TOURNOI MATHÉMATIQUE DU LIMOUSIN

Le Tournoi s'adresse aux élèves de quatrième, seconde première ou terminale travaillant par équipe de deux. Il obtient la participation de tous les lycées et de plus de trois collèges sur quatre dans les trois départements de la région : Corrèze, Creuse et Haute-Vienne.

Développer le goût de la recherche scientifique, promouvoir l'image des mathématiques auprès des jeunes et du grand public, tels sont ses objectifs. La remise des prix, grande fête des mathématiques et des jeunes a lieu au printemps. Un grand nombre d'élèves de toutes sections y sont récompensés.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

Le Tournoi mathématique du Limousin a été créé en 1987 par la Régionale de Limoges de l'APMEP, le département de Mathématique de la Faculté des Sciences de Limoges, l'Inspection pédagogique régionale, l'IREM de Limoges, groupés en association “ loi 1901 ”.
5700 élèves de quatrième et 1000 de première et terminale ont participé en 1997.

COMPÉTITION

Épreuve 4ème : le 13 janvier 1998 (2 heures durant le temps scolaire).
Épreuve de seconde, 1ère et terminale : 20 janvier 1998 (4 heures un mercredi après-midi).
Remise des prix : le 4 avril, au centre culturel Jean Moulin à Limoges.

PARTENAIRES

Rectorat
Conseil Général du Limousin
Conseils Généraux de Corrèze, Creuse et Haute-Vienne
Banque Tarneaud …

ÉPREUVES

Par équipe de 2.
Catégories : 4ème et seconde/première/terminale.
Les textes proposés, sous forme ludique, donnent envie de chercher, nécessitent une solution rédigée et sont susceptibles de prolongements.

CONTACTS

Tournoi mathématique du Limousin :
IREM 123, av. Albert Thomas 87060 Limoges CEDEX
Jean Lebraud :
15, rue Jean Jaurès 87350 Panazol
Tél : 05 55 30 82 78

Énoncés

1 - À LA BANQUE

4ème

Une banque ne dispose que de billets de 30 F et de 50 F (en nombre illimité).

Comment peut-elle payer exactement 80 F, 90 F et 100 F.

Peut-elle payer n'importe quelle somme multiple de 10 F et plus grande que 75 F ?

2 - DES DÉS TAPISSENT

4ème

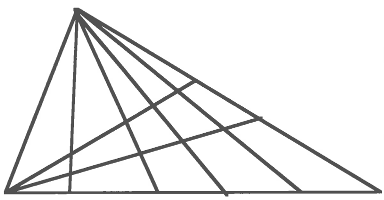
On tapisse l'intérieur de boîtes cubiques sans couvercle (fond et parois) avec des dés de 1 cm de côté.
Combien faut-il de dés pour tapisser ainsi une boîte cubique de 8 cm de côté ?

Une autre boîte cubique est déjà tapissée. Il faut exactement 3600 dés de 1 cm de côté pour terminer son remplissage.
Quel est le côté de cette boîte ?

3 - QUE DE TRIANGLES

4ème

Une méthode permet de connaître le nombre de triangles dessinés sur la figure ci-dessous



Sauriez-vous trouver cette méthode ?

Au fait, combien y a-t-il de triangles ?

4 - BISQUE, ... RAGE ! 4ème

$17 = 4^2 + 1^2$ $50 = 5^2 + 5^2$ 17 et 50 sont des “ bisques ”.
Un “ bisque ” est une somme de deux carrés d’entiers non nuls.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
A			■			■		
B	■			■			■	
C		■			■			■
D			■			■		

Reproduisez la grille ci-dessus et remplissez-la à partir des renseignements suivants :

Toutes les définitions correspondent à des “ bisques ” à deux chiffres. Tous les “ bisques ” de la grille sont différents.

On écrit un chiffre par case.

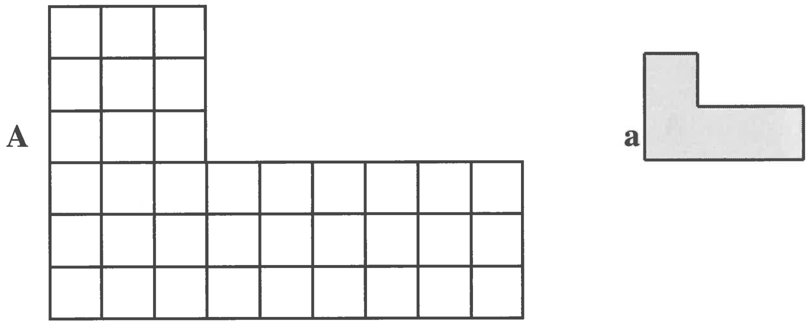
Horizontalement
A : Porte bonheur ou malheur.
Le produit de ses chiffres est 72.
Nombre de semaines de l’année.
B : La somme de ses chiffres est 10.
C’est un multiple de 5.
C : C’est le carré d’un entier.
Nombre de tous les bisques à un ou deux chiffres.
D : Somme des trois plus petits “ bisques ” à deux chiffres.
Produit de tous les “ bisques ” à un chiffre.
La moitié du carré de 10.

Verticalement
a : C’est un multiple de 37.
b : C’est la température idéale.
c : Double du carré de 4.
d : C’est le double d’un “ bisque ” à deux chiffres.
e : Le plus grand des “ bisques ” à deux chiffres.
f : $18 + 2 \times 20 - 5$
g : C’est un multiple de 5 et la somme de ses chiffres est le carré d’un entier.
h : L’inverse de 0,05.

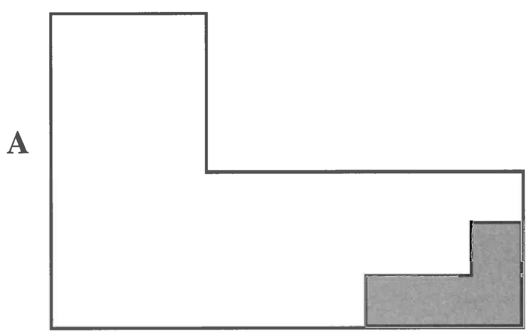
Vous n’oublierez pas de justifier que tous les nombres de deux chiffres écrits dans la grille sont des “ bisques ”.

5 - CARRELONS ! 4ème

On veut " carreler " la surface **A** avec des carreaux de forme **a**.



Les carreaux ne peuvent pas être découpés mais peuvent être retournés.
Peut-on prévoir le nombre de carreaux nécessaires ? Proposez une disposition.
On a disposé ainsi le premier carreau :



Peut-on réaliser le carrelage de A ?

6 - LES CAMÉLÉONS 1ère-Term

Dans un archipel étrange les caméléons sont gris, bruns ou rouges. Quand deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent ils prennent tous les deux la troisième couleur.

a) Sur une île il y a un caméléon gris, sept bruns et cinq rouges. Montrer qu'il est possible qu'au bout d'un certain temps il n'y ait plus que des caméléons rouges.
b) Sur une autre île il y a treize caméléons gris, quinze bruns et dix-sept rouges.
En imaginant qu'il y ait deux rencontres gris-brun, trois rencontres brun-rouge et une rencontre gris-rouge, combien y aura-t-il de caméléons de chaque couleur sur l'île ?
c) Y a-t-il une solution pour que tous les caméléons de cette île soient un jour tous de la même couleur ?

7 - RANDO-MATH Seconde

Martial et Valérie décident de faire à pied le tour du lac de Vassivière.
Martial tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, Valérie dans le sens contraire ; chacun marche à une vitesse constante.
Ils partent au lever du soleil d'un même endroit situé au bord du lac.
Ils se rencontrent à 9 heures, font alors une pause pour casser la croûte puis repartent tous les deux à 9 heures 30, chacun continuant dans le sens qu'il a choisi au départ et en reprenant sa vitesse initiale.
Martial est le plus rapide ; il retrouve le point de départ à 11 heures 30. Valérie n'y arrive qu'à 14 heures.

À quelle heure le soleil s'est-il levé ce jour là ?

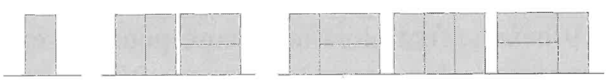
8 - RONDS DANS L'EAU
2nd-1ère-Term

Sur les bords d'une piscine circulaire de 10 m de diamètre on a placé huit anneaux espacés régulièrement.
Un nageur part d'un anneau et doit ramasser tous les autres en nageant en ligne droite d'un anneau à l'autre.
Il décide de parcourir la plus grande distance possible.
Dans quel ordre doit-il ramasser les huit anneaux, dans le cas où : - il s'arrête dès qu'il atteint le dernier anneaux ?
- après avoir ramassé le dernier anneau, il revient à son point de départ, toujours en nageant en ligne droite ?

9 - LE PAYS DES LACS
1ère-Term

Au pays des lacs il y a sept lacs. Ils sont reliés par dix canaux de sorte que l'on peut se déplacer d'un lac à l'autre sur ces canaux. Les canaux ne se croisent pas et ne se ramifient pas. Une île, comme vous le savez, est entourée d'eau et dans ce pays il n'y a pas d'île au milieu des lacs.
Combien y a t il d'îles au pays des lacs ?

10 - DES MURETTES
1ère-Term



On construit des murettes à l'aide de briques toutes identiques de dimension 20 cm sur 10 cm. Elles ont toutes pour hauteur 20 cm.

Combien y a-t-il de dispositions si on veut faire des murettes de une brique ? de deux briques ? de trois briques ? de quatre briques ? de cinq briques ? et si on utilise 12 briques ?

Solutions

1

À LA BANQUE

$80 = 30 + 50$; $90 = 3 \times 30$; $100 = 2 \times 50$
À partir de 80, 90, 100, qui sont trois multiples de 10, et en n'utilisant que des billets de 30 F on peut obtenir toutes les sommes multiples de 10 F.

2

DES DÉS TAPISSENT

Pour tapisser une boîte cubique de 8 cm d'arête, il faut
$8 \times 8 \times 8 - 6 \times 6 \times 7$, soit 260 dés.
Pour terminer de tapisser une boîte cubique de n cm d'arête, il faut
$A = (n-2) \times (n-2) \times (n-1)$ dés. Pour $A = 3600$, $n = 17$.

3

QUE DE TRIANGLES

Il y a 60 triangles dessinés sur la figure.

4

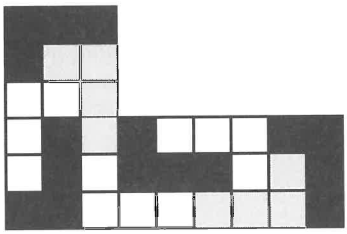
BISQUE, ... RAGE !

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
A	1	3		8	9		5	2
B		7	3		8	5		0
C	7		2	5		3	4	
D	4	0		8	0		5	0

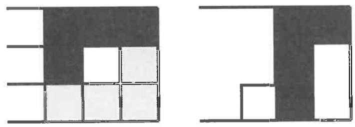
5

CARRELONS !

On utilise 9 carreaux.



Avec le premier carreau posé, les deux dispositions pour placer un deuxième carreau ne conviennent pas.



6

LES CAMELEONS

a) Après les transformations suivantes:

	gris	bruns	rouges
	1	7	5
brun-rouge	3	6	4
brun-rouge	5	5	3
gris-brun	4	4	5
gris-brun	3	3	7
gris-brun	2	2	9
gris-brun	1	1	11
gris-brun	0	0	13

il ne reste que des caméléons rouges.

b) Il y aura 16 caméléons gris, 12 bruns et 17 rouges.

c) Impossible.

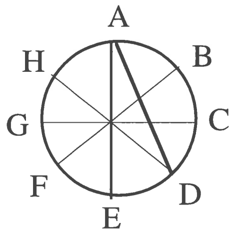
7

RANDO-MATH

Ce jour-là, le soleil s'est levé à 6 heures.

8

RONDS DANS L'EAU



Nommons les anneaux A, B, C, D, E, F, G, H.
Si le nageur s'arrête dès qu'il a atteint le dernier anneau, quand il parcourt 4 diamètres et trois segments de longueur AD, il effectue un trajet de longueur maximale dont une valeur approchée est, au cm près, 67,72 m.

Il peut par exemple ramasser les anneaux dans l'ordre A, E, B, F, C, G, D, H.
Dans le cas où le nageur revient au point de départ, le trajet de longueur maximale est de type 2 diamètres et 6 segments de longueur AD et a pour longueur, au cm près, 75,43 m.
Il ramasse les anneaux dans l'ordre A, E, H, C, F, B, G, D, A.

9

LE PAYS DES LACS

Pour L lacs et C canaux reliant tous les lacs, le nombre minimum de canaux nécessaires est L - 1 et le nombre d'îles est I = C - (L -1).
Pour sept lacs, il y a quatre îles.

10

DES MURETTES

Désignons par U_n le nombre de murettes différentes qu'on pourrait fabriquer avec n briques. Un mur de n briques peut être fabriqué soit avec un mur de n-1 briques en ajoutant à droite 1 brique verticale, soit avec un mur de n-2 briques en ajoutant à droite 2 briques posées horizontalement.
Il y a U_{n-1} possibilités dans le premier cas et U_{n-2} possibilités dans le second cas. On a : $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ une suite de Fibonacci où chaque terme s'obtient en ajoutant les deux précédents :
$U_1 = 1$, $U_2 = 2$, $U_3 = 3$, $U_4 = 5$, $U_5 = 8$, $U_6 = 13$, $U_7 = 21$,
$U_8 = 34$, $U_9 = 55$, $U_{10} = 89$, $U_{11} = 144$, $U_{12} = 233$.