RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE

Le Rallye Mathématique d'Alsace est créé en 1973 par le Professeur GLAESER de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg. Il s'inspire des Olympiades et constitue la première épreuve de ce genre en France.

Il s'adresse à tous les élèves volontaires des Premières et Terminales scientifiques d'Alsace et de quelques lycées à l'étranger (Baden-Baden, Freiburg, Saarbrücken, Wien). Les deux compétitions ont lieu durant le printemps.

Les élèves concourent par binômes et sont confrontés pendant quatre heures à trois exercices faisant appel à l'intuition, l'imagination, l'originalité, la rigueur scientifique et la clarté de l'exposé.

Le rapport du Rallye Mathématique d'Alsace, publié chaque année, regroupe les sujets, les corrigés, le palmarès, les remarques et les idées originales rencontrées dans les copies. Distribué à tous les enseignants de mathématiques de notre académie, il peut, par ses remarques pédagogiques, servir de support à des mathématiques innovantes.

Le Comité Organisateur réunit au sein de l'IREM de Strasbourg cinq membres, enseignants du Supérieur et du Secondaire.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

• **Créé en 1973**, le Rallye Mathématique d'Alsace est le premier rallye régional ayant existé en France.
• **1997** : le 24ème Rallye réunit 1400 élèves de Première et de Terminale.
Environ 60 seront primés.
Le Rallye est organisé à l'initiative de l'IREM de Strasbourg avec le soutien du Rectorat, de l'Université Louis Pasteur (Strasbourg I) et du Département de Mathématiques.

COMPÉTITION

Deux épreuves (une par niveau) : les élèves concourent par binômes.

Palmarès : au courant du mois de Juin, cérémonie présidée par Monsieur le Recteur de l'Académie de Strasbourg.

ÉPREUVES

Deux catégories : élèves de Première et de Terminale.

Les élèves sont groupés par deux et ont à leur disposition une salle de classe pour une durée de quatre heures.

PARTENAIRES

Collectivités locales :
Conseil Régional d'Alsace, Conseil Général du Haut-Rhin, municipalités.
Quelques entreprises privées.
Régionale de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques), …

CONTACTS

Madame Claudine KAHN - IREM de Strasbourg
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG cedex
Tél. : 03 88 41 63 07
Fax : 03 88 41 64 49
E-mail : irem@math.u-strasbg.fr

1 - RALLYE DE PREMIÈRE

Si x est un nombre réel, le seul nombre réel dont le cube est égal à x s'appelle la racine cubique de x et se note $\sqrt[3]{x}$.

Par exemple : $\sqrt[3]{1000} = 10 = 2 \times 5 = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{125}$

On définit $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

Montrer que α est un nombre entier.

2 - RALLYE DE PREMIÈRE

Trois sirènes, Andromaque, Bérénice et Céphise, goûtent un repos bien mérité au bord d'un lac circulaire.
Émile, champion de natation à vitesse constante de son village de Climbach, sait que depuis son lieu de méditation, le Dorisfels (un charmant rocher au bord du lac), il lui faut une minute pour rejoindre Céphise, sept minutes pour retrouver Bérénice et cinq pour revoir Andromaque.
Céphise et Bérénice se reposent toutes deux à 500 mètres d'Andromaque.
Un journaliste venu admirer les exploits d'Émile, fait le tour du lac à pied en partant du Dorisfels ; il a rencontré Andromaque puis Bérénice et enfin Céphise.

Trouver la vitesse d'Émile le Champion et le rayon du lac.

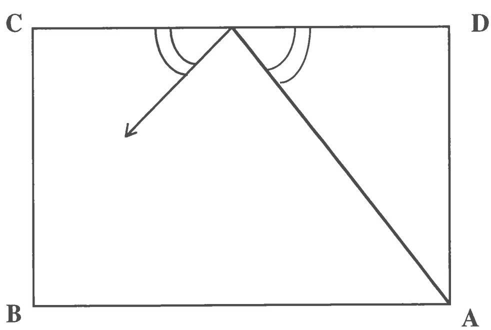
3 - RALLYE DE PREMIÈRE

Cette année-là, Claude dit à François : « Au casino d'Alexandrie, je connais une étrange machine. Elle engendre 3 nombres réels positifs a, b et c. On gagne si l'un des 3 nombres a (1-a), b (1-b), c (1 -c) est inférieur ou égal à 1/4. Comme d'habitude, j'y gagne à tous les coups ».
François lui répondit : « Je connais une machine similaire à Assouan. Mais on y gagne si l'un des 3 nombres a (1-b), b (1-c), c (1-a) est inférieur ou égal à 1/4. J'y gagne à coup sûr ».

Préférez-vous tenter votre chance à Alexandrie ou à Assouan ?

4 - RALLYE DE TERMINALE

On dispose d'un billard ABCD de longueur AB = 1997 mm
et de largeur AD = 1000 mm.



Il comprend un trou à chaque coin. On envoie une boule depuis le coin A suivant la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$. Elle rebondit ensuite sur les bords, comme indiqué sur la figure. On néglige les frottements.

Montrer que la boule atteindra un trou et déterminer au bout de combien de rebonds.

5 - RALLYE DE TERMINALE

Si x est un entier naturel, on note p(x) le produit de ses chiffres. Démontrer que 12 est l'unique entier naturel x compris entre 0 et 100 tel que $x^2 - 10x - 22 = p(x)$.

6 - RALLYE DE TERMINALE

Saint-Exupéry a quitté le service de l'aéropostale et s'est reconverti dans l'importation de plantes tropicales.
Dans les soutes de son triplan bimoteur, il transporte des boutures de baobab (« baobab baobabensis ») et des rosiers des sables (« rosa arenarum »). Il dispose du même nombre de boutures de chaque espèce. Elles sont mélangées et réparties dans deux caisses.
À ce stade de leur croissance, les deux espèces sont encore indiscernables.
Le petit prince ouvre une des deux caisses au hasard et y dérobe une bouture au hasard pour la cultiver sur sa planète personnelle.
Le petit prince a l'impression que lorsque l'une des caisses ne contient aucun baobab, il a plus de chance d'avoir une bouture de rosier.

Pouvez-vous l'aider ?
Pouvez-vous lui dire quelle serait la meilleure situation pour lui ?

Solutions

1

Posons $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$ et $b = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$, donc $\alpha = a-b$

La définition donnée dans l'énoncé suggère de s'intéresser à α^3.

Alors : $\alpha^3 = (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a-b)$

$a^3 - b^3 = 4$ et $ab = 1$. Donc : $\alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$

Le nombre 1 est une racine évidente du polynôme

$P(x) = x^3 + 3x - 4$.

On peut le factoriser par $(x - 1)$ et on obtient :

$P(x) = (x - 1)(x^2 + x + 4)$

Ainsi, 1 est la seule racine réelle de P, d'où : $\alpha = 1$.

2

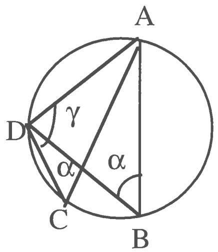
Par hypothèse : AC = AB = 500 m.

Posons $x = CD$. Alors $AD = 5x$,

$BD = 7x$ et la vitesse d'Émile, en mètres par minute, vaut x. Les points A, B, C, D étant cocycliques, $\widehat{DBA} = \widehat{DCA}$.

Posons $\alpha = \widehat{DBA}$.

Dans les triangles ABD et ACD :



$$25x^2 = 49x^2 + 500^2 - 2 \,.\, 500 \,.\, 7x \,.\, \cos\alpha \qquad (1)$$

$$25x^2 = x^2 + 500^2 - 2 \,.\, 500x \,.\, \cos\alpha \qquad (2)$$

D'où : $x^2 = \dfrac{6 \,.\, 500^2}{192}$ soit, puisque x est positif

soit, puisque x est positif $x = \dfrac{125}{\sqrt{2}}$ m.min^{-1}

$x \approx 5{,}3$ km/h

Posons $\gamma = \widehat{CDA}$. Pour le triangle DCA :

$$500^2 = 25x^2 + x^2 - 2.5x^2.\cos\gamma$$

D'où : $\cos\gamma = -\dfrac{3}{5}$.

Mais $\sin\gamma$ est positif, donc $\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \dfrac{4}{5}$.

Notons R le rayon du cercle circonscrit au triangle ACD (R est par conséquent le rayon du lac).

$2R = \dfrac{AC}{\sin\gamma}$ d'où R = 312,5 m.

Solutions

3

Étude du Casino d'Alexandrie

Les trois réels a, b, c étant positifs, on s'intéresse à trois produits construits de la même manière.

Si $x = \frac{1}{2} + u$ alors $x(x-1) = \frac{1}{4} - u^2 \leq \frac{1}{4}$

Les trois nombres a (1 - a), b (1 - b) et c (1 - c) sont inférieurs ou égaux à $1/4$. On gagne à tous les coups à Alexandrie.

Étude du Casino d'Assouan

Si l'un des trois réels a, b ou c est supérieur ou égal à 1, l'un des 3 produits est négatif, et par conséquent inférieur ou égal à $1/4$.

Il reste à étudier le cas où les trois réels sont compris entre 0 et 1.

L'étude précédente assure que :

$0 \leq a(a-1) \leq 1/4$; $0 \leq b(b-1) \leq 1/4$; $0 \leq c(c-1) \leq 1/4$

On a alors : $0 \leq\ a(1-b)\, b(1-c)\, c(1-a) \leq 1/4^3$.

Si α, β et γ sont trois réels positifs tels que $0 \leq \alpha\beta\gamma \leq 1/4^3$ alors l'un au moins est inférieur ou égal à $1/4$. En effet, si ce n'était pas le cas $\alpha\beta\gamma > 1/4^3$.

Donc, l'un au moins des réels a (1 - b), b (1 - c), c (1 - a) est inférieur ou égal à $1/4$.

On gagne donc aussi à tous les coups à Assouan.

4

Un raisonnement par symétries successives relativement à chaque côté du rectangle permet de simplifier considérablement la représentation de la trajectoire.

Dans le repère orthonormé $R = (A, \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}, \frac{\overrightarrow{AD}}{AD})$:

l'équation de la « trajectoire » est y = x

La boule atteindra un trou si et seulement si il existe deux entiers m et n avec $(m,n) \neq (0,0)$ tels que la trajectoire rencontre le point de coordonnées (1997 m , 1000 n).

On doit donc avoir 1997 m = 1000 n .

Cherchons la plus petite valeur possible pour m, 1997 étant un nombre premier, comme 1000 doit diviser 1997 m, nous avons nécessairement m multiple de 1000.

4

On en déduit que m = 1000 est la plus petite valeur possible. Par suite m = 1000 et n = 1997 donnent le résultat.
Trouvons à présent le nombre de rebonds.
Il y a rebond chaque fois que la boule passe d'un rectangle à un autre dans le schéma ci-dessus. Elle tombe dans le trou de coordonnées (1997 m, 1000 n) avec m = 1000 et n = 1997.
Le trou est dans la 1997ème ligne « horizontale » de rectangles. Il y a donc eu 1996 rebonds contre les faces AB ou CD du billard. Le trou est dans la 1000ème colonne « verticale » de rectangles.
Il y a donc eu 999 rebonds contre les faces AD ou BC du billard.
La boule fait donc 2995 rebonds avant de disparaître dans le trou D.

5

Soit $x = 10a + b$ et $p(x) = k = ab$.
On a : $x^2 - 10x - 22 - k = 0$.
Le discriminant réduit $\Delta' = 47 + k$ doit être un carré parfait. Comme $0 \leq k \leq 81$ alors $47 \leq \Delta' \leq 128$.
Les nombres k possibles sont :
$k = 2$ $k = 17$ $k = 34$ $k = 53$ $k = 74$
qui correspondent aux valeurs :
$x = 12$ $x = 13$ $x = 14$ $x = 15$ $x = 16$
parmi lesquelles seul le nombre 12 répond à la question.

6

Soit N le nombre de boutures de chaque espèce, b, r, s = b + r le nombre de baobabs, de rosiers, de boutures de la première caisse ; la deuxième en contient N-b, N-r, 2N-s.
Notons P(r,s) la probabilité d'obtenir une bouture de rosier ; par symétrie on peut se limiter à $s \leq N$.

Si s = 0, alors r = 0 et $P(0,0) = \frac{1}{2} \times \frac{N}{2N} = \frac{1}{4}$

Sinon $P(r,s) = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{s} + \frac{N - r}{2N - s}\right) = \frac{Ns + 2r(N - s)}{2s(2N - s)} > \frac{1}{4}$

La fonction $r \rightarrow P(r,s)$ est maximum quand r est maximum donc pour r = s et $P(s,s) = \frac{3N - 2s}{2(2N - s)} = 1 - \frac{N}{2(2N - s)}$

La fonction $s \rightarrow P(s,s)$ est maximum pour s minimum, donc pour s = 1 et $P(1,1) = 1 - \frac{N}{2(2N - 1)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4(2N - 1)}$

La probabilité d'avoir un rosier est la plus grande lorsque l'une des deux caisses contient un rosier et aucun baobab.