RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE

C'est une compétition entre classes de troisième de collège et de seconde de lycée des six départements de l'académie d'Orléans-Tours. Depuis 1994, des établissements de Djibouti sont associés. En tout, presque 20 000 élèves de l'académie répartis dans environ 500 classes de collège et 250 classes de lycée participent à cette épreuve dont la durée est de 1h45.

L'épreuve se fait sur une liste de 11 exercices pour les troisièmes et de 14 exercices pour les secondes dont certains sont communs aux deux classes. Ces exercices sont de diverses natures (géométrie, travaux numériques, combinatoire et logique) et de difficulté graduée (5, 8 ou 10, 12 ou 15 points). L'humour n'est pas absent des sujets. Un recueil analytique (brochure IO n°49) est édité par l'IREM d'Orléans.

C'est l'esprit d'équipe et la cohésion de la classe qui sont valorisés. Par la variété des niveaux de difficultés des exercices, tous les élèves, quel que soit leur niveau en mathématique, apportent leurs compétences pour construire le dossier réponse de la classe. Une grande attention est portée à la rédaction des solutions et à leur justification.

L'équipe organisatrice (constituée de professeurs, d'universitaires et d'inspecteurs) vise ainsi à « ouvrir une fenêtre » et à « faire souffler un peu d'air frais » sur les mathématiques. Ses objectifs sont donc : l'incitation au travail d'équipe, l'intéressement des élèves d'une même classe à une activité mathématique diversifiée, le développement de l'esprit scientifique et des échanges avec les partenaires du système éducatif.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

1986 : 30 classes d'Orléans.
1987 : 150 classes du Cher, de l'Indre et du Loiret.
1988 : 375 classes avec en plus l'Eure-et-Loir et le Loir-et-Cher.
1989 : 630 de toute l'académie.
1994 : 200 élèves de Djibouti participent.
1995 : dixième édition et record de participation avec 21500 élèves répartis dans 800 classes.

COMPÉTITION

Une épreuve d'entraînement en décembre.
L'épreuve officielle en mars.
Chaque classe s'organise pour résoudre en 1h45 les exercices.
Un palmarès académique pour les secondes et deux palmarès départementaux pour les troisièmes.
Six palmarès départementaux pour les collèges et lycées.

ÉPREUVES

Par classe entière. Deux catégories.
Troisième : Palette de 11 exercices de difficultés variées
Seconde : Palette de 14 exercices dont certains sont communs avec les précédents.
Seules les notions mathématiques au programme des classes visées sont utiles.

PARTENAIRES

Conseil Régional du Centre
Caisse d'Épargne Val de France Orléanais
Caisse d'Épargne Centre Val de Loire
France Télécom
Conseils Généraux
Municipalités et mécènes locaux
Rectorat
Inspections Académiques

CONTACTS

IREM Université d'Orléans
BP 6759
45067 Orléans Cedex 2

Rectorat secrétariat des IPR
21, rue Saint-Etienne
45043 Orléans Cedex

1 - LES PICMEN 3ème - 2nde

Une « démo » d'un jeu vidéo fonctionne sur l'écran d'une console. Un cube composé de 27 pièces (27 petits cubes accolés) va être démonté par trois « Picmen » agissant simultanément. À chaque « gong » donné par un automate métronome, chaque Picman doit prendre et dévorer un petit cube. Le grand cube a entièrement disparu en exactement une minute, à partir du premier « gong ».
La démo permet de choisir le nombre de petits cubes et le nombre de Picmen.
Combien de temps faudra-t-il, dans les mêmes conditions, à cinq Picmen pour détruire un cube de 125 pièces ?

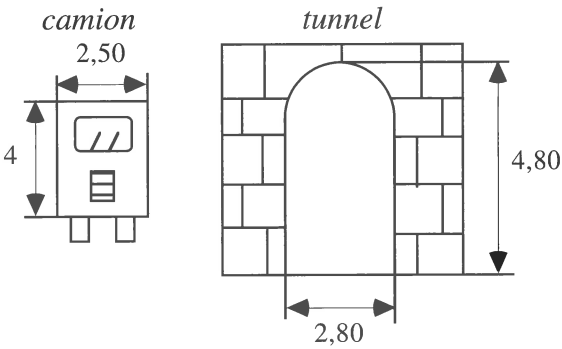
2 - PANIQUE À BORD 3ème - 2nde

C'est la panique à bord du Belem car les appareils ne fonctionnent plus ! Mais on peut encore faire les relèvements par rapport à trois amers A, B, et C, c'est-à-dire que si on note M la position du bateau, on peut connaître les angles $\widehat{AMB} = \alpha$ et $\widehat{BMC} = \beta$.
Pour trouver sur la carte la position M du bateau, le commandant propose la construction suivante :

- Tracer à l'intérieur de l'angle $\widehat{ABC}$, la demi-droite [Bt) faisant avec [BA) un angle de (90° - α) et la demi-droite [Bs) faisant avec [BC) un angle de (90° - β).
- Tracer la perpendiculaire à la droite (BA) en A ; elle coupe la demi-droite [Bt) en I.
- Tracer la perpendiculaire à la droite (BC) en C ; elle coupe la demi-droite [Bs) en J.
- Le projeté orthogonal de B sur la droite (IJ) est M.

Réaliser ce programme de construction en prenant :
AB = 8 cm, AC = 12 cm, BC = 6 cm, α = 72° et β = 78°
Justifier, en utilisant par exemple le cercle de diamètre [BI], qu'on obtient bien ainsi la position du bateau sur la carte.

3 - PASSERA OU PAS ? 3ème - 2nde



Les échelles utilisées sur les deux dessins ne sont pas les mêmes. Les cotes sont indiquées en mètres.
Le camion passera-t-il dans ce tunnel ?

4 - COMME LA LUNE 3ème - 2nde

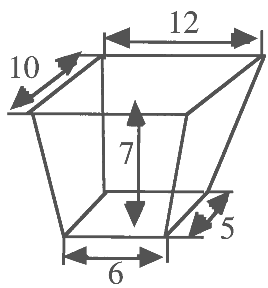
On sait que « la lune de mars » apparaît toujours entre le 8 mars et le 5 avril et que Pâques est le premier dimanche qui suit le quatorzième jour de la « lune de mars ».
L'Ascension, quant à elle, a lieu quarante jours après Pâques, le jour de Pâques étant compté.
En pratique, on détermine la date de Pâques de la manière suivante :
Pâques est à la date (22 + d + c) mars ou (d + e - 9) avril. n étant l'année considérée, d et e sont définis comme suit :

a est le reste de la division de n par 19
b est le reste de la division de n par 4
c est le reste de la division de n par 7
d est le reste de la division de19a + 24 par 30
e est le reste de la division de 2b + 4c + 6d + 5 par 7.

Justifier qu'en 1997 l'Ascension est bien le 8 mai.
Quel jour tombera l'Ascension en l'an 2000 ?

5 - D'APRÈS BHASKARA 2nde

Le mathématicien hindou Bhaskara (XIIe siècle) explique dans son traité « La Lilavati », comment calculer le contenu d'une excavation en forme de tronc de pyramide à bases rectangulaires parallèles dont les dimensions sont celles de la figure ci-dessous :



1) Bhaskara donne en toutes lettres sa méthode de calcul : « *La somme des aires des bases et de l'aire d'un rectangle de largeur la somme des largeurs des bases et de longueur la somme des longueurs des bases, étant divisée par six puis multipliée par la profondeur, donne le volume.* »
Calculer le volume de cette excavation par la méthode de Bhaskara.
Calculer le volume de ce tronc de pyramide en le considérant comme la différence des volumes de deux pyramides.
Comparer les deux résultats.
2) Recommencer le même travail avec une grande base de dimensions 12 et 10, une petite base de dimensions 9 et 7,5 et une profondeur de 8.
3) D'une manière plus générale, on considère une excavation de profondeur h dont les dimensions de la grande base sont L et l et celles de la petite base k × L et k × l (k étant un réel compris entre 0 et 1).
Calculer son volume par les deux méthodes précédentes.
La méthode de Bhaskara est-elle valable ?

6 - CASSE-TÊTE CHINOIS 3ème-2nde

Dans le *Jiuzhang Suanshu* ou *L'Art mathématique en neuf sections*, livre chinois du IIe siècle avant JC, on trouve le problème suivant :

Étant donné un champ de la forme d'un segment circulaire de base b = $78\,\frac{1}{2}$ **et de hauteur =** $13\,\frac{7}{9}$, **trouver son ai.**

• Attention avec cette notation, $13\,\frac{7}{9}$ signifie $13 + \frac{7}{9}$.

Un segment circulaire est la partie d'un disque comprise entre la corde et l'arc qu'elle sous-tend.

1) L'auteur appliquait la formule suivante : $S = \frac{bh + h^2}{2}$
Quelle valeur fournit-elle ?

2) Vingt-deux siècles plus tard, on sait que cette formule donne une valeur erronée de l'aire du champ. **Calculer correctement l'aire de ce champ en justifiant la démarche utilisée.**

3) Quelle est, en pourcentage, l'erreur commise par les chinois de cette époque ?

7 - L'ALGORITHME

$3^{ème}$-2^{nde}

N étant un entier naturel différent de zéro, on définit l'algorithme suivant : on remplace N par le nombre N' obtenu en ajoutant les carrés de ses chiffres, puis on recommence avec N' et ainsi de suite. Exemple : $N = 27$; $N' = 2^2 + 7^2 = 53$,

puis $N = 53$; $N' = 5^2 + 3^2 = 34$, ...

$27 \rightarrow 53 \rightarrow 34 \rightarrow$

On obtient ainsi une succession de nombres qu'on appelle « chaîne ». On dit qu'une chaîne « boucle » si on retrouve, au bout d'un certain nombre d'opérations, l'un des nombres déjà obtenu.

1) En utilisant tous les entiers à un chiffre, vérifier que toutes les chaînes obtenues bouclent. Organiser et représenter cet ensemble de chaînes par un schéma fléché dans lequel chaque nombre n'apparaît qu'une seule fois.
2) Prendre un nombre N à trois chiffres et lui appliquer l'algorithme précédent. Que remarque-t-on ?

8 - LE PRÉNOM MOYEN

$3^{ème}$-2^{nde}

AUDE	AURÉLIE	AXEL	CYPRIEN	ESTHER
FRÉDÉRIC	FULBERT	GUY	GWENAËL	GWLADIS
HORTENSE	JOSIANE	JULIA	JULIETTE	LUCE
LUCIENNE	LYDIE	MUGUETTE	MURIEL	NORBERT
RUTH	YVELINE	YVON		

Pour chercher le prénom « moyen » de ce groupe de personnes, on code les lettres de l'alphabet de la manière suivante :

$A \rightarrow 1$; $B \rightarrow 2$; $C \rightarrow 3$ ... $Z \rightarrow 26$

En codant la première lettre de chaque prénom et en faisant la moyenne, arrondie à l'unité, de ces codes, on trouve un nombre « moyen » qui correspond à une lettre de l'alphabet. En refaisant le même travail pour la seconde lettre de chaque prénom, on obtiendra une seconde lettre « moyenne » et ainsi de suite...

Quel est le prénom « moyen » de ce groupe ?

Énoncés

9 - ON THE ROAD AGAIN $3^{ème}$-2^{nde}

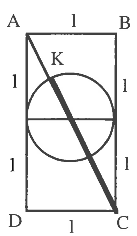
Le pilote d'un avion de tourisme voulait suivre une route de A vers B. Après 20 minutes de vol, il s'aperçoit à l'aide de ses instruments de radio-navigation, qu'il n'a pas bien calculé son cap et qu'il suit une route de A vers C situé 10 degrés à gauche de la route souhaitée (AB).
Pour rejoindre cette dernière, il effectue un virage de 20 degrés à droite puis suit cette nouvelle route.

Dans combien de temps le pilote aura-t-il rejoint la route (AB) ?
Combien de temps aura-t-il perdu ?

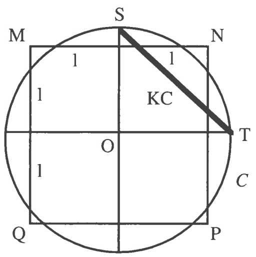
Dans cet exercice, on suppose :
- que le vol est effectué à altitude et vitesse constantes ;
- que toutes les routes suivies sont rectilignes et que le vent est nul.

10 - L'ART D'ARRONDIR $3^{ème}$-2^{nde}

Les Compagnons du Devoir, en réalisant leurs travaux pratiques, nous ont laissé les constructions ci-dessous :



Premier tracé



second tracé

Le premier tracé permet d'obtenir la longueur KC nécessaire au second tracé. On note R, le rayon OS.

Comparer les aires du carré MNPQ et du cercle C.

Comparer leurs périmètres.
Quel était le but recherché par ces compagnons ?

Solutions

1 LES PICMEN

Les picmen se sont « déplacés » 9 fois en une minute. Il y a 8 intervalles de temps (entre deux déplacements). Deux coups de « gong » sont séparés par $\frac{60}{8}$ secondes. Pour détruire un cube de 125 pièces les picmen se « déplaceront » 25 fois, soit sur 24 intervalles de temps. Il leur faudra :

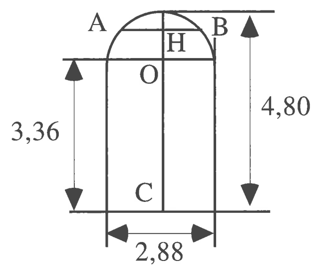
$24 \times \frac{60}{8} = 180$ secondes ou 3 minutes.

2 PANIQUE À BORD

Il s'agit de montrer que $\widehat{AMB} = 72° = \alpha$ et $\widehat{BMC} = 78°$

3 PASSERA OU PAS ?

Pour que le camion passe, il faut que CH mesure 4 m et AB>5 m.
Lorsque CH = 4 m :
AH2 = 1,442 - 0,642 = 1,664
AH ≈ 1,28996 m et AB > 5 m.
Le camion passera.



4 COMME LA LUNE

En 1997, a = 2, b = 1, c = 2, d = 2, e = 6. La date de Pâques est le 30 mars et l'Ascension le 8 mai.
En 2000, a = 5, b = 0, c = 5, d = 29, e = 3. La date de Pâques sera le 23 avril et l'Ascension le 1er juin.

5 D'APRÈS BHASKARA

1) Par les deux méthodes, le volume est 490 unités de volume.
2) Par les deux méthodes, le volume est 740 unités de volume.
3) Par la méthode de Bhaskara, $V = \frac{1}{3} \times L \times 1 \times h \times \frac{1 + k + k^2}{1 - k}$

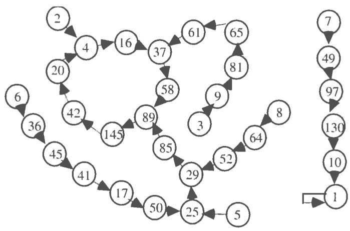
6

CASSE-TÊTE CHINOIS

Par les chinois, aire ≈ 635,69 cm^2. Aujourd'hui, aire ≈ 738,5 cm^2
L'erreur commise par les chinois était de 14%.

7

L'ALGORITHME



Avec un nombre de trois chiffres, on retombe sur la chaîne 7-1 ou sur la boucle 4-20.

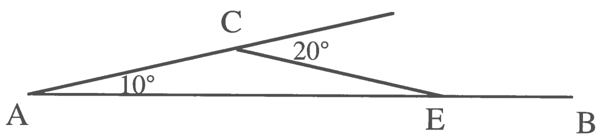
8

LE PRÉNOM MOYEN

moyennes	9,83	20,74	12	9,32	5,12	13,87	14	4,6
Arrondis	10	21	12	9	5	14	14	5
Lettres	**J**	**U**	**L**	**I**	**E**	**N**	**N**	**E**

9

ON THE ROAD AGAIN



Le triangle ACE est isocèle, le pilote mettra 20 minutes après son virage de 20° pour retrouver la direction (AB).

On a : $\dfrac{2\ AC}{40} = \dfrac{2\ AC \cos 10°}{40 - \theta}$ où θ représente le temps perdu.

$\theta = 40\,(1 - \cos 10°) \approx 0{,}6$ min soit environ 36,5 secondes.

10

L'ART D'ARRONDIR LES ANGLES

$KC = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $R = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Les compagnons construisaient ainsi un cercle ayant un périmètre égal à celui d'un carré à O,1% près.