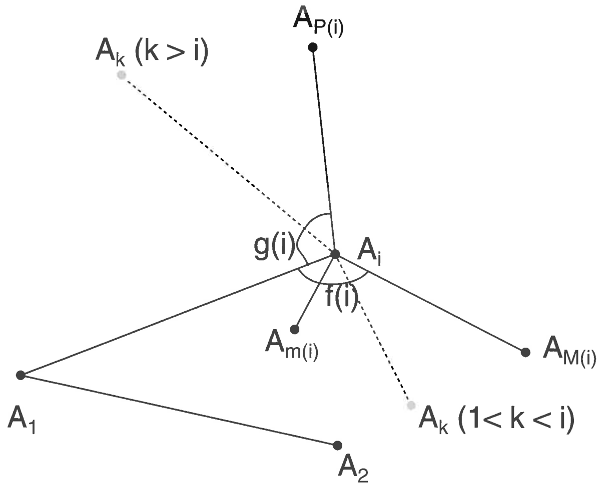
Tracé des points de S

Nous envisageaons alors deux cas :

☛ **f(i) + g(i) < π**
Dans ces cas le point A_i est extérieur au triangle $A_1A_{M(i)}A_{P(i)}$. A_1 et A_i sont de part et d'autre de la droite $A_{P(i)}A_{M(i)}$. On dira que c'est un point simple. Et on dessine un point **S(i)** dans le secteur angulaire $\widehat{A_1A_iA_{m(i)}}$ suffisammment près de A_i pour être du même côté que A_i des droites joignant les différents points A_k.

☛ **f(i) + g(i) > π**
Il ne peut y avoir égalité à π (sinon 3 points seraient alignés).
Dans ce cas le point A_i est intérieur au triangle $A_1A_{M(i)}A_{P(i)}$. On dira que c'est un point double.

On dessine alors un point **S(i)** dans le secteur angulaire $\widehat{A_1A_iA_{m(i)}}$ suffisammment près de A_i pour être du même côté que A_i des droites joignant les différents points A_k.
Puis on dessine un autre point **SS(i)** dans le secteur angulaire, $\widehat{A_{M(i)}A_iA_{P(i)}}$ près de A bien sûr pour être du même côté que A_i des droites joignant les différents points A_k.
Il va de soi que pour A_n, on ne dessine qu'un point, celui qui est dans le secteur angulaire $\widehat{A_1A_nA_{m(n)}}$.



4

■ **Les points dessinés répondent à la question**

Les points S(i) et SS(i) sont les éléments de l'ensemble S cherché. En effet :

Soit un triangle $A_iA_jA_k$ avec i < j < k.

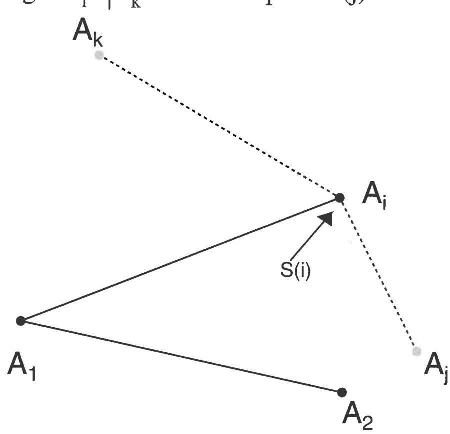
• Si A_j est un point simple :

Le secteur angulaire $\widehat{A_iA_jA_k}$ contient forcément le point S (j).

• Si A_j est un point double :

De deux choses l'une :

– ou bien A_1 et A_k sont du même côté de la droite A_iA_j, auquel cas le triangle $A_iA_jA_k$ contient le point S(j).



4

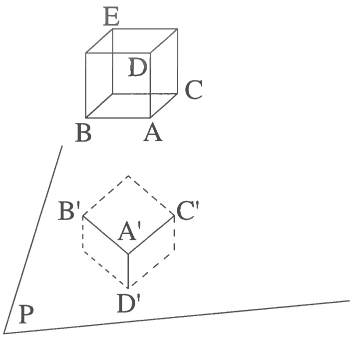
– ou bien A_1 et A_k ne sont pas du même côté de la droite A_iA_j, auquel cas le triangle $A_iA_jA_k$ contient le point SS(j).

Reste à traiter le cas où i =1.
Il s’agit donc des triangles $A_1A_jA_k$ qui contiennent toujours le point S(k).
Il ne reste plus qu’à compter les points S(i) et les points SS(i).
Des premiers il y en a n – 2.
Quant aux seconds, il y en a autant qu’il y a de points A_i intérieurs à des triangles du type $A_1A_jA_k$ avec $j < i < k$. Comme de toute façon il ne peut y avoir plus de n – 3 points intérieurs à des triangles formés par les points initiaux, il y a au plus n –3 points SS(i).
D’où le résultat.

6

LE CUBE

(solution de Christian Lebœuf)



L'aire de l'hexagone projeté sur P vaut 2 fois l'aire du triangle B'C'D'. Elle est maximale lorsque BCD est parallèle au plan P (ce qui est possible), et correspond au cas où AE est perpendiculaire au plan P. L'hexagone projeté est alors régulier !