MATHÉMATIQUES SANS FRONTIÈRES

Une compétition vraiment internationale

C'est une compétition entre **classes de troisième et seconde** en **France** et de niveau équivalent à l'**étranger**. Elle est organisée par l'Inspection Pédagogique Régionale et par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de l'Académie de Strasbourg.

Une **équipe internationale de professeurs de mathématiques** est chargée de la création des sujets : 10 exercices en troisième et 3 de plus en seconde, l'énoncé de l'un d'entre eux est donné en **allemand**, **anglais**, **italien** et **espagnol**, et la solution doit être rédigée dans l'une de ces langues.

La compétition s'adresse aux **classes entières** et c'est la participation de tous, l'esprit d'équipe, l'initiative des élèves et la pratique d'une langue étrangère qui sont valorisés. La difficulté graduée et les thèmes variés des exercices permettent à tous les élèves d'une même classe d'apporter leur contribution et chacun peut y trouver du plaisir selon ses goûts et ses compétences.

L'objectif est ainsi d'ouvrir des frontières entre la France et les pays voisins, entre les établissements scolaires, les entreprises et la cité, entre les mathématiques et les langues vivantes, entre les collèges et les lycées et entre les élèves d'une même classe.

De nombreux lots viennent récompenser les lauréats en présence de leurs professeurs, de personnalités locales et de la presse.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

• **1989/90** : Première édition rassemblant 87 classes et 2400 élèves du nord de l'Alsace.
Depuis, le nombre des participants est en augmentation constante : 280 classes et 7900 élèves en **1990/91**, 2400 classes et 63700 élèves en **1995/96**, 3500 classes et 86700 élèves en **2000/01**.

• 30 secteurs d'organisation répartis dans 25 pays. Des épreuves traduites dans une dizaine de langues différentes. Toutes les équipes concourent à partir des mêmes sujets, élaborés par une équipe de conception internationale, siégeant à Strasbourg.

• Depuis 1992 : participation de l'académie d'Aix-Marseille, avec plus de 12 000 élèves aujourd'hui.
Date de 1ère participation et nombre d'élèves aujourd'hui des principaux pays étrangers :
1990 : Allemagne, 24000 élèves
1991 : Italie, 14000 élèves
Suisse, 5000 élèves
1992 : Royaume-Uni, 5000 élèves
Pologne, 2500 élèves
1993 : Hongrie, 6000 élèves.

PARTENAIRES

Inspection Pédagogique Régionale et IREM.

ÉPREUVES

Par classes entières de troisième et de seconde ou de niveau équivalent.

Catégories : 3ème, 10 exercices
2nde, 13 exercices

Les énoncés sont courts, attrayants, s'efforcent de ne mettre en œuvre que des outils élémentaires, les plus variés possibles. Ils sont conformes aux programmes de mathématiques en vigueur dans les pays participants.

COMPÉTITION

Octobre : inscription des classes.
Décembre : épreuve d'entraînement.
Mars : épreuve officielle (1 h 30).
Mai : remise des prix.

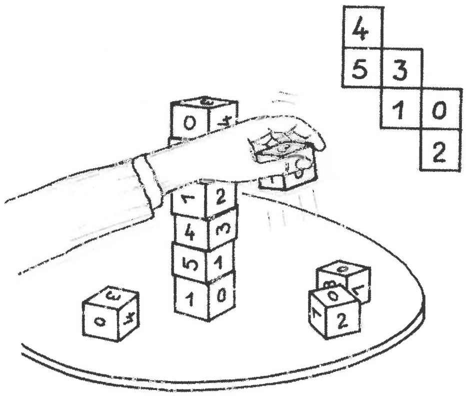
CONTACTS

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES
Lycée Louis Pasteur - 24, rue Humann - 67085 STRASBOURG - France
tél. : 03 88 15 70 60 Fax : +(33) 03 88 15 70 69
e-mail : math_sans_frontieres@email.com
site Internet : www.ac-strasbourg.fr

1 - TOUR DE MAGIE

3^{e}-2^{nde}

Exercice en langue vivante
Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien (en un minimum de 30 mots).

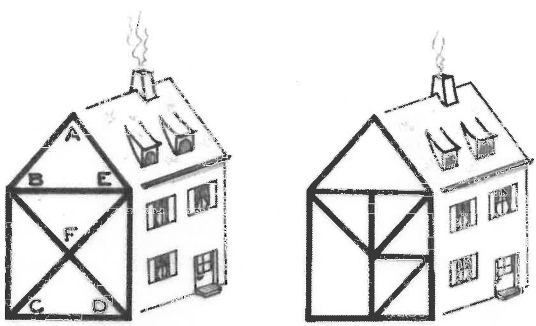


English
Peter has built a tower by piling ten identical cubes on a table. Here is the design of one of them. Peter tells you the number written on the top-side of the tower and asks you : « what is the sum of the numbers written on all visible sides of the tower ? »

How will you go about it ? Explain your answer.

2 - COLOMBAGES

3^{e}-2^{nde}

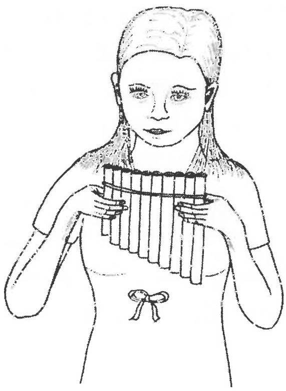


Anne essaye de tracer les poutres du pignon de sa maisonnette sans lever le crayon et sans repasser sur un segment préalablement tracé.
Elle y réussit assez vite et, après avoir compté le nombre de segments issus de chaque point nommé, elle comprend qu'il n'y a que deux points possibles pour le début ou la fin du tracé.

En respectant la règle du jeu d'Anne, montrer qu'il est possible de tracer les poutres du pignon de la deuxième maisonnette .
Donner les étapes du tracé.

3 - PAS FACILE A... 3e-2nde

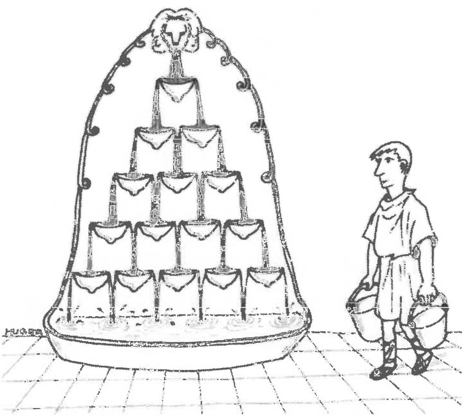
Aurélie veut fabriquer une flûte de Pan formée de 10 tuyaux donnant une suite de 10 notes qu'elle appelle « do - ré - mi - fa - sol - la - si - do - ré - mi ».
Le tuyau qui donne le son le plus grave a une longueur de 16 cm.
Si elle divise la longueur d'un tuyau quelconque par 2, elle obtient une note plus aiguë située une octave au-dessus.
Si elle prend les 2/3 de la longueur d'un tuyau quelconque, elle obtient une note plus aiguë située une quinte au-dessus. Exemples : do - sol, ré - la.



Sans utiliser d'autres longueurs, calculer les longueurs exactes des 10 tuyaux, les ranger dans l'ordre décroissant puis représenter la flûte d'Aurélie à l'échelle 1. Le diamètre extérieur des tuyaux est égal à 1 cm.

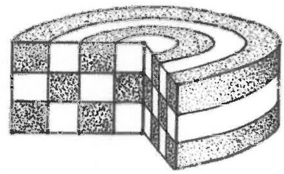
4 - FONTAINE ROMAINE 3e-2nde

Toutes les vasques de la fontaine débordent. A chaque étage la moitié du volume ajouté à une vasque s'écoule dans chacune des deux vasques placées en dessous. Pendant la journée un mètre cube coule dans la vasque supérieure.



Exprimer sous forme de fraction de ce mètre cube le volume d'eau s'écoulant dans chaque vasque de la fontaine.

5 - UN DESSERT POUR FINIR 3e-2nde

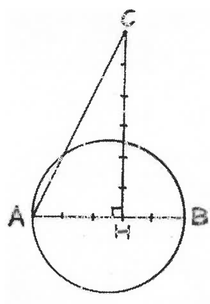


Le gâteau de Mamie est superbe et plein de surprises. Quand on le coupe, on découvre qu'elle s'est donné bien du mal à le faire ! Il est formé de deux pâtes différentes : l'une est à la vanille et l'autre au chocolat. Il comprend trois étages de même hauteur. Le moule qui a permis de le faire est circulaire. Le damier qu'on obtient sur la tranche est constitué de 12 rectangles de mêmes dimensions. Il suffit de le regarder pour en avoir un avant-goût !

En comptant les rectangles blancs et les rectangles noirs, un de ses petits-fils, Gaston, s'exclame : « Tiens, on dirait que dans le gâteau il y a autant de vanille que de chocolat ! »

Gaston a-t-il raison ? Justifier la réponse.

6 - TO Π OR NOT TO Π 3e - 2nde



Vers 1680, Thomas Hobbes proposa les étapes de la construction suivante :

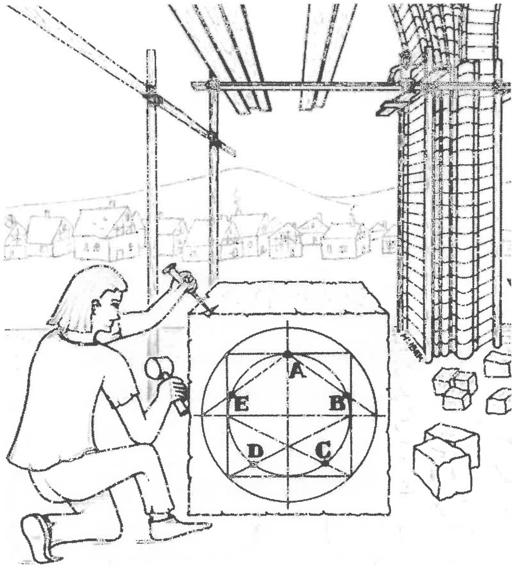
- construire un cercle de 1 décimètre de diamètre
- partager un de ses diamètres en 5 parties égales
- enfin, construire le triangle rectangle AHC tel que HC = 6/5 dm, comme sur la figure.

Il prétendit alors que le périmètre du triangle AHC est exactement égal à π dm.

Que pensez-vous de l'affirmation de Thomas Hobbes ?
Justifiez la réponse.

7 - ERREUR DE TAILLE

3e - 2nde



Dans le but d'obtenir un pentagone régulier, les bâtisseurs du Moyen-Age utilisaient la construction suivante :
on trace un carré et ses médianes, puis le cercle inscrit dans le carré et le cercle circonscrit à ce carré, enfin les points A, B, C, D, E sur le cercle inscrit comme l'indique la figure.

Les points A, B, C, D, E sont-ils régulièrement espacés sur ce cercle ? Justifier votre réponse.

8 - C' EST PUISSANT

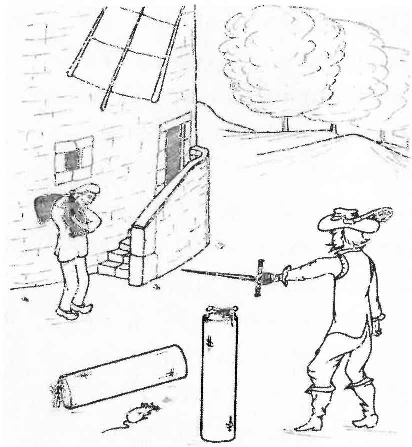
3e - 2nde

Eliane a trouvé sur sa calculatrice une puissance de 2000 qui, dans l'écriture décimale, compte exactement 100 chiffres. Elle se demande s'il existe une puissance de 2000 qui s'écrive avec 1000 chiffres exactement.

Donner la puissance de 2000 trouvée par Eliane puis répondre à sa question. Justifier.

9 - PROBLEME DE PIEDS 3e-2nde

Chez le meunier Tudor, le mousquetaire Jacques commande 1 sac de blé cylindrique de 4 pieds de haut et 6 pieds de tour. Le meunier lui propose à la place 2 sacs de blé cylindriques de 4 pieds de haut mais de 3 pieds de tour chacun, en lui affirmant que cela donne le même volume de blé.
Jacques, qui sait calculer, dégaine son épée et la pointe sur le meunier.



D'après Jacques OZANAM (1640-1717)

Donner l'explication mathématique de son geste.

10 - COURSE AUX ETRENNES 3e-2nde

Grégoire et Juliette jouent avec les dates d'une même année. Celui qui commence donne le numéro d'un jour de janvier, par exemple le 6 janvier. Ensuite, chaque joueur à son tour donne une date ultérieure mais en conservant soit le numéro du jour, soit le mois de la date que vient de donner l'autre joueur.
Par exemple, après le 6 janvier, il est possible de dire 10 janvier, 20 janvier ou 6 février, 6 avril, 6 septembre… Le vainqueur est le premier qui dit "31 décembre".

Après quelques parties, Juliette affirme qu'il existe une stratégie qui permet de gagner à coup sûr. Expliquer cette stratégie.

11 - LE 8^{e} DEGRE

3^{e}-2nde

Un vendeur de cordes d'escalade dispose d'une table d'exactement 1 mètre de long.
Les opérations qui lui sont possibles sont : mesurer un mètre, ajouter ou retrancher un mètre et doubler les longueurs.
Anaïs a besoin d'une corde de 44 m, Barbara d'une corde de 63 m et Claude d'une corde de 72 m.
Le vendeur prépare séparément ces cordes et a besoin, pour chacune d'elles, de 8 opérations exactement.

Comment fait-il dans chaque cas ?

12 - CORVETTE EN TETE

3^{e}-2nde

Quelque part en mer, une flottille navigue à cap constant à la vitesse de 12 nœuds, c'est-à-dire 12 milles par heure. Une corvette part en avant pour reconnaître le secteur ; sa vitesse passe alors à 24 nœuds. Après avoir parcouru 60 milles, la corvette fait demi-tour pour rejoindre le reste de la flottille.

Quel temps, en heures et en minutes, s'est-il écoulé entre le départ et le retour de la corvette, en supposant les vitesses constantes entre ces deux instants ?

1

TOUR DE MAGIE

La somme des nombres de deux faces parallèles est 5 ; celle de quatre faces latérales d'un cube est $2\times5=10$. Donc la somme des nombres de toutes les faces latérales des dix cubes de la tour est 100. Si n est le numéro inscrit sur la face supérieure, **la somme des nombres des faces visibles est donc : $100+n$.**

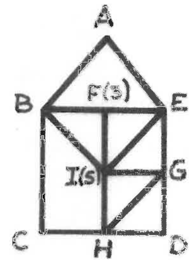
2

COLOMBAGES

Appelons "degré" d'un point le nombre de segments à tracer dont ce point est une extrémité.

S'il y a des sommets de degré impair, ce sont ceux de départ et d'arrivée, tous les autres sommets étant de degré pair.

Seuls les points F et I de la figure sont de degré impair. On peut, par exemple, tracer le circuit FBAEGDHGIHCBIEFI.



3

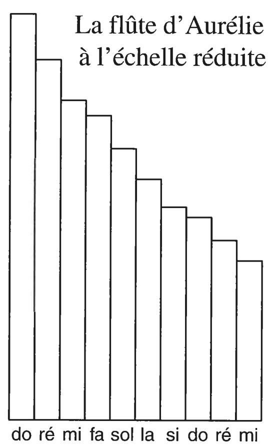
PAS FACILE A...

Le calcul se fait en suivant l'ordre « do - sol - ré 2 - ré - la - mi 2 - mi - si » et « do - do 2 - fa ».

do	ré	mi	fa	sol	la	si	do 2	ré 2	mi 2
16	$\frac{128}{9}$	$\frac{1024}{81}$	12	$\frac{32}{3}$	$\frac{256}{27}$	$\frac{2048}{243}$	8	$\frac{64}{9}$	$\frac{512}{81}$
	$\approx 14{,}2$	$\approx 12{,}6$		$\approx 10{,}7$	$\approx 9{,}5$	$\approx 8{,}4$		$\approx 7{,}1$	$\approx 6{,}3$

En partant de 16 cm pour do, pour une flûte plus grande, on obtient 0,125 cm pour la 7e octave ($16\times0{,}5^7$) mais 0,1233 cm par 12 quintes ($16\times(2/3)^{12}$). Les calculs peuvent donc conduire à des différences de mesures qui seront invisibles sur le dessin. En effet, mathématiquement aucune puissance de 2 n'est une puissance de 3 et vice-versa.

Cette méthode de construction des fréquences et donc des longueurs d'ondes est attribuée à Pythagore.



4

FONTAINE ROMAINE

1

1/2 1/2

1/4 2/4 1/4

1/8 3/8 3/8 1/8

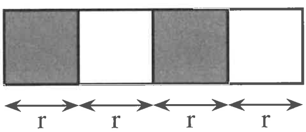
1/16 4/16 6/16 4/16 1/16

5

UN DESSERT POUR FINIR

• En échangeant les parts de vanille et de chocolat des 2 couches supérieures on se ramène à une couche de vanille et à une de chocolat : il y a donc autant de vanille que de chocolat sur les 2 couches supérieures.

• Il reste à comparer les volumes de pâte à la vanille et au chocolat sur la couche inférieure.



Il suffit de comparer les aires des bases des parties chocolat et vanille.

Pour la vanille : $\pi r^2 + \pi(9r^2 - 4r^2) = 6\pi r^2$.

Pour le chocolat : $\pi(4r^2 - r^2) + \pi(16r^2 - 9r^2) = 10\pi r^2$.

Le gâteau comporte donc plus de chocolat que de vanille : **Gaston a tort**.

6

TO Π OR NOT TO Π

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle AHC, rectangle en H,

$AC^2 = AH^2 + HC^2 = (3/5)^2 + (6/5)^2 = 45/25$.

D'où : $AC = (3\sqrt{5})/5$ dm.

Le périmètre de AHC est :

$P = 3/5 + 6/5 + (3\sqrt{5})/5 = (9+3\sqrt{5})/5$ dm $\approx 3{,}141640786$.

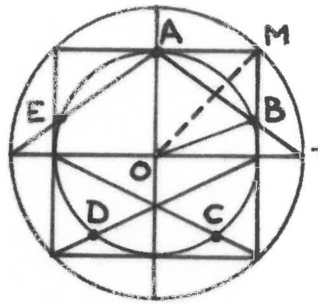
Or $\pi \approx 3{,}1415926535$ ("que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages...")

Thomas Hobbes a tort, mais sa construction donne une bonne approximation de π à 5×10^{-5} près, par excès.

Solutions

7

ERREUR DE TAILLE



Dans le triangle rectangle OAT, on a :

$$\tan \widehat{OAT} = \frac{OT}{OA} = \sqrt{2}, \text{ car } OT = OM$$

et $OM^2 = OA^2 + AM^2 = 2\,OA^2$

donc $OT = OA\sqrt{2}$.

On en déduit $\widehat{OAT} \approx 54{,}73°$.

Dans le triangle isocèle OAB,

on en déduit $\widehat{AOB} \approx 70{,}54°$,

alors que, dans un pentagone régulier,

l'angle $\widehat{AOB}$ devrait mesurer $360°/5 = 72°$.

Le pentagone ABCDE n'est donc pas régulier.

8

C' EST PUISSANT

$2000^{30} = (2 \times 10^3)^{30} = 2^{30} \times 10^{90} = 1\,073\,741\,824 \times 10^{90}$

donc 2000^{30} a 100 chiffres.

$2000^{302} = 2^{302} \times 10^{906} \approx 8{,}148 \times 10^{90} \times 10^{906} \approx 8{,}148 \approx 10^{996}$

donc 2000^{302} a 997 chiffres.

$2000^{303} = 2^{303} \times 10^{909} \approx 1{,}6296 \times 10^{91} \times 10^{909} \approx 1{,}6296 \times 10^{1000}$

donc 2000^{303} a 1001 chiffres.

Il n'existe aucune puissance de 2000 avec 1000 chiffres.

9

PROBLEME DE PIEDS

Le sac de blé de 4 pieds de hauteur et de 6 pieds de tour a pour volume :

$$4 \times \left(\frac{6}{2\pi}\right)^2 \times \pi = \frac{36}{\pi} \text{ en "\textit{pieds cubes}".}$$

Les 2 autres sacs de 4 pieds de hauteur et de 3 pieds de tour ont un volume total de :

$$2 \times 4 \times \left(\frac{3}{2\pi}\right)^2 \times \pi = \frac{18}{\pi} \text{ en "\textit{pieds cubes}".}$$

Donc deux sacs ont un volume total qui est la moitié de celui du grand sac.

Ceci explique le geste du mousquetaire Jacques.

10

COURSE AUX ETRENNES

Il faut jouer en commençant par le **20 janvier** puis passer au 21 février, 22 mars, 23 avril, 24 mai, 25 juin, 26 juillet, 27 août, 28 septembre, 29 octobre, 30 novembre et enfin 31 décembre.

11

LE 8e DEGRE

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{-1} 11 \xrightarrow{\times 2} 22 \xrightarrow{\times 2} 44$$

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} 16 \xrightarrow{\times 2} 32 \xrightarrow{\times 2} 64 \xrightarrow{-1} 63$$

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{+1} 9 \xrightarrow{\times 2} 18 \xrightarrow{\times 2} 36 \xrightarrow{\times 2} 72$$

12

CORVETTE EN TETE

Au moment où la corvette fait demi-tour, elle a parcouru 60 milles : donc le reste de la flottille, qui va 2 fois moins vite, a parcouru 30 milles (et se trouve à 30 milles de la corvette).

Donc la corvette est de retour après avoir fait 20 milles en sens inverse (le reste de la flottille, qui va 2 fois moins vite, fera 10 milles).

En tout, la corvette aura fait 80 milles en 80/24h = 3h 1/3 = **3h 20min**.