RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE

Le Rallye Mathématique d'Alsace est créé en 1973 par le Professeur GLAESER de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg. Il s'inspire des Olympiades et constitue la première épreuve de ce genre en France.

Il s'adresse à tous les élèves volontaires des Premières et Terminales scientifiques d'Alsace et de quelques lycées à l'étranger (Baden-Baden, Freiburg, Saarbrücken, Wien, ...). Les deux compétitions ont lieu durant le printemps.

Les élèves concourent par binômes et sont confrontés pendant quatre heures à trois exercices faisant appel à l'intuition, l'imagination, l'originalité, la rigueur scientifique et la clarté de l'exposé.

Le rapport du Rallye Mathématique d'Alsace, publié chaque année, regroupe les sujets, les corrigés, le palmarès, les remarques et les idées originales rencontrées dans les copies. Distribué à tous les enseignants de mathématiques de notre académie, il peut, par ses remarques pédagogiques, servir de support à des mathématiques innovantes.

Le Comité Organisateur réunit au sein de l'IREM de Strasbourg cinq membres, enseignants du Supérieur et du Secondaire.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

• **Créé en 1973**, le Rallye Mathématique d'Alsace est le premier rallye régional ayant existé en France.
• **1997** : le 24ème Rallye réunit 1400 élèves de Première et de Terminale.
Environ 60 seront primés.
Le Rallye est organisé à l'initiative de l'IREM de Strasbourg avec le soutien du Rectorat, de l'Université Louis Pasteur (Strasbourg I) et du Département de Mathématiques.

ÉPREUVES

Deux catégories : élèves de Première et de Terminale.

Les élèves sont groupés par deux et ont à leur disposition une salle de classe pour une durée de quatre heures.

COMPÉTITION

Deux épreuves (une par niveau) : les élèves concourent par binômes.

Palmarès : au courant du mois de Juin, cérémonie présidée par Monsieur le Recteur de l'Académie de Strasbourg.

PARTENAIRES

Collectivités locales :
Conseil Régional d'Alsace, Conseil Général du Haut-Rhin, municipalités.
Quelques entreprises privées.
Régionale de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques), …

CONTACTS

Madame Claudine KAHN - IREM de Strasbourg
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG cedex
Tél. : 03 90 24 01 30
Fax : 03 90 24 01 65
E-mail : irem@math.u-strasbg.fr

1 - SUJET 2

Première 2000

On dispose d'un tableau ayant 4 lignes et 1998 colonnes.
À l'intersection de la ligne m et de la colonne n se trouve l'élément noté $f(m, n)$.
On donne, pout tout entier n compris entre 0 et 1997 la valeur $f(0, n) = n + 1$, ce qui permet donc de remplir la première ligne du tableau.
Par ailleurs, on sait que pour tout entier m compris entre 1 et 3 et pour tout entier n compris entre 1 et 1997, on a les égalités suivantes :
$f(m, 0) = f(m-1, 1)$ et $f(m, n) = f(m-1, f(m, n-1))$.

Quel nombre se trouve à l'intersection de la dernière ligne et de la dernière colonne ?

2 - SUJET 3

Première 2000

On considère un quadrilatère convexe quelconque $ABCD$ dans le plan.
On découpe les segments $[AB]$ et $[CD]$ en trois parties égales, définissant les points E, F, G, H tels que AE = EF = FB et CH = GH = HD.

Montrer que l'aire du quadrilatère central EFGH est le tiers de celle du quadrilatère total *ABCD*.

3 - SUJET 2 Terminale 2000

Montrer que l'on peut trouver un entier de 2000 chiffres divisible par 2^{2000} qui s'écrive seulement avec les chiffres 1 et 2.

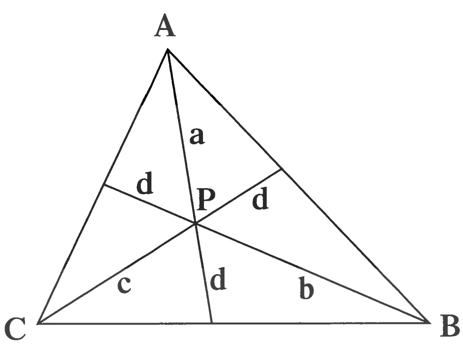
4 - SUJET 3 Terminale 2000

On se donne un entier naturel non nul n.
On choisit $n+1$ nombres entiers tous distincts entre 1 et $2n$.

Montrer que parmi eux, il en existe toujours deux dont le quotient est une puissance de deux.

5 - DANS UN TRIANGLE Première 2001

Trois droites issues des trois sommets d'un triangle ABC sont concourantes en P, intérieur au triangle. On note a, b, c, d les longueurs des segments issus de P comme indiqué sur la figure.



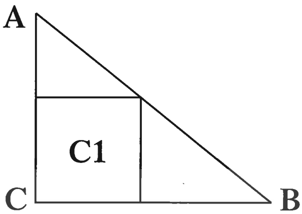
Sachant que $a+b+c=43$ et $d=3$, calculer le produit abc.

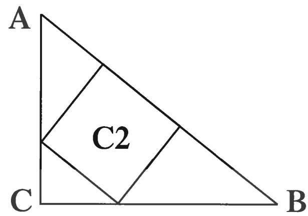
Énoncés

6 - HISTOIRES D'AIRES

Terminale 2001

On dispose d'un triangle ABC rectangle en C. Deux carrés C1 et C2 sont inscrits dans le triangle comme indiqué sur la figure.





Déterminer la longueur AC + CB sachant que C1 et C2 ont pour aire respective 441 cm^2 et 440 cm^2.

Solutions

1

Réponse : La troisième ligne du tableau constitue une suite dite arithmético-géométrique, qui conduit pour le terme demandé à la valeur $\boldsymbol{f(3, 1997) = 2^{2000} - 3}$.

Solution : À partir de $f(0, n) = n+1$,

on obtient $f(1, n) = f(0, f(1, n-1)) = f(1, n-1)+1$.

Comme $f(1, 0) = f(0, 1) = 2$, il en résulte $f(1, n) = n+2$.

Remarque : Les égalités proposées dans l'énoncé doivent être étendues à des valeurs quelconques de n, sans limitation à 1997. Sinon, on ne peut rien dire de f(1 ,1997) = f(0, f(1, 1996)) = f(0, 1998). Nous faisons cette extension, ici ainsi que pour la suite du problème.

Par suite, $f(2, n) = f(1, f(2, n-1)) = f(2, n-1) + 2$.

Puisque $f(2, 0) = f(1, 1) = 3$, il en résulte $f(2, n) = 2n + 3$.

Enfin, $f(3, n) = f(2, f(3, n-1)) = 2f(3, n-1) + 3$.

Et $f(3, 0) = f(2, 1) = 5$.

Pour expliciter $f(3, n)$ en fonction de n, posons $g(n) = f(3, n) + 3$ (cette transformation permet de ramener les suites arithmético-géométriques à des suites géométriques).

En remplaçant $f(3, n)$ et $f(3, n-1)$ respectivement par $g(n) - 3$ et $g(n-1) - 3$ dans l'égalité de récurrence ci-dessus, on obtient en effet $g(n) - 3 = 2(g(n-1) - 3) + 3$, d'où $g(n) = 2g(n-1)$.

Donc $g(n)$ est une suite géométrique de raison 2, ayant pour premier terme $g(0) = 8 = 2^3$. Par conséquent, $g(n) = 2^{n+3}$ et en particulier $g(1997) = 2^{2000}$.

Finalement $f(3, 1997) = 2^{2000} - 3$.

2

Solution : La solution s'appuie sur une triangulation. Plusieurs égalités d'aires de triangles peuvent être mises en évidence sur la figure, qui renvoient au classique résultat général suivant :
<u>*Théorème général*</u> – *Soit S un point et* ***d*** *une droite ne passant pas par S. Tous les triangles du type SXY, où X et Y sont deux points de la droite* ***d*** *tels que le segment XY ait une longueur donnée, ont la même aire.*
Par exemple, on a l'égalité d'aires :
$\mathcal{A}$(EFG) = $\mathcal{A}$(FBG), puisque les segments EF et FB sont de même longueur. De même, $\mathcal{A}$(EGH) = $\mathcal{A}$(EHD).
Comme le quadrilatère EFGH est convexe puisque ABCD est convexe, son aire est la somme des aires des triangles EFG et EGH. D'où
$\mathcal{A}$(EFGH) = $\mathcal{A}$(EFG) + $\mathcal{A}$(EGH) et donc :

$$2\,\mathcal{A}(\text{EFGH}) = \mathcal{A}(\text{EFG}) + \mathcal{A}(\text{FBG}) + \mathcal{A}(\text{EGH}) + \mathcal{A}(\text{EHD})$$
$$= \mathcal{A}(\text{EBGD}).$$

Or $\mathcal{A}$(ABCD) = $\mathcal{A}$(EBGD) + $\mathcal{A}$(AED) + $\mathcal{A}$(BCG). Mais, en se référant au théorème d'égalités d'aires de triangles, on peut écrire :
$3\,\mathcal{A}(\text{AED}) = \mathcal{A}(\text{ABD})$, $3\,\mathcal{A}(\text{BCG}) = \mathcal{A}(\text{BCD})$.
On en déduit :
$3\,\mathcal{A}(\text{EBGD}) = 3\,\mathcal{A}(\text{ABCD}) - 3\,\mathcal{A}(\text{AED}) - 3\,\mathcal{A}(\text{BCG}) = 2\,\mathcal{A}(\text{ABCD})$.
Mais on a vu que $\mathcal{A}$(EBGD) = 2 $\mathcal{A}$(EFGH), ce qui entraîne alors l'égalité demandée :

$$\mathbf{3\,\mathcal{A}(EFGH) = \mathcal{A}(ABCD)}.$$

3

Réponse : L'idée est de procéder par récurrence, même si on se « contente » d'aller jusqu'à 2000 et non pas jusqu'à l'infini. On peut commencer par 2, qui a un chiffre et est divisible par $2^1 = 2$, ou par 12, qui a deux chiffres et est divisible par $2^2=4$.
Solution : Supposons (hypothèse de récurrence) que l'on connaisse un nombre A de n chiffres, qui soit divisible par 2^n et dont tout chiffre soit égal soit à 1 soit à 2. Si le nombre A est un multiple pair de 2^n, c'est-à-dire si $A = 2p \times 2^n$, on obtiendra un multiple de 2^{n+1} ayant $(n+1)$ chiffres en prenant $A + 2 \times 10^n$.
En effet, $2 \times 10^n + A = 2^{n+1} \times 5^n + p \times 2^{n+1} \times 5^n = 2^{n+1} \times 5^n \times (1 + p)$.
Si A est un multiple impair de 2^n, c'est-à-dire si $A = (2p+1) \times 2^n$, on considérera $A + 10^n$, ce qui revient à placer un 1 devant l'écriture chiffrée de A. En effet :
$10^n + A = 2^n \times 5^n + (2p+1) \times 2^n = (5^n + 2p + 1) \times 2^n$.
Or 5^n est un nombre impair, donc $(5^n + 2p + 1)$ est un nombre pair. Ainsi, il est possible d'extraire de la parenthèse un facteur 2, qui se combinera avec 2^n pour aboutir à 2^{n+1}.

Solutions

4

À partir d'un entier donné, effectuons des divisions successives par 2 tant que c'est possible, c'est-à-dire tant que l'on est en présence d'un nombre pair.
Ainsi, si le nombre de départ est impair, on ne fait rien.
Au contraire, s'il est pair, on le divise par 2 ; si le résultat est encore un nombre pair, on recommence, sinon on s'arrête.
De la sorte, on écrit tout entier comme produit d'une puissance de 2 par un nombre impair (qui peut être réduit à 1).

Dire alors que deux entiers ont un quotient qui est une puissance de 2, c'est dire que dans l'écriture considérée, le nombre impair est le même pour les deux entiers.
Or, entre 1 et $2n$, on dispose de n nombres impairs (à savoir 1, 3,… , $2n-1$).
Donc, si on choisit $(n+1)$ entiers entre 1 et $2n$, on est obligé d'en choisir au moins deux qui sont produits d'un même nombre impair par des puissances de 2.

5

D'une manière générale, notons XYZ l'aire du triangle de sommets X, Y et Z.
Des rapports d'aires pour des triangles de même base sont égaux à des rapports de longueurs :

$$\frac{\mathrm{CPB}}{\mathrm{ABC}} = \frac{d}{d+a}, \quad \frac{\mathrm{APB}}{\mathrm{ABC}} = \frac{d}{d+b}, \quad \frac{\mathrm{APC}}{\mathrm{ABC}} = \frac{d}{d+c}.$$

Il en résulte que $d \times \left[\frac{1}{d+a} + \frac{1}{d+b} + \frac{1}{d+c}\right] = 1.$

Après réduction au même dénominateur $(d + a)(d + b)(d + c)$ et développement, on obtient la condition :

$$2d^3 + (a + b + c)d^2 = abc.$$

La substitution des valeurs de l'énoncé conduit alors à $abc = 441$.

Mais cela ne nous dit pas si un triangle donnant lieu à ces valeurs existe effectivement…

6

Considérons un repère dont l'axe des x soit porté par CB et l'axe des y par CA. En posant selon l'usage fréquent CB = a et CA = b, on obtient pour équation de la droite (AB) : bx + ay = ab.

Puisque la racine carrée de 441 est 21, la droite (AB) passe par le point D de coordonnées (21 ; 21). On en déduit qu'une condition qui lie a et b est 21(a + b) = ab.

Désignons par rac(x) la racine carrée d'un nombre positif x. Considérons l'homothétie de centre C et de rapport $k = \text{rac}[440/(a^2 + b^2)]$. Elle transforme AB en un segment A′B′ de longueur rac(440).

Le carré C2 aura bien le segment A′B′ comme un de ses côtés si la distance du point B′ à la droite AB est égale à $\sqrt{440}$.

L'équation de (AB) s'écrivant bx + ay – ab = 0, la distance à (AB) d'un point quelconque M de coordonnées (x, y) est $d(M, AB) = \frac{|bx + ay - ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

En particulier, pour B de coordonnées (ka, 0), on obtient $d(B', AB) = \frac{|kab - ab|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab(1-k)}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

En reportant la valeur de k, il vient $d(B', AB) = ab\,\frac{\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{440}}{a^2+b^2}$.

Introduisons la variable u = a + b, qui conduit à écrire ab = 21(a + b) = 21u et $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = u^2 - 42u$. L'équation d(B′, AB) = rac(440) s'écrit alors :

$$21u\,\frac{\sqrt{u^2-42u} - \sqrt{440}}{u^2-42u} = \sqrt{440}$$

d'où en simplifiant : $21[\sqrt{u^2-42u} - \sqrt{440}] = \sqrt{440}\,(u-42)$.

On en déduit : $21\sqrt{u^2-42u} = \sqrt{440}\,(u - 21)$ d'où, en élevant au carré : $u^2 - 42u - 440{\times}441 = 0$, dont le discriminant réduit est 441^2.
L'équation s'écrit donc (u + 420)(u – 462) = 0. Seule la solution positive u = 462 convient.

À partir de la somme S = a + b = 462 et du produit P = ab = 21×462, l'équation $X^2 - SX + P = 0$ fournit les valeurs de a et b, qui, tous calculs faits, sont : $21(11 + \sqrt{99})$ et $21(11 - \sqrt{99})$. Des valeurs approchées sont 439,95 et 22,05. L'écart de tailles fait que la représentation géométrique précise de la situation serait peu lisible !