# RALLYE MATHÉMATIQUE DE POITOU - CHARENTE

Le rallye est une compétition de classes complètes. Les élèves s'organisent en groupes de travail et choisissent des questions (10 en troisième et 12 en seconde). La classe doit fournir un dossier avec une feuille par question. On demande des explications et on apprécie l'esprit des copies : propreté, dessin, humour. Les exercices sont variés pour que chacun puisse participer avec son niveau de compétence. Les résultats et les corrigés sont envoyés après les épreuves ainsi qu'un commentaire.

# FICHE TECHNIQUE

## HISTORIQUE

**1991 :** Création du rallye de Charente-Maritime et des Deux-Sèvres.

**1992 :** 2ème rallye étendu aux quatre départements de l'académie.

**1993 :** rallye annulé en raison de l'organisation des Journées Nationales de l'APMEP à Poitiers.

**1994 à 2001 :** fonctionnement ininterrompu.

## ÉPREUVES

**Collectives.**

**2 catégories :**
Classe de 3ème :
10 exercices
Classe de 2nde :
2 exercices de plus.

## COMPÉTITION

- Épreuves d'entraînement avec participation du professeur.
- Épreuves finales où tous les documents sont permis.

## PARRAINS

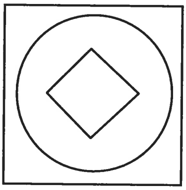
- APMEP régionale de Poitiers.
- IREM de Poitiers.
- Appuis pédagogiques des IPR.

## CONTACTS

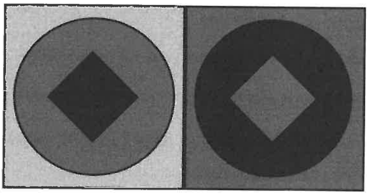
APMEP
IREM de POITIERS
Faculté des Sciences
40, avenue du Recteur Pineau
86022 POITIERS

Yvonne NOËL
19, avenue de La Burgonce
79000 NIORT

## 1 - PATCHWORK 3ème-2nde



Des napperons rectangulaires sont réalisés en juxtaposant des morceaux de tissus carrés sur lesquels figure le motif ci-contre.
Combien de carrés de tissus différents peut-on obtenir en coloriant les motifs à l'aide de trois couleurs, de telle sorte que deux zones voisines soient de couleurs différentes (voir la figure ci-dessous) ?



Avec tous ces carrés, réalisez un napperon rectangulaire de votre choix, la disposition des carrés dans le rectangle devant respecter elle-même la règle de coloriage (voir figure ci-contre).

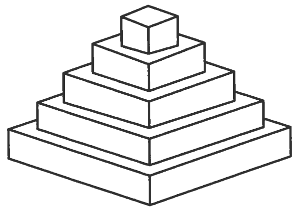
## 2 - SUR LA PLANETE HEPTILON 3ème-2nde

Au lieu d'utiliser le système décimal (base dix), les habitants de la planète Heptilon comptent en base sept. Pour cela, ils utilisent les chiffres **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5** et **6** importés de la planète Terre.
Ainsi, le nombre heptilonien **2352** (prononcer « deux, trois, cinq, deux ») correspond au nombre terrien 870 (huit cent soixante-dix, en français !). En effet, **2352** signifie en système décimal :

$$\mathbf{2}\times 7^3+\mathbf{3}\times 7^2+\mathbf{5}\times 7+\mathbf{2} = 2\times 343+3\times 49+5\times 7+2 = 686+147+35+2=870.$$

À quelles années terriennes correspondent les trois années heptiloniennes **1111**, **2222** et **3333** ?
À quelle année heptilonienne correspond notre année 2000 ?

## 3 - PYRAMIDE 2000 3ème-2nde



À l'occasion de l'année mondiale des mathématiques, James a l'idée de réaliser une structure pyramidale en disposant les unes sur les autres, comme le montre le dessin ci-contre, des plaques carrées de 1 cm de haut, et dont les côtés mesurent successivement : 1 cm, 2 cm, 3 cm, et ainsi de suite, jusqu'à atteindre 2000 $cm^3$.
En étudiant l'empilement de ces plaques, il se rend compte que, de cette façon, il ne peut pas obtenir exactement 2000 $cm^3$, sauf s'il retire deux des plaques qu'il avait posées.
Quelles sont ces deux plaques et quelle est la hauteur de sa structure ?

## 4 - ANNÉE 2000 3ème-2nde

On peut écrire 2000 en utilisant une et une seule fois les nombres 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5. Étonnant, non ?
Trouverez-vous ?
Vous pouvez utiliser toute opération connue.

## 5 - UN NOMBRE REMARQUABLE 3ème-2nde

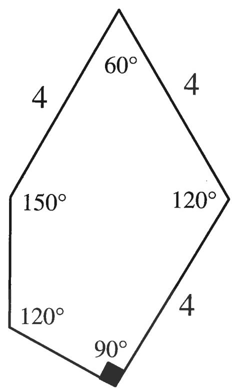
Léa Broutille s'écrie : « J'ai un nombre remarquable. Otez lui 1000 et vous obtiendrez le nombre entier précédent sa moitié ».
Ce nombre est-il vraiment remarquable ? Est-il même unique ?

## 6 - LA FAMILLE SEPTIME $3^{ème}$-$2^{nde}$

Monsieur et Madame Septime ont eu sept enfants nés tous les sept le 1er avril, en fait six 1er avril consécutifs.
Cette année, pour leur anniversaire, Madame Septime leur offre à chacun un petit gâteau comportant autant de bougies qu'ils ont d'années. Jean Septime, le plus doué en math constate qu'il y a deux fois plus de bougies qu'il y a deux ans et deux gâteaux en plus.
Combien de bougies Madame Septime doit-elle allumer cette année ?

## 7 - PAVAGE $3^{ème}$-$2^{nde}$

Un pavé a la forme ci-contre. Les dimensions sont données sur le dessin.




* Calculez la valeur exacte de son aire.

* Combien faut-il au minimum de tels pavés pour recouvrir un rectangle de 16 sur $\frac{28\sqrt{3}}{3}$.

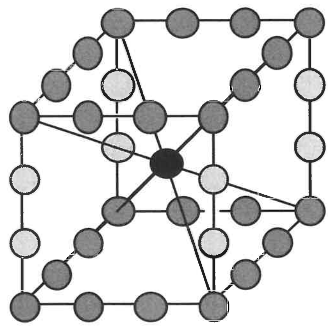
Comme dans tout carrelage d'une pièce, on est amené à découper un nombre minimum de pavés sur le pourtour, et on réutilise les chutes.

* Faire un dessin représentant la disposition des pavés.

## 8 - FAYÇAL ESSIV EN FAMILLE $3^{ème}$-$2^{nde}$

Fayçal Essiv partage une somme d'argent entre ses trois enfants Ali, Baba, Orom. À Ali, il donne les 3/7 de la somme, à Baba il donne un certain nombre de cinquièmes de la somme et à Orom le reste, soit 60 F. Quelle est la somme donnée par Fayçal Essiv ? *(Les trois parts sont des nombres entiers.)*

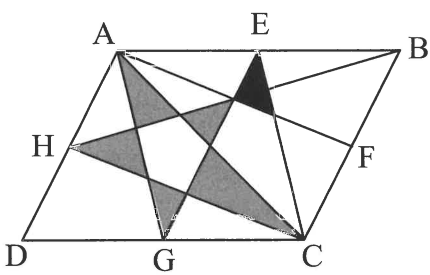
## 9 - 2001, L'ODYSSÉE DE L'ESPACE 3ème-2nde



En cette année 2001 où une station orbitale est en cours de réalisation, et en souvenir du célèbre film "2001, l'Oyssée de l'espace", Géo se lance dans la construction d'une structure cubique, semblable à celle qui est dessinée ci-contre : le même nombre de sphères sur chaque arête et une sphère centrale à l'intersection des grandes diagonales. Il a choisi cette structure car il a remarqué qu'il pouvait utiliser exactement 2001 sphères.

Combien y a-t-il de sphères sur chaque arête ?

## 10 - LA PLANETE DES JEUX 3ème-2nde




*ABCD est un parallélogramme.*
*E, F, G et H sont les milieux des côtés du parallélogramme.*

Des extraterrestres ayant espionné notre ville de Parthenay pendant son festival des jeux ont été conquis par son côté ludique. Toute leur planète a, depuis, été restructurée en districts spécialisés dans telle ou telle activité de jeu ; leur drapeau a été réorganisé : sur celui-ci, chaque district est représenté et a une aire proportionnelle au nombre de ses habitants joueurs.

La région noire représente les amateurs de jeux mathématiques.

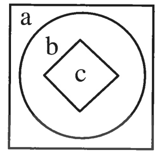
Combien sont-ils sachant que la planète compte 12 000 habitants ?

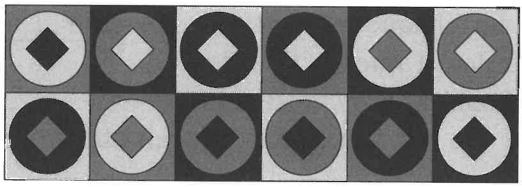
Solutions

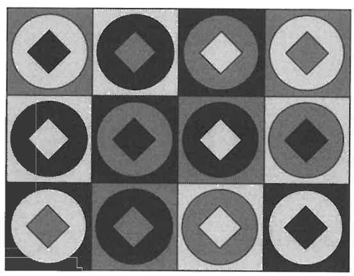
1

## PATCHWORK

Il y a 3 couleurs possibles pour la zone a ; Il n'y en a plus que 2 pour la zone b et encore 2 pour la zone c. Il y a donc $3 \times 2 \times 2 = 12$ carrés de tissu différents. On peut donc les disposer suivant un rectangle de 3×4 ou 2×6. Pour que deux zones adjacentes ne soient pas de la même couleur, 3 étant premier avec 2 et 4, il suffit de disposer les carrés en permuttant régulièrement les trois couleurs de fond sur les bandes de longueur 4 ou 2, comme le montrent les deux exemples suivants.





2

## SUR LA PLANETE HEPTILON

Le nombre ***1111*** correspond dans notre système décimal à :
$\mathbf{1} \times 7^3 + \mathbf{1} \times 7^2 + \mathbf{1} \times 7 + \mathbf{1} = \mathbf{1} \times 343 + \mathbf{1} \times 49 + \mathbf{1} \times 7 + \mathbf{1} = 343 + 49 + 7 + 1 = 400$.
Le nombre ***2222*** $= 2 \times$ ***1111*** ; il correspond donc à $2 \times 400 = 800$.
Le nombre ***3333*** $= 3 \times$ ***1111*** ; il correspond donc à $3 \times 400 = 1200$.
Les années heptiloniennes ***1111***, ***2222*** et ***3333*** correspondent donc aux années terriennes 400, 800 et 1200.
$2000 = 5 \times 400$. Donc le nombre 2000 correspond à $5 \times$ ***1111*** = ***5555*** en heptilonien. L'année terrienne 2000 est donc l'année heptilonienne ***5555***.
*Remarque* : on peut obtenir le résultat par divisions successives par 7 :
$2000 = 7 \times 285 + 5$ ; $285 = 7 \times 40 + 5$ et $40 = 7 \times 5 + 5$, d'où la réponse.

3

## PYRAMIDE 2000

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 17^2 + 18^2 = 2109$.
Pour obtenir 2000, il faut donc ôter 109 cm$^3$, et la seule façon est d'enlever la plaque de côté 10 et celle de côté 3.
La hauteur de la pyramide est alors de $18 - 2 = 16$ cm.

4

## ANNÉE 2000

On remarque que
$2000 = 2 \times 1000 = 2 \times 10 \times 10 \times 10 = 2 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$.
Donc $2000 = 1 \times 2^4 \times 5^3$ ou $1 \times 4^2 \times 5^3$.

5

## UN NOMBRE REMARQUABLE ?

Le nombre $n$ est soit pair soit impair ; on ne peut le savoir à priori !
Si le nombre $n$ est pair alors il est de la forme $n = 2m$. Sa moitié est $m$ et le nombre entier précédant $m$ est $m - 1$.
On a alors, d'après l'énoncé, $2m - 1000 = m - 1$.
D'où $m = 999$ et, dans ce cas, $n = 1998$.
Si le nombre $n$ est impair, il est alors de la forme $2m + 1$. Sa moitié est $m + 1/2$ et le nombre entier précédent est $m$.
Ainsi d'après l'énoncé, $2m + 1 - 1000 = m$.
D'où $m = 999$ et, dans ce cas, $n = 1999$.
Lequel des deux nombres est le plus remarquable ?
1998 ou 1999 ?

6

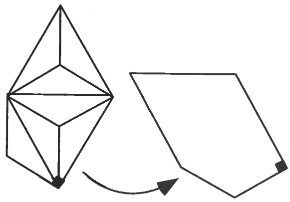
## LA FAMILLE SEPTIME

Puisque les parents ont eu sept enfants en six ans, c'est qu'il y a eu des jumeaux. Puisqu'il y a deux gâteaux de plus qu'il y a deux ans, c'est qu'il y a deux ans le plus jeune enfant n'était pas né, l'avant dernier venait juste de naître, et les jumeaux étaient déjà nés. Actuellement, le plus jeune a donc 1 an, et les jumeaux ont $x$ ans, avec $x \geqslant 3$.
On a donc : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + x = 2(1 + 2 + 3 + 4 + x - 2)$.
D'où $x + 21 = 16 + 2x$, et donc $x = 5$.
Il faudra donc allumer $1 + 2 + 3 + 4 + 2 \times 5 + 6 = 26$ bougies.

Solutions

7

## PAVAGE

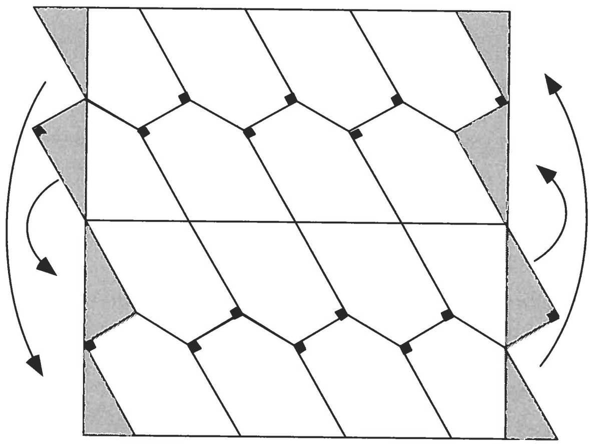


Ce motif a une aire égale aux 7/3 de l'aire du triangle équilatéral de côté 4 cm.

On a donc : $\frac{7}{3} \times 4 \times 4 \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = 28 \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Pour recouvrir un rectangle de $16 \times 28 \frac{\sqrt{3}}{3}$, il faut donc 16 pavés.

Voici, ci-dessous, un pavage du rectangle avec les découpages nécessaires de carreaux.



8

## FAYÇAL ESSIV EN FAMILLE

Soit $S$ la somme d'argent de Fayçal.

On a : $\frac{3S}{7} + \frac{nS}{5} + 60 = S$, c'est-à-dire : $15\,S + 7n\,S + 2100 = 35\,S$.

$20\,S - 7n\,S = 2100$ ; $(20 - 7n)\,S = 2100$ ; $S = \frac{2100}{20 - 7n}$.

$20 - 7n$ est strictement positif. Donc $n = 1$ ou $n = 2$.

Si $n = 1$, $20 - 7n = 20 - 7 = 13$, et 13 ne divise pas $35 \times 60$.

Si $n = 2$, $20 - 7n = 20 - 14 = 6$, et 6 divise $35 \times 60$.

Alors, $S = \frac{2100}{6} = 350$.

Fayçal donne 350 F à ses trois enfants.

9

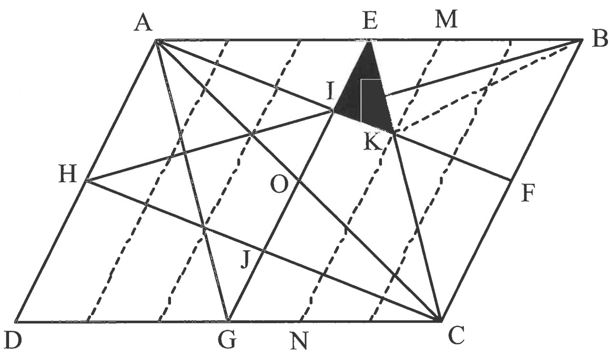
## 2001, L'ODYSSÉE DE L'ESPACE

En ôtant les huit sphères "sommets" et la sphère centrale, il reste $2001-9=1992$ sphères à répartir sur les douze arêtes, soit $1992/12=166$ sphères par arête. En ajoutant les deux sphères qui sont aux extremités des arêtes, il y a donc 168 sphères par arête.

*Autre solution* : En ôtant la sphère centrale, il reste 2000 sphères à répartir sur les arêtes. Si $n$ est le nombre de sphères par arête, on a : $12n-16=2000$. Il faut en effet ôter 16 sphères, car dans $12n$, les sphères des sommets appartiennent à trois arêtes et sont donc comptées trois fois. On obtient alors directement $n=168$.

10

## LA PLANETE DES JEUX




Soit $a$(ABCD) l'aire de ABCD.

Dans le triangle ABH, $\mathrm{EI}=\frac{1}{2}\,\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\,\mathrm{FC}$.

De même, $\mathrm{KI}=\frac{1}{2}\,\mathrm{KF}$ et $\mathrm{KE}=\frac{1}{2}\,\mathrm{KC}$.

$$\text{Donc } a(\mathrm{EIK})=\frac{1}{4}\,a(\mathrm{KFC})=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\,a(\mathrm{KFB})$$

$$=\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}\,a(\mathrm{CBMN})=\frac{1}{16}\times\frac{1}{3}\,a(\mathrm{ABCD})$$

$$\text{Donc } a(\mathrm{EIK})=\frac{1}{48}\,a(\mathrm{ABCD})$$

Si $a$(ABCD) représente 12 000 habitants, $a$(EIK) en représente $\frac{12\,000}{48}=250$.

Il y a donc 250 amateurs de jeux mathématiques.