TOURNOI DES VILLES

Le tournoi est destiné aux élèves de la troisième à la terminale, qui s'intéressent suffisamment aux mathématiques pour participer à un tournoi qui a lieu un dimanche matin. Les problèmes proposés sont choisis pour être aussi intéressants et instructifs que possible. Les épreuves sont difficiles, bien qu'elles n'utilisent pas de notions en dehors du programme scolaire. Chaque élève doit rédiger les solutions des problèmes qu'il a résolu.

Le centre principal du tournoi se trouve à Moscou. C'est de là que les villes qui participent au tournoi reçoivent les énoncés et les critères de corrections. Les épreuves ont lieu le même jour dans toutes les villes participantes.

Nous espérons que la confrontation avec des problèmes durs et intéressants permettra aux élèves de mieux comprendre ce que c'est qu'une solution, de ne pas avoir peur de choses difficiles et de trouver plus de goût aux mathématiques.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

Le premier Tournoi des Villes a eu lieu à Moscou il y a 20 ans. Il a été organisé par une seule personne : Nikolaï Nikolaevitch Konstantinov qui s'en occupe toujours aujourd'hui.
À la ville de Moscou se sont rapidement rajoutées plusieurs villes en Russie, puis dans d'autres pays.
En 1998, Paris a, pour la première fois, participé au tournoi, qui compte aujourd'hui 110 villes participantes dans 20 pays différents avec 9000 élèves au total.

PARTENAIRES

Le centre principal d'organisation du tournoi à Moscou.

ÉPREUVES

Épreuves individuelles.
Deux catégories : 3èmes - 2ndes et 1ères - terminales.
Pour chaque catégorie il y a deux versions : une plus dure et une plus facile.
Il y a 5 à 7 problèmes de difficulté croissante pour 4 ou 5 heures.
Le bilan total des points est fait à partir des trois problèmes pour lesquels l'élève en a obtenu le plus.

COMPÉTITION

Le tournoi est constitué de deux épreuves, considérées comme deux tentatives indépendantes. Elles ont lieu un dimanche matin, généralement fin octobre et début mars. En 1998/99, c'est le 8 novembre 1998 et le 15 mars 1999.

CONTACTS

Zvonkine Dimitri,
École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm
75 230 Paris cedex 05
tél : 01 45 80 45 79 ; e-mail : zvonkine@clipper.ens.fr

1 - ÉNONCÉ 1 troisième - seconde

Un cube 20×20×20 est divisé en 8000 cubes unitaires. On écrit un nombre dans chaque cube unitaire. Dans chaque ligne et dans chaque colonne de 20 petits cubes, parallèle à une des arêtes du cube, la somme des nombres fait 1. Dans un des petits cubes, le nombre écrit est 10. Par ce petit cube passent trois couches 1×20×20 parallèles aux faces du cube.

Trouver la somme de tous les nombres en dehors de ces trois couches.

2 - ÉNONCÉ 2 troisième - seconde

Douze candidats au poste de maire participent à une discussion télévisée.

Au bout d'un certain temps l'un d'eux a dit : « Jusque-là on a menti une seule fois. » Un deuxième a dit : « Maintenant, cela fait deux fois. » « Trois fois maintenant », a dit le troisième, et ils ont continué comme cela jusqu'au douzième, qui a affirmé qu'avant lui on avait menti 12 fois.

Le présentateur a alors arrêté la discussion.

Sachant qu'au moins un des candidats a correctement annoncé combien de fois on avait menti avant lui, trouver combien de fois les candidats ont menti au total.

3 - ÉNONCÉ 3 troisième - seconde

Un (m,n)-crocodile est une pièce d'échecs qui, en un coup, peut avancer de m cases dans une direction (verticale ou horizontale), puis de n cases dans la direction perpendiculaire. (Un (2,1)-crocodile est un cavalier ordinaire.)

Montrer que pour n'importe quels entiers m et n on peut colorier les cases d'un échiquier infini en noir et blanc de sorte que deux cases reliées par un coup de crocodile soient toujours de deux couleurs différentes.

4 - ÉNONCÉ 1 premières - terminales

On a 19 petits poids de masse 1g, 2g, 3g, … , 19g. Parmi ces poids 9 sont en fer, 9 autres en bronze et un en or. La masse totale des poids en fer excède de 90g la masse totale des poids en bronze.
Trouver la masse du poids en or.

5 - ÉNONCÉ 2 premières - terminales

n disques en papier de rayon 1 sont posés sur le plan de sorte qu'ils passent tous par un même point et que ce point se trouve strictement à l'intérieur du domaine total couvert par les disques. Ce domaine est un «polygone» à côtés curvilignes.
Trouver son périmètre.

6 - ÉNONCÉ 3 premières - terminales

Un groupe de psychologues a élaboré un test qui attribue à chaque personne un nombre Q qui mesure ses capacités intellectuelles. (Plus Q est grand, plus les capacités sont élevées.) Supposons que chacun des habitants de deux pays A et B ait obtenu son nombre Q. On prend alors pour le niveau intellectuel de chaque pays la moyenne arithmétique des Q de ses habitants.

a) Un groupe d'habitants du pays A a émigré dans le pays B.

Est-il possible que le niveau intellectuel des deux pays ait augmenté ?

b) Après cela, un groupe d'habitants du pays B (parmi lesquels il peut y avoir des anciens émigrés de A), émigre dans le pays A.

Est-il possible que le niveau intellectuel des deux pays augmente de nouveau ?

c) Un groupe d'habitants a émigré du pays A dans le pays B et un autre groupe du pays B dans le pays C. Cela a fait augmenter le niveau intellectuel de chacun des trois pays. Ensuite les flots migratoires ont changé de direction : un groupe d'habitants a émigré de C dans B et un autre de B dans A. Les agences d'information des trois pays affirment que le niveau intellectuel de chaque pays a augmenté encore plus après cette deuxième migration.

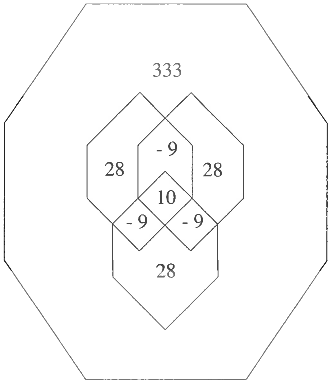
Est-ce que c'est possible (si oui, comment, si non, pourquoi) ?

On suppose qu'entre les migrations le quotient intellectuel Q de chaque personne ne change pas et que personne ne meurt et personne ne naît.

Solutions

1

ÉNONCÉ 1 TROISIÈME-SECONDE



Notons q le petit cube qui contient le nombre 10. Sur le dessin les trois hexagones représentent les trois couches 20×20×1 qui passent par q.
L'intersection de deux couches comme cela est une ligne ou une colonne 20×1×1 qui contient q.
Le nombre écrit dans q est 10. Donc, dans chacune des trois lignes 20×1×1 qui contiennent q, la somme des nombres dans les 19 cubes autres que q fait -9.
Chaque couche est composée de 20 lignes 20×1×1, donc la somme totale des nombres dans chaque couche fait 20. Chacune des 3 couches qui contiennent q, contient en plus deux lignes 20×1×1 qui passent par q. La somme des nombres dans ces deux lignes fait 10 - 9 - 9 = -8. Par conséquent, la somme des nombres dans la couche en dehors de ces deux lignes fait 28.
Le cube entier est composé de 400 lignes 20×1×1, donc la somme de tous les nombres du grand cube fait 400. En enlevant à 400 la somme de tous les nombres écrits dans la réunion des trois hexagones sur le dessin, on obtient la réponse au problème : 333.

2

ÉNONCÉ 2 TROISIÈME-SECONDE

Supposons que le premier candidat ait menti, c'est-à-dire qu'avant lui il y avait eu soit zéro mensonges, soit plus qu'un mensonge. Dans ce cas il est facile à voir que tous les candidats suivants ont également menti, ce qui contredit l'énoncé. Par conséquent, le premier candidat a dit la vérité : on avait menti une seule fois avant lui. On peut alors facilement vérifier que tous les candidats suivants ont menti, ce qui fait au total 12 mensonges.

3

ÉNONCÉ 3 — TROISIÈME-SECONDE

Si parmi n et m il y a un nombre pair et un impair, alors le coloriage ordinaire d'un échiquier normal convient. Si n et m sont tous les deux impairs, alors on peut colorier l'échiquier par colonnes : les colonnes sont noires et blanches en alternances. Si n et m sont tous les deux pairs, soit 2^k plus grande puissance de 2 qui divise n et m. Nous regroupons alors les cases de l'échiquier en carrés $2^k \times 2^k$ (nous allons appeler ces carrés des «hypercases»). Toutes les cases d'une même hypercase seront de la même couleur. Maintenant, divisons n et m par 2^k ; nous obtiendrons deux nombres n' et m' qui ne sont pas pairs en même temps, ce qui nous ramène aux cas précédents : si parmi n' et m' il y a un nombre pair et un impair, alors on colorie les hypercases comme les cases d'un échiquier standard ; si n' et m' sont tous les deux impairs, alors on peut colorier les hypercases par colonnes.

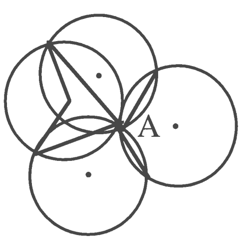
4

ÉNONCÉ 1 — PREMIÈRES-TERMINALES

La somme la plus grande possible des 9 poids en fer est égale à $11 + 12 + \ldots + 19$. La somme la plus petite possible des poids en bronze fait $1 + 2 + \ldots + 9$. La différence entre les deux est exactement 90. Pour tout autre choix des poids en fer et en bronze, la différence entre le poids total des poids en fer et celui des poids en bronze sera strictement plus petite que 90. Par conséquent, notre choix est le seul possible. Donc le poids en or est celui de 10g.

5

ÉNONCÉ 2 — PREMIERES-TERMINALES



La longueur de l'arc $\widehat{B_iB_i+1}$ est égale à l'angle $\widehat{B_iO_iB_{i+1}}$. D'après le théorème de l'angle inscrit, l'angle $\widehat{B_iO_iB_{i+1}}$ fait deux fois l'angle $\widehat{B_iAB_{i+1}}$. Donc le périmètre du polygone curviligne fait deux fois la somme des angles $\widehat{B_iAB_{i+1}}$, soit $2 \times 2\pi = 4p$.

ÉNONCÉ 3 — PREMIERES-TERMINALES

a) Oui. Par exemple, si tous les habitants de A sont plus intelligents que ceux de B et que l'habitant le plus bête de A émigre dans B (où il est le plus intelligent).

b) Non. Soient a et b les niveaux intellectuels de départ des pays A et B, et soient a' et b' leur niveaux après la première migration. Le niveau intellectuel des deux pays augmente après la première migration si et seulement si la moyenne g du groupe des émigrants vérifie $a > g > b$. Dans ce cas, on a également $a' > g > b'$. Par conséquent, la deuxième migration ne peut pas augmenter la moyenne intellectuelle des deux pays.

c) Oui. Pour cela il faut que A et C soient des pays plutôt intelligents, et que B soit plutôt bête, mais avec deux génies. Par exemple, supposons qu'au départ les compositions des pays sont les suivants.

A	50 personnes de $Q = 1$;	moyenne = 3/2
	50 personnes de $Q = 2$.	
B	98 personnes de $Q = 0$;	moyenne = 1/10
	2 personnes de $Q = 5$.	
C	50 personnes de $Q = 1$;	moyenne = 3/2
	50 personnes de $Q = 2$.	

Lors de la première migration, les 50 personnes de $Q = 1$ émigrent de A dans B, et une des deux personnes de $Q = 5$ émigre de B dans C. Les compositions des pays sont maintenant les suivants.

A	50 personnes de $Q = 2$.	moyenne = 2
B	98 personnes de $Q = 0$;	50 personnes de $Q = 1$;
	1 personne de $Q = 5$.	moyenne = 55/149
C	50 personnes de $Q = 1$;	50 personnes de $Q = 2$;
	1 personne de $Q = 5$.	moyenne = 155/101

Ceci fait monter la moyenne de A (car sa moitié la plus bête a émigré), la moyenne de B (car le départ d'un génie est compensé par l'arrivée d'un grand nombre de personnes pas trop bêtes) et la moyenne de C (car un génie est arrivé). Maintenant, lors de la deuxième migration, 50 personnes de $Q = 1$ émigrent de C dans B et une personne de $Q = 5$ émigre de B dans A. La nouvelle composition des pays est comme suit.

A	50 personnes de $Q = 2$;	moyenne = 105/51
	1 personne de $Q = 5$.	
B	98 personnes de $Q = 0$;	moyenne = 100/198
	100 personnes de $Q = 1$.	
C	50 personnes de $Q = 2$;	moyenne = 105/51
	1 personne de $Q = 5$.	

Ceci fait encore augmenter la moyenne de A (car un génie est arrivé), la moyenne de B (car le départ d'un génie est de nouveau compensé par l'arrivée d'un grand nombre de personnes pas trop bêtes) et la moyenne de C (car sa partie la plus bête a émigré).

6