RALLYE D'AUVERGNE

Le rallye est destiné aux élèves de troisième et de seconde. La compétition n'est pas individuelle, mais entre classes entières ou suffisamment représentées : plus des deux tiers.

Les classes ont à résoudre sept problèmes en deux heures. Les solutions doivent être rédigées. Une des solutions est présentée sous forme d'affiche.

Pour chaque exercice, le jury évalue :

- l'exactitude de la (ou des) réponse(s) aux questions posées,
- l'argumentation,
- la présentation.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

Le premier rallye a été organisé en 1998.

COMPÉTITION

Elle a lieu un mercredi après-midi. Les centres d'épreuves sont les lycées qui accueillent aussi les collèges du secteur.

ÉPREUVES

Épreuves par classes.
Une catégorie Troisième-Seconde.
Il y a sept problèmes pour deux heures.

PARTENAIRES

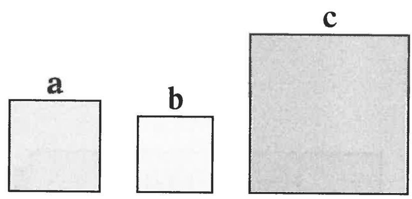
- Inspection Pédagogique Régionale
- IREM
- APMEP

CONTACTS

Robert CHARBONNIER ou Anne CROUZIER
IREM
Complexe Scientifique Les Cézeaux
63117 AUBIÈRE

1 - TRAVAIL DE GREC

En utilisant le compas, la règle (non graduée), l'équerre et sans faire de calcul, construire un carré qui ait pour aire la somme des aires de trois carrés donnés.



2 - LE TEMPS DES CERISES

1, 2, 3, nous irons au bois...
Quel est le chiffre des unités du nombre $A = 1^{23} + 2^{31} + 3^{12}$?

4, 5, 6, cueillir des cerises...
Quel est le chiffre des unités du nombre $B = 4^{56} + 5^{64} + 6^{45}$?

7, 8, 9, dans un panier neuf...
Quel est le chiffre des unités du nombre $C = 7^{89} + 8^{97} + 9^{78}$?

3 - TOP SECRET

On numérote de 0 à 25 les lettres de l'alphabet dans l'ordre habituel. Ainsi, à chaque lettre on attribue un nombre entier x, $0 \leqslant x \leqslant 25$, et inversement.
Pour coder un mot on remplace chacune de ses lettres, numérotée x, par la lettre obtenue de la façon suivante :

1) On multiplie x par 29
2) On soustrait au résultat obtenu un multiple de 26 permettant d'obtenir un nombre y compris entre 0 et 25
3) On code par la lettre de numéro y.

Décoder le message : LYLM HM ZAHHUM JMIR KYHHM.

4 - CHOCOLATS

Mon frère et moi avons reçu beaucoup de chocolats pour Pâques, nous les avons mélangés et nous n'arrivons plus à nous souvenir du nombre que nous possédions au départ !
Peux-tu nous aider, sachant que

La somme de ces deux nombres est deux cents.
Nous pouvions faire chacun des petits tas contenant exactement huit chocolats, sans en laisser de côté.
J'en avais moins de cent mais plus des quatre cinquièmes de ce que possédait mon frère.

5 - LES NAPPES

Peut-on recouvrir entièrement une table carrée de 90 cm de côté en posant dessus deux nappes rondes de 1 m de diamètre ?

6 - LES CRAYONS

Six boîtes A, B, C, D, E, F contiennent respectivement 4 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 26 crayons.
Chaque boîte ne contient soit que des crayons bleus, soit que des crayons blancs, soit que des crayons rouges.
Une boîte, et une seule, renferme les crayons rouges.
Sachant que

- Le prix en francs d'un crayon bleu est le quadruple de celui d'un crayon blanc
- Les crayons blancs valent autant que les crayons bleus
- Le nombre des crayons bleus est égal à la valeur en francs de tous les crayons rouges

Combien coûte un crayon rouge ?

7 - UNE CALCULATRICE ORIGINALE

La société *Bougnat 2000* vient de mettre au point une calculatrice originale pour les lauréats du Rallye ; celle-ci effectue deux opérations : - l'addition usuelle notée +
- une curieuse opération notée $*$

On sait que, pour tout entier naturel a,

$a * a = a,$

et $a * 0 = 2a$

et que pour quatre entiers naturels quelconques, a, b, c, d,

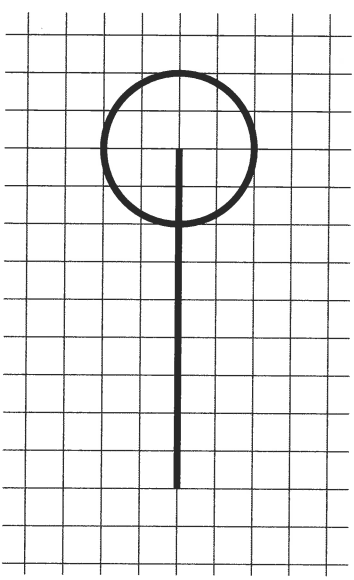
$(a * b) + (c * d) = (a + c) * (b + d)$

Quels sont les résultats des opérations :

$(2 + 3) * (0 + 3)$

et $1024 * 48$?

8 - LA SUCETTE



La figure ci-contre est une représentation à une échelle inconnue d'une sucette. (Le quadrillage a un pas de 0,5 cm).

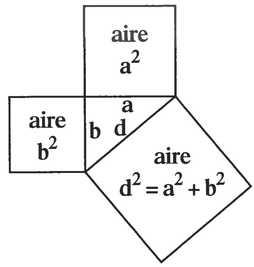
En agrandissant dix fois cette figure, on obtient une nouvelle représentation à une échelle entière plus grande que 1.
Sachant que :
- le bâton de la sucette mesure un nombre entier de centimètres
- la mesure, en centimètres, du diamètre de la sucette est un nombre entier,

Quelle est la longueur de la sucette ?

1

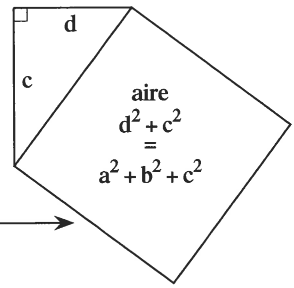
TRAVAIL DE GREC

Soient a, b, c les côtés des 3 carrés



1) On construit un triangle rectangle ayant a et b pour côtés de l'angle droit

2) On construit un triangle rectangle ayant c et d (hypoténuse du premier triangle rectangle) pour côtés de l'angle droit.



carré cherché

2

LE TEMPS DES CERISES

Le chiffre des unités de A est 0.
Le chiffre des unités de B est 7.
Le chiffre des unités de C est 7.

3

TOP SECRET

Pour $0 \leqslant x \leqslant 8$ on obtient y par la formule $y = 29x - 26x$.
Pour $9 \leqslant x \leqslant 17$ on obtient y par la formule $y = 29x - 26(x+1)$.
Pour $18 \leqslant x \leqslant 25$ on obtient y par la formule $y = 29x - 26(x+2)$.

Lettre :	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
x :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N° codé y :	0	3	6	9	12	15	18	21	24	1	4	7	10
Lettre codée :	A	D	G	J	M	P	S	V	Y	B	E	H	K

Lettre :	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
x :	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
N° codé y :	13	16	19	22	25	2	5	8	11	14	17	20	23
Lettre codée :	N	Q	T	W	Z	C	F	I	L	O	R	U	X

Le message décodé est alors :

LYLM HM ZAHHUM JMIR KYHHM
VIVE LE RALLYE DEUX MILLE

4

CHOCOLATS

Soient x le nombre de mes chocolats et y le nombre de chocolats de mon frère.

On a $x + y = 200$.

x et y sont des entiers divisibles par 8.

$x \leqslant 100$ et $x \geqslant \frac{4}{5}y$.

Comme $x + y = 200$ et $x < 100$, alors $y > 100$.

Comme $x \geqslant \frac{4}{5}y$ et $y > 100$, alors $x > 80$.

x est un entier compris strictement entre 80 et 100 et il est divisible par 8, donc x peut être égal à 88 ou 96.

Si $x = 88$, alors $y = 112$, mais $\frac{4}{5} \times 112 = 89{,}5$;

donc x serait trop petit, cela ne convient pas.

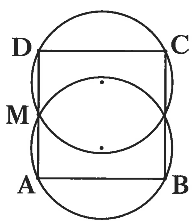
Si $x = 96$, alors $y = 104$ et $\frac{4}{5} \times 104 = 83{,}2$;

x est assez grand et toutes les conditions sont bien vérifiées.

J'ai donc 96 chocolats et mon frère 104.

5

LES NAPPES



En utilisant la relation de Pythagore dans le triangle ADC rectangle en D, on obtient $AC = \sqrt{90^2 + 90^2} = 90\sqrt{2}$. Donc $AC > 100$.

Cela montre qu'une nappe ne peut pas recouvrir deux coins opposés de la table. Chaque nappe recouvre donc 2 coins consécutifs, par exemple A et B pour l'une et D et C pour l'autre.

Penons M le milieu du côté [AD] . M peut-il être recouvert par la nappe recouvrant A et B ?

Dans le triangle ABM rectangle en A, on calcule MB, longueur de l'hypoténuse : $MB = \sqrt{90^2 + 45^2} = 45\sqrt{5}$.

Or $\sqrt{5} > 2{,}23$; donc $MB > 45 \times 2{,}23$ d'où $MB > 100{,}35$.

On constate que la longueur MB est supérieure au diamètre de la nappe, donc elle ne peut pas couvrir M, B en même temps.

Par conséquent, la nappe qui recouvre A et B ne couvre pas M, et par symétrie, celle qui couvre D et C ne couvre pas non plus M.
Il est donc impossible de couvrir la table en posant dessus les deux nappes.

Solutions

6

LES CRAYONS

On note x le prix en francs d'un crayon blanc, y le nombre de crayons blancs et z le nombre de crayons bleus.
Le prix d'un crayon bleu est donc $4x$ et l'on a $xy = 4xz$. Par suite $y = 4z$.
Le nombre total S des crayons bleus et des crayons blancs est alors $z + 4z$, soit $5z$. C'est un multiple de 5.
D'autre part, le nombre total de crayons est $N = 4 + 13 + 17 + 19 + 23 + 26$.
Donc N = 102.
On va essayer tous les cas possibles pour trouver dans quelle boîte sont les crayons rouges :

SI la boîte de crayons rouges est	*ALORS*	*COMMENTAIRE*
A	$S = 102 - 4 = 98$,	S n'est pas divisible par 5
B	$S = 102 - 13 = 89$,	S n'est pas divisible par 5
C	$S = 102 - 17 = 85$,	S est multiple de 5 et $z = 17$
D	$S = 102 - 19 = 83$,	S n'est pas divisible par 5
E	$S = 102 - 23 = 79$,	S n'est pas divisible par 5
F	$S = 102 - 26 = 76$,	S n'est pas divisible par 5

Conclusion : C est la boîte qui renferme les 17 crayons rouges.
Ceux-ci valent z francs, soit 17 francs.

7

UNE CALCULATRICE ORIGINALE

Pour calculer $(2 + 3) * (0 + 3)$, on utilise la propriété
$(a * b) + (c * d) = (a + c) * (b + d)$.
Donc : $(2 + 3) * (0 + 3) = (2 * 0) + (3 * 3)$
Or $2 * 0 = 2 \times 2 = 4$ et $3 * 3 = 3$.
Par conséquent $(2 + 3) * (0 + 3) = 7$.

Pour $1024 * 48$, nous allons reproduire le modèle ci-dessus en remarquant que $1024 = 976 + 48$ et $48 = 0 + 48$.
$1024 * 48 = (976 + 48) * (0 + 48)$
$1024 * 48 = (976 * 0) + (48 * 48)$
$1024 * 48 = 2 \times 976 + 48$
$1024 * 48 = 1952 + 48$
Donc $1024 * 48 = 2000$.

8

LA SUCETTE

La figure agrandie est formée d'un cercle de diamètre 20 cm et d'un segment de longueur 45 cm. On note d et ℓ les diamètre et longueur du bâton de la sucette, respectivement ; k le rapport d'agrandissement avec $k > 1$. On a alors les deux égalités : $20 = kd$ et $45 = k\ell$. Ainsi, k divise 20 et 45, et par suite leur pgcd : 5. Sachant que $k > 1$, on en déduit que $k = 5$; $\ell = 9$ et $d = 4$.