CHAMPIONNAT FFJM

La Fédération Française des Jeux Mathématiques (F.F.J.M.) offre chaque année aux élèves, collégiens, lycéens, étudiants ou adultes de France ou de nombreux autres pays une compétition exaltante s'étalant sur plusieurs mois.
Sept catégories, quatre phases successives, des centaines de milliers de concurrents, des centaines de prix de valeur et un maximum d'humour caractérisent ce que les journalistes n'ont pas hésiter à appeler «l'événement le plus astucieux de l'année», et qui a le mérite d'associer scolaires et adultes.
Dans les énigmes du championnat, les situations sont concrètes et l'humour de rigueur. Sont exigés de la logique, de l'astuce, de l'intuition, de l'imagination, de la persévérance, le goût de la recherche, mais pas réellement de connaissances. Au risque de déplaire à quelques puristes, seul le résultat compte. Encore qu'en cas de solution multiple, il faille donner le nombre exact de solutions.

LE CHAMPIONNAT HORS DE FRANCE

Le championnat voit chaque année la participation de concurrents issus de nombreux pays. Des structures relais organisent demi-finales, finales régionales ou nationales en Belgique, Centrafrique, Italie, Luxembourg, Niger, Pologne, Québec, Slovaquie, Suisse, Tchad, République Tchèque Tunisie, Ukraine.

CONTACTS

FRANCE
F.F.J.M
1, avenue Foch
94700 Maisons-Alfort
Tél : 01 43 68 95 16
Fax : 01 47 07 88 18

BELGIQUE
F.F.J.M Belgique
André Parent
B.P. 157
B- 7700 MOUSCRON
Tél-Fax :
32 (0) 56 33 14 53

SUISSE
F.F.J.M. Suisse
Philippe Dony et Christian Pralong
Établissement Secondaire de Prilly
Case Postale 91
CH 1008 PRILLY

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

Depuis le premier Championnat, en 1987, patronné par les revues Jeux & Stratégie et Science & Vie, que de chemin parcouru ! La FFJM a été l'un des artisans du renouveau de l'image des mathématiques auprès des élèves et du grand public. Les finales successives ont égrené des noms insolites et prestigieux : Cité des Sciences, École Polytechnique, Sénat ou ... Parc Astérix.
Le championnat est encore, à sa seizième édition, la compétition de référence avec ses quatre étapes qui sont autant de fêtes pour les participants et les animateurs de 9 à 99 ans.

ÉPREUVES

Catégories : 7
CM = 2 dernières années du primaire,
C1 = 6e-5e (**F**rance), 6e primaire-1ère secondaire (**B**elgique), 6e-7e (**S**uisse), 1e-2e secondaire (**T**unisie),
C2 = **F** : 4e-3e, **B** : 2e-3e secondaire, **S** : 8e-9e, **T** : 3e-4e secondaire,
L1 = **F** : 2nde à terminales, **B** : 4e à 6e secondaire, **S** : gymnase, **T** : 5e à 7e secondaire,
L2 = deux premières années du supérieur scientifique,
GP = Grand Public (adultes),
HC = Haute Compétition.
Deux modes de participation aux 1/4 de finales possibles :
- Par correspondance.
- Dans les établissements scolaires.

COMPÉTITION

*Quarts de finale (décembre).
*Demi-finales régionales (mars).
*Finales régionales et nationales.
*Finale internationale et Concours parallèle open (septembre).

PARTENAIRES

Hewlett Packard
Éditions Belin
Jeunesses Scientifiques (Belgique)
Encyclopédia Universalis

CONTACTS

ITALIE
Rosi Tettamanzi Guerraggio, Centro PRISTEM, Università Bocconi, Via Isonzo n°25, 20100 Milano

QUÉBEC
Frédéric Gourdeau, dép. de Mathématiques et de Statistique, Université Laval, QUEBEC G1K 7P4

NIGER
A.N.J.M, Ali Dan Farouata
BP 13180, NIAMEY
Tél : (227) 72 22 81

POLOGNE
F.P.J.M, R. Rabczuk
H. Steinhaus Center
Politec. Wroclawska
50-370 WROCLAW
Tél : (48) 71 20 35 30

TCHAD
Marc Moreau A.T.J.M., s/c Mission Française de Coopération et d'Action Culturelle, BP 898, N'DJAMENA

TUNISIE
A.T.S.M., Bechir Kachoukh
43, rue de la Liberté
2019 Le Bardo
Tél : (216) 1 261 455

1 - Les LONGUEURS

Combien de longueurs différentes existe-t-il entre les points du réseau ci-contre ?

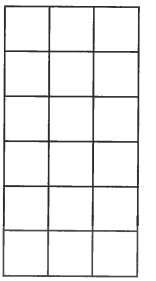
2 - La JOURNÉE de Mr TÊTENLAIR

Monsieur Têtenlair, qui est représentant, habite sur la Nationale 7. Aujourd'hui, en partant de chez lui, il a fait un premier parcours, d'une traite, de 53 km pour voir un client. Il a ensuite effectué un second trajet de 79 km, puis un troisième de 27 km, et enfin, un quatrième de 9 km. M. Têtenlair sait qu'il a fait ces quatre trajets, les seuls de sa journée, sur la Nationale 7, mais, très étourdi, il ne sait plus dans quel sens il a effectué chacun d'eux. «De toutes façons, pense-t-il en calculant, je suis au maximum à 168 km de chez moi !».

À combien de kilomètres est-il de chez lui, au minimum ?

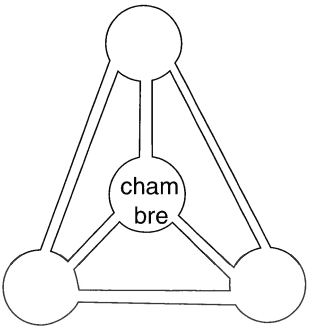
3 - Le RECTANGLE à SECRETS

Mathilde et Mathias ont inventé un moyen de communication secret. L'expéditeur écrit le texte dans le rectangle, ligne par ligne, puis le recopie colonne par colonne, en séparant les lettres en trois "mots" de six lettres. Celui qui reçoit le message a vite fait de décoder. Mathilde, pendant le contrôle de mathématiques, a oublié sa calculette. Angoissée, elle adresse à Mathias le message suivant :
«S T I U O E E F S A R ? P O Q T Z».



Quelle doit être la réponse de Mathias (en clair) **?**

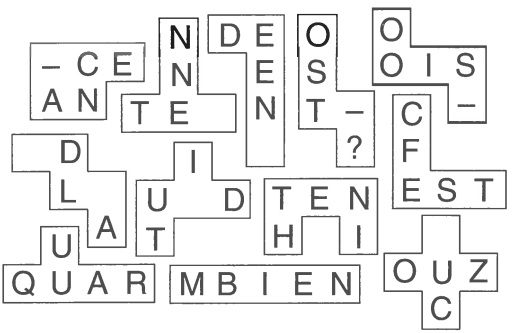
4 - Les GARDE-MANGER de MIRÔ



Le terrier de Mirô, la taupe, comprend quatre pièces reliées par six galeries. L'une de ces pièces est la chambre à coucher de Mirô, et les trois autres lui servent de garde-manger : Mirô y entrepose ses réserves de vers de terre. La mémoire de Mirô étant aussi bonne que sa vue, pour s'y retrouver, dans chaque galerie, celle-ci a placé un petit écriteau sur lequel elle a inscrit la différence entre les nombres de vers de terre (le plus grand moins le plus petit) des deux pièces situées aux extrémités de cette galerie. Voici ce qu'indiquent les six écriteaux aujourd'hui : ① ② ③ ④ ⑤ ⑥.

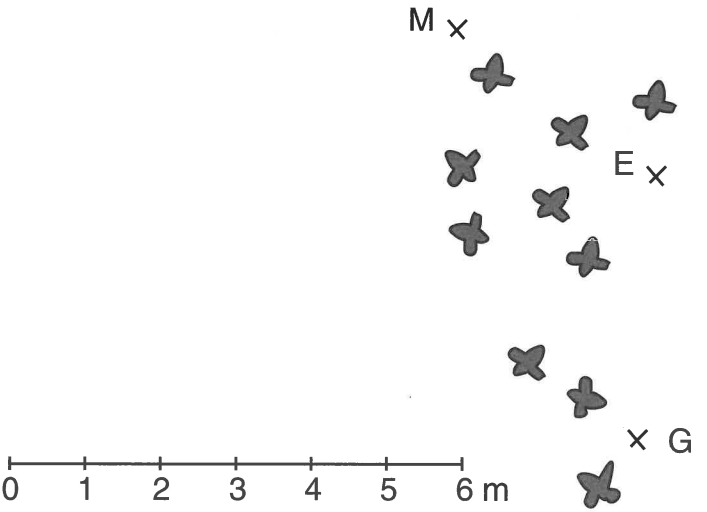
Quels sont les nombres de vers de terre contenus dans les trois garde-manger de Mirô, du moins rempli au mieux rempli ?
Note : La chambre à coucher ne contient, bien sûr, aucun ver de terre.

5 - « 12 x 5 = 6 x 10 »



6 - Les 3 PETITES GRENOUILLES

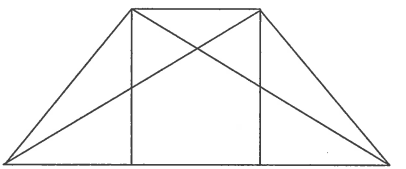
La petite grenouille Géraldine (G) et ses amies Méline (M) et Elane (E), ont rendez-vous sur un nénuphar. Géraldine est à moins de 4 m du nénuphar où elles ont rendez-vous, mais elle est plus près de ce nénuphar que Méline. Elane, quant à elle, est à moins de 2 m de leur lieu de rendez-vous.



Sur quel nénuphar ont-elles rendez-vous ?

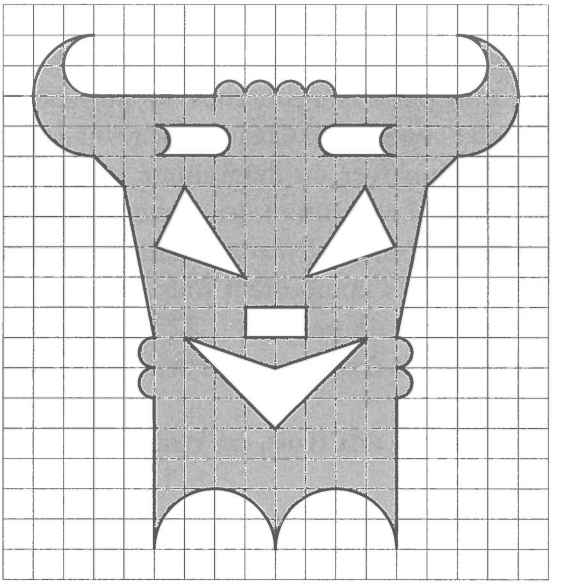
7 - Les TRIANGLES

Combien la figure ci-contre comporte-t-elle de triangles entièrement dessinés et constitués d'un, de deux ou de trois morceaux **?**



8 - Le MASQUE INCA

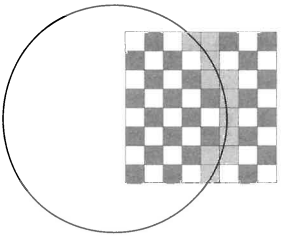
Des recherches archéologiques viennent de révéler à nos yeux émerveillés un masque inca en or pur. Le plan de ce masque est représenté ci-contre sur un plan quadrillé.



Calculez l'aire de ce masque, l'unité d'aire étant l'aire d'un petit carreau.

On n'oubliera pas de déduire l'aire des yeux, de la bouche, du nez et des sourcils. Pour d'éventuels calculs, on prendra 355/113 pour π.

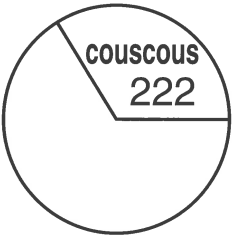
9 - CERCLE sur l'ÉCHIQUIER



Mathias a dessiné un échiquier sur une feuille de papier. Il prend ensuite son compas et trace un cercle qui passe à l'intérieur de plusieurs cases de l'échiquier (le dessin montre un exemple où le cercle traverse 11 cases de l'échiquier).

Si Mathias choisit bien le centre et le rayon de son cercle, combien de cases peut-il traverser, au maximum ?

10 - Les TROIS DIAGRAMMES



Thomas est directeur d'une chaîne de restauration rapide qui propose trois plats tous les jours : un couscous, un poisson et un plat végétarien. Chacun des restaurants vient d'envoyer un diagramme circulaire donnant la répartition des ventes des trois plats proposés. Etrangement, les trois diagrammes comportent tous un angle de 120°, et pour les trois restaurants, on peut lire : 222 couscous et 114 poissons. Pourtant les nombres des plats végétariens vendus sont tous différents.

Combien, à eux trois, ces restaurants ont-ils vendu de plats végétariens ?

11 - MOINS UN PARTOUT

Patricia est au volant de son automobile, qui a roulé beaucoup moins de 100 000 km. Elle regarde le compteur et se rend compte que le nombre à cinq chiffres qui y est affiché est un carré. Or, elle se souvient qu'il y a exactement 1 an, 1 mois, 1 semaine, 1 jour et 1 heure, le nombre qui était alors affiché au compteur de sa voiture était déjà un carré, mais que chacun des cinq chiffres était inférieur d'une unité au chiffre affiché aujourd'hui.
Quel est le kilométrage actuel de la voiture de Patricia ?

0 ? ? ? ? ?

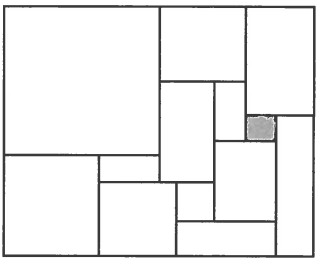
Note : on ne tient évidemment pas compte du 0 initial affiché au compteur.

12 - RECTANGLE de CARRÉS

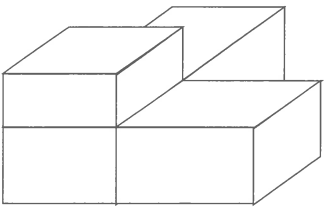
(coefficient 13)

Ce rectangle est composé de carrés, mais la figure est un peu fausse, bien que les alignements soient respectés. Le plus petit carré mesure 3 cm de côté.

Quelle sont les dimensions du rectangle ?



13 - Les BRIQUES de MARK OV



Les briques de Mark Ov sont des parallélépipèdes rectangles ne possédant aucune face carrée. Les dimensions de chaque brique sont entières, dans une certaine unité. De plus, ces briques présentent la particularité que la somme des carrés de leurs trois dimensions est égale au triple de leur produit, à l'instar du cube de côté unité.

Un exemple d'une telle brique est (2 ; 5 ; 29), puisque
$2^2+5^2+29^2 = 3\times(2\times5\times29) = 870$.

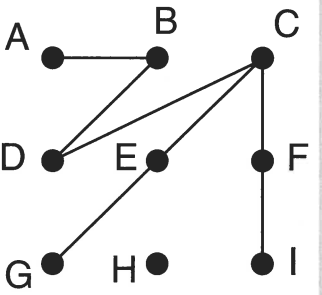
La figure ci-dessus, qui ne respecte pas les proportions, montre quatre briques de Mark Ov assemblées en coin. Pour chacune des trois surfaces de contact, les deux dimensions de chacune des deux briques correspondent exactement.

Si les quatre briques sont toutes différentes les une des autres, quel est le volume minimum de la plus volumineuse d'entre elles ?

1

LES LONGUEURS

Il existe **5 longueurs différentes** entre les points de ce réseau :
la longueur AB, que l'on trouve 12 fois : AB, BC, DE, EF, GH, HI, AD, DG, BE, EH, CF, FI
la longueur AC, présente 6 fois : AC, DF, GI, AG, BH, CI
la longueur AE, présente 8 fois : AE, DB, BF, EC, DH, GE, HF, EI
la longueur AF, présente 8 fois : AF, DC, GF, DI, AH, GB, BI, HC
et la longueur AI, que l'on ne trouve que 2 fois : AI, GC.



2

LA JOURNÉE DE MONSIEUR TÉTENLAIR

Monsieur Têtenlair est à une distance de chez lui égale à :
53 ± 79 ± 27 ± 9 km.
Dans cette expression, chacun des signes "±" peut être ou bien un signe "+", ou bien un signe "–". Les trois signes à interpréter conduisent à huit expressions différentes pour lesquelles seule la valeur absolue du résultat (sans le signe) a une importance :

53 + 79 + 27 + 9 = 168 ; 53 + 79 + 27 – 9 = 150 ;
53 + 79 – 27 + 9 = 114 ; 53 – 79 + 27 + 9 = 10
53 + 79 – 27 – 9 = 96 ; 53 – 79 + 27 – 9 = – 8 ;
53 – 79 – 27 + 9 = – 44 ; 53 – 79 – 27 – 9 = – 62.

On en déduit que M. Tétenlair est au minimum à **8 km de chez lui**.

3

LE RECTANGLE À SECRETS

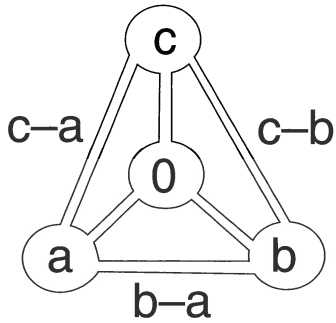
Ecrivons le message dans les cases du rectangle, colonne par colonne.
Lisons ensuite les lettres ligne par ligne :
« SEPTFOISQUATORZE? ».
Mathias doit donc répondre : 98.

S	E	P
T	F	O
I	S	Q
U	A	T
O	R	Z
E	?	

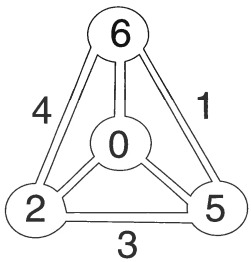
4

LES GARDE-MANGER DE MIRO

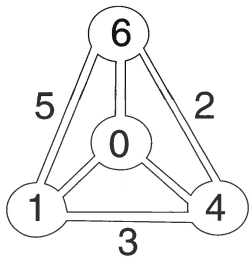
Remarquons tout d'abord que les nombres de vers de terre a, b, et c des trois garde-manger sont tous différents. On peut ensuite supposer que l'on a $a < b < c$. On a obligatoirement $c = 6$ (6 ne pouvant apparaître que comme la différence 6 – 0). Le nombre b ne peut être égal à 1 (sinon, on aurait $a = 0$, et la différence 6 apparaîtrait deux fois), ni à 2 (sinon la différence 1 apparaîtrait deux fois), ni à 3 (sinon la différence 3 apparaîtrait deux fois). Il ne peut donc prendre que les valeurs 4 ou 5.



Si $b = 4$, $c–b = 2$.
Le nombre a ne peut prendre que la valeur 1, ce qui fournit une première solution.



Si $b = 5$, $c–b = 1$.
Le nombre a ne peut alors prendre que la valeur 2, ce qui fournit une seconde solution.

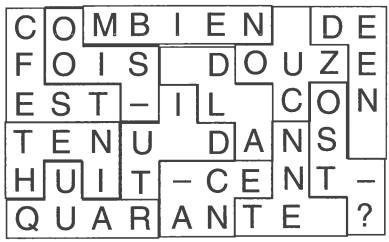


Le problème possède deux solutions : les garde-manger de Mirô contiennent 1, 4 et 6 vers de terre, ou 2, 5 et 6 vers de terre. Les solutions se déduisent l'une de l'autre en prenant les compléments à 6 de 0 ; 1 ; 4 ; 6.

5

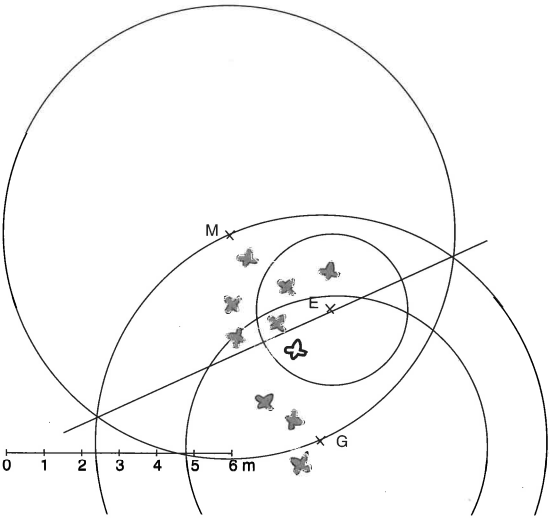
12 x 5 = 6 x 10

$$\frac{840}{12} = \mathbf{70}.$$



6

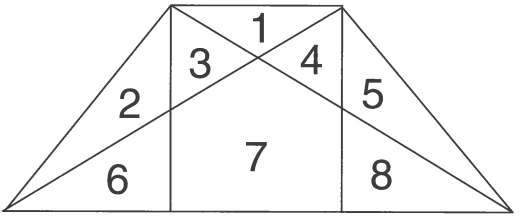
LES TROIS PETITES GRENOUILLES



Le nénuphar du rendez-vous se trouve à moins de 4 m de Géraldine et à moins de 2 m d'Elane. Il est donc situé à l'intérieur du disque de centre G et de rayon 4 m et à l'intérieur du disque de centre E et de rayon 2 m. Il existe deux nénuphars qui satisfont à ces deux conditions. Mais le nénuphar cherché doit également être plus près de Géraldine que de Méline. Si on trace la médiatrice du segment [MG], il doit donc être situé du côté de G. Cette fois-ci, il n'y a plus qu'un nénuphar qui convient : celui indiqué en blanc sur le dessin.

7

LES TRIANGLES

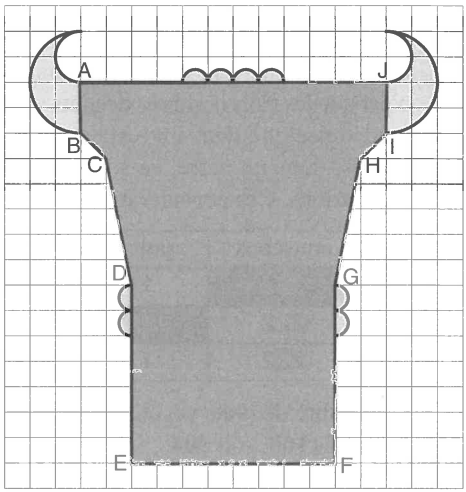


Dénombrons les triangles :
* un morceau : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8
* deux morceaux : 1+3, 1+4, 2+3, 4+5, 2+6, 5+8
* trois morceaux : 1+3+2, 1+4+5, 3+7+8, 4+7+6, 6+7+8.

On compte donc 18 triangles constitués d'un, de deux ou de trois morceaux.

8

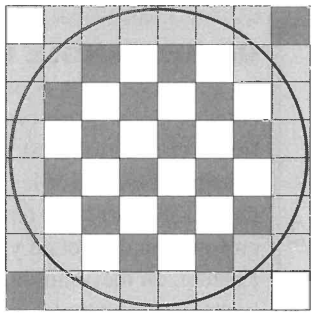
LE MASQUE INCA



Considérons tout d'abord le polygone ABCDEFGHIJ (voir figure ci-contre), qui peut se décomposer en deux rectangles et deux trapèzes isocèles. Son aire est égale à $24 + 11 + 45 + 56$, soit 136 carreaux-unités.
Occupons-nous maintenant des "détails".
L'aire de chaque sourcil vaut 2 carreaux-unité. Celle des yeux se calcule par différence : le triangle de chaque oeil est inscrit dans un carré de 9 carreaux-unités dont il faut ôter trois triangles d'aires 1,5 carreaux, 1 carreau et 3 carreaux, ce qui donne 3,5 carreaux par oeil.
Le nez a une aire de 2 carreaux, et la bouche une aire de 6 carreaux.
Si l'on considère maintenant les aires des demi-disques à ajouter et à soustraire (cheveux, joues, cornes et menton), on a :
$\pi\,(4\times 0{,}5^2 + 2^2 - 1^2 - 2^2) = \pi\,(1 + 4 - 1 - 4) = 0$. Autrement dit, les parties rentrantes et sortantes en forme de demi-disques se compensent exactement. On n'a donc nul besoin d'une valeur approchée du nombre π.
L'aire totale du masque est donc égale à $136 - 2\times 2 - 2\times 3{,}5 - 2 - 6$, soit **117 carreaux-unités**.

9

CERCLES SUR L'ÉCHIQUIER



L'intérieur de l'échiquier contient 7 lignes verticales et 7 lignes horizontales. Un cercle peut couper au plus deux fois chaque ligne, ce qui donne un maximum de 28 points d'intersection distincts entre le cercle et les lignes intérieures de l'échiquier. Si le cercle ne passe par aucun sommet du quadrillage, ce que l'on peut toujours réaliser moyennant un déplacement du centre, ou une modification du rayon, aussi minimes soient-ils, chaque intersection correspond au passage d'une case dans une autre. Le cercle peut donc théoriquement traverser au maximum **28 cases**. Le dessin ci-contre montre qu'une telle solution existe.

10

LES TROIS DIAGRAMMES

Si les trois restaurants ont vendu le même nombre de couscous et le même nombre de poissons et que pourtant, les trois diagrammes sont différents, c'est que les trois nombres de plats végétariens sont différents. On peut donc en déduire que dans un restaurant, les couscous représentent le tiers des ventes, dans un autre, ce sont les poissons et dans le troisième les plats végétariens. Ces considérations conduisent au tableau suivant.

couscous	poisson	plat végét.	TOTAL
222	114	330	$3 \times 222 = 666$
222	**114**	6	$3 \times 114 = 342$
222	114	**168**	$3 \times 168 = 504$

Le nombre de plats végétariens vendus dans les trois restaurants est égal à 330+6+168, soit **504**.

11

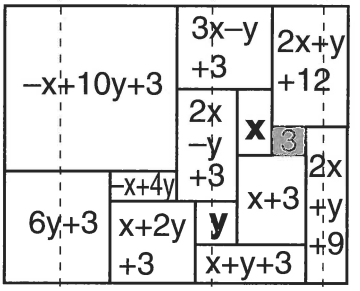
MOINS UN PARTOUT

Désignons par a le kilométrage affiché aujourd'hui, et par b celui affiché il y a un an, un mois, une semaine, un jour et une heure. D'après l'énoncé, on doit avoir : $a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b) = 11\,111$.
Or $11\,111 = 41 \times 271$.
On a donc deux cas à étudier.
1er cas : $a - b = 1$ et $a + b = 11\,111$, qui conduit à $a = 5\,556$ et $b = 5\,555$, à rejeter, car $5\,555^2 > 100\,000$.
2ème cas : $a - b = 41$ et $a + b = 271$, qui conduit à $a = 156$ et $b = 115$, qui convient, car $115^2 = 13\,225$ et $156^2 = 24\,336$.
Le kilométrage actuel de la voiture de Patricia est donc égal à **24 336 km**.

12

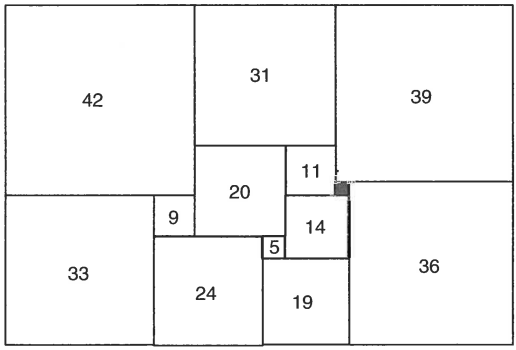
UN RECTANGLE DE CARRÉS

En désignant par x et par y les côtés de deux carrés (voir figure ci-contre), il est possible d'exprimer les côtés de tous les carrés du rectangle en fonction de x et de y. Ensuite, en mesurant la hauteur du rectangle en trois endroits différents (matérialisés par des pointillés), on obtient la double égalité suivante :



12 SUITE

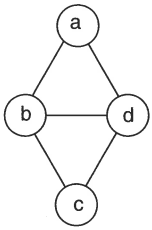
$-x + 16y + 6 = 6x + 9 = 4x + 2y + 21$.
Ce système d'équations a pour solutions $x = 11$ et $y = 5$.
On en déduit les dimensions du rectangle : **75 cm et 112 cm**.

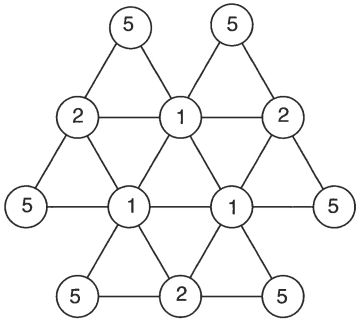


13

LES BRIQUES DE MARK OV

Considérons tout d'abord le problème en n'excluant pas les faces carrées.
On montre que si (a ; b ; d) et (b ; c ; d) sont deux briques de Mark Ov, alors :





$a^2 + b^2 + d^2 = 3abd$ et $c^2 + b^2 + d^2 = 3cbd$,
d'où $a^2 - c^2 = 3bd(a - c)$ et $a + c = 3bd$.

On peut ainsi, à partir de la solution triviale (1 ; 1 ; 1) obtenir la solution (1 ; 1 ; 2) puis la solution (1 ; 2 ; 5).
Cette solution nous conduit ensuite aux solutions (1 ; 5 ; 15), (2 ; 5 ; 29), (1 ; 13 ; 34), (1 ; 34 ; 89), (2 ; 29 ; 169), (5 ; 13 ; 194), …
Au-delà, on ne peut trouver que des nombres supérieurs à 94 et des volumes supérieurs à $5 \times 13 \times 194$. Les quatre briques de Mark Ov ont donc pour dimensions (1 ; 2 ; 5), (1 ; 5 ; 13), (1 ; 13 ; 34) et (5 ; 13 ; 194) et la valeur minimale du volume de la plus grande est égal à **12610**.