RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE

C'est une compétition entre classes de troisième de collège et de seconde de lycée des six départements de l'académie d'Orléans-Tours.
En tout, presque 10 000 élèves de l'académie répartis dans environ 250 classes de collège et 125 classes de lycée participent à cette épreuve.

Depuis 1999, le Rallye « *nouvelle formule* » s'organise en deux étapes :
1) constitution par la classe d'un dossier « Culture Mathématique » dont les objectifs sont :

- Mettre à profit les nouvelles technologies pour mener des recherches, échanger et communiquer
- Privilégier et développer l'aspect culturel des mathématiques. (Thèmes proposés en 2000 : *quadrature et Fibonacci*).

2) résolution de problèmes en équipes : l'épreuve (*1h 15*) est constituée d'une liste de six exercices pour les troisièmes et de 8 exercices pour les secondes dont certains sont communs aux deux classes. Ces exercices sont de diverses natures (*géométrie, travaux numériques, combinatoire et logique*) et de difficulté graduée (*5, 8, 12 points*).

Un recueil analytique (*brochure IO n° 49*) est édité par l'IREM d'Orléans. Un livre « Morceaux choisis », édité par *ACL - les éditions du Kangourou*, regroupe 50 problèmes du Rallye.

C'est l'esprit d'équipe et la cohésion de la classe qui sont valorisés. Par la variété des niveaux de difficultés des exercices, tous les élèves, quel que soit leur niveau en mathématique, apportent leurs compétences pour construire le dossier réponse de la classe. Une grande attention est portée à la rédaction des solutions et à leur justification.

Ses objectifs sont : l'incitation au travail d'équipe, l'intéressement des élèves d'une même classe à une activité mathématique diversifiée et le développement de l'esprit scientifique.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

1986 : 30 classes d'Orléans.
1987 : 150 classes du Cher, de l'Indre et du Loiret.
1988 : 375 classes avec en plus l'Eure-et-Loir et le Loir-et-Cher.
1989 : 630 de toute l'académie.
1994 : 200 élèves de Djibouti participent.
1995 : dixième édition et record de participation avec 21500 élèves répartis dans 800 classes.
1999 : Rallye Math “nouvelle Formule”.

COMPÉTITION

Une épreuve d'entraînement en décembre.
L'épreuve officielle en mars.
Chaque classe s'organise pour résoudre en 1h15 les exercices.
Un palmarès académique pour les secondes et deux palmarès départementaux pour les troisièmes.
Six palmarès départementaux pour les collèges et lycées.

ÉPREUVES

Par classe entière. Deux catégories.
Troisième : Palette de 6 exercices de difficultés variées
Seconde : Palette de 8 exercices dont certains sont communs avec les précédents.
Seules les notions mathématiques au programme des classes visées sont utiles.

PARTENAIRES

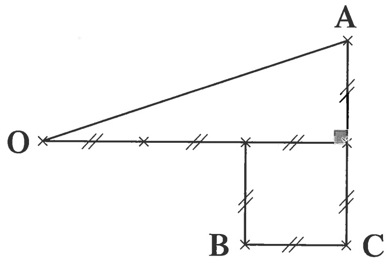
- Conseil Régional du Centre
- Conseils Généraux : Cher, Eure-et-Loir, Indre, Indre-et-Loire, Loir-et-Cher, Loiret
- Municipalités et mécènes locaux
- Rectorat de l'Académie d'Orléans-Tours
- Inspections Académiques

CONTACTS

IREM Université d'Orléans
BP 6759
45067 Orléans Cedex 2

Rectorat secrétariat des IPR
21, rue Saint-Etienne
45043 Orléans Cedex

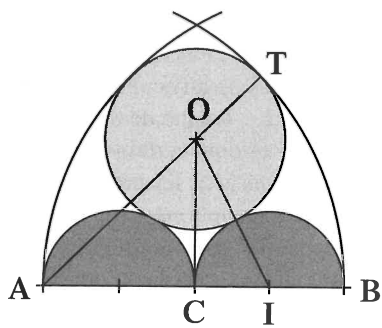
1 - SI [AB] M'ÉTAIT TRACÉ $3^{ème}$ - 2^{nde}



Sans utiliser la calculatrice, déterminer la valeur exacte de l'angle $\widehat{AOB}$.

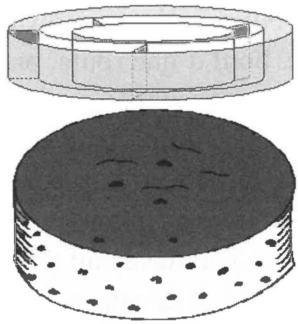
2 - PILE POIL $3^{ème}$ - 2^{nde}

Dans la figure ci-contre, on pose :
AC = CB = d
OT = R.
1) Exprimer R en fonction de d pour que cette figure soit réalisable.
2) Pour d = 10 cm, calculer les longueurs OT et OA puis réaliser la figure avec le plus grand soin possible.



3 - TRANCHES ÉTRANGES $3^{ème}$ - 2^{nde}

Pour partager équitablement un gâteau de forme circulaire de diamètre 36 cm, on a fabriqué un ustensile de découpe formé de trois cylindres d'acier concentriques tranchants de rayons 6, 12 et 18 cm reliés entre-eux par des séparateurs suivant le modèle ci-contre où seulement quatre séparateurs ont été placés.



Combien de séparateurs doit-on positionner entre les cylindres pour que les parts aient toutes la même aire ?
Faire un dessin à l'échelle 1/2 de l'ustensile vu de dessus.

4 - AMNÉSIE SUR LES BORDS DU CHER $3^{ème}$ - 2^{nde}

Au collège des « Bords du Cher », les trois classes de $3^{ème}$ ont obtenu au dernier Brevet des collèges les résultats suivants :

La $3^{ème}$ Descartes a obtenu une moyenne de 13,7/20,
La $3^{ème}$ Rabelais a obtenu une moyenne de 12,3/20,
La $3^{ème}$ Chasles a obtenu une moyenne de 10,5/20.

Les deux classes, $3^{ème}$D et $3^{ème}$R réunies, ont obtenu une moyenne de 12,9. Les deux classes, $3^{ème}$R et $3^{ème}$C réunies, ont obtenu une moyenne de 11,3.

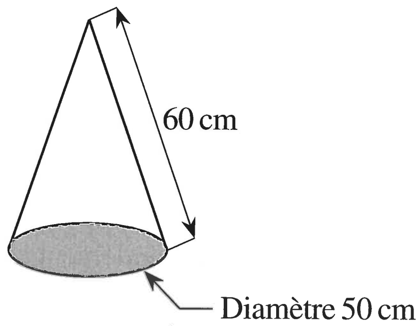
1) S'il y avait eu 28 élèves dans la $3^{ème}$R, combien y aurait-il eu d'élèves dans chacune des deux autres classes ?

2) En fait, le Principal ne se souvient plus des effectifs des trois classes. Après examen de ces moyennes, il affirme que la $3^{ème}$D a un effectif égal aux 3/4 de celui de la $3^{ème}$R et que la $3^{ème}$C a un effectif égal aux 5/4 de celui de la $3^{ème}$R. Prouver qu'il a raison.

3) En déduire la moyenne des trois classes réunies.

5 - DE QUOI EN BAVER ! 2^{nde}

Pour signaler des travaux sur le bord d'une route, on y a placé des cônes.
À la base de l'un d'eux, représenté ci-contre, se prélasse un escargot.
Le soleil devenant trop ardent, il décide de rejoindre le point de la base diamétralement opposé en parcourant sur le cône la plus courte distance possible.



Dessiner un patron de ce cône à l'échelle 1/10.
Représenter, sur ce patron, la trace laissée par l'escargot.
Calculer, à un millimètre près, la longueur réelle de cette trace.

6 - LE CHALLENGE $3^{ème}$-2^{nde}

Pour un challenge sportif, cinq équipes sont présentes, chacune rencontrant les quatre autres.
Quand elle gagne un match, une équipe marque 4 points ; quand elle fait match nul, elle marque 2 points ; quand elle perd un match, elle marque 1 point.

Quels sont tous les scores possibles que peut marquer une équipe à l'issue du challenge ?
Quels sont tous les scores qui, à l'issue du challenge, ont été obtenus de plusieurs façons différentes ?

7 - UN ROND SUR L'EAU 3ème-2nde

Au cours de l'étape " La Rochelle - La Baule " du Tour Aérien des jeunes pilotes, les concurrents doivent suivre, à altitude constante, un arc de cercle de 33 km de rayon centré sur Noirmoutier dont les extrémités sont l'île d'Yeu et La Baule. Cette trajectoire est impossible à suivre parfaitement avec l'équipement de bord d'un avion de tourisme. Un pilote du Tour a donc prévu un parcours en forme de polygone régulier inscrit dans l'arc de cercle à suivre. Pour cela, il effectue un virage de 10° à intervalle de temps régulier.
On suppose que : le vent est nul, l'avion vole à la vitesse constante de 180 km/h et son pilote tient parfaitement ses caps.
Calculer, à la seconde près, le temps qui sépare deux changements de caps consécutifs.

8 - PARTAGE ISOCÈLE 3ème-2nde

On a réussi à partager un certain triangle isocèle ABC non aplati de sommet principal A en deux triangles isocèles APB et APC où le point P appartient au segment [BC].

Calculer les mesures possibles des angles du triangle ABC.
Dans chaque cas, réaliser une figure illustrant ce partage.

9 - ADMIS – RECALÉS 3ème-2nde

La moyenne des candidats admis est de 13.
La moyenne des candidats recalés est de 7.
La moyenne de l'ensemble des candidats est de 10,6.

Calculer le pourcentage des admis par rapport à l'ensemble des candidats.

10 - AU PRINTEMPS DE BOURGES $3^{\text{ème}}$-2^{nde}

Catherine, Jean-Pierre, Joël, Marie-Claire et Pierre " font " ensemble le Printemps de Bourges. Catherine part de Chartres au volant de son véhicule, accompagnée de Jean-Pierre. Elle passe prendre Marie-Claire et Joël à Patay, puis Pierre à Jargeau, et direction Bourges ! Après la fête, sur le chemin de retour, elle dépose chacun à son lieu de départ. Les frais de transport réglés par Catherine s'élèvent pour l'aller et le retour à 483 F au total.

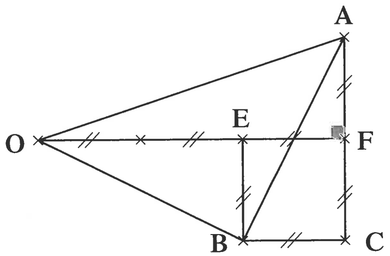
a) Chacun prend à sa charge, (y compris Catherine) les frais de transport proportionnellement à la distance qu'il a parcourue. Ainsi, Marie-Claire propose 90 F à Catherine. La distance de Patay à Jargeau est égale à 45 km ; celle qui sépare Jargeau de Bourges est de 105 km. Quelle est la distance, en kilomètres, entre Chartres et Patay ?

b) Pierre s'estime lésé et propose que sur chaque tronçon, seules les personnes présentes dans la voiture se partagent équitablement les frais de transport (qui sont proportionnels à la longueur du tronçon). Quelle est alors la participation financière de Pierre arrondie au franc près ? Avait-il raison de contester ?

Solutions

1

SI [AB] M'ÉTAIT TRACÉ



Dans le triangle ABC rectangle en C, d'après Pythagore, $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2^2 + 1^2 = 5$.
De même dans le triangle OEB rectangle en E, $OB^2 = 2^2 + 1^2 = 5$.
D'où AB=OB et le triangle OAB est isocèle de sommet principal B.
Dans le triangle OFA rectangle en F, on a $OA^2 = 3^2 + 1^2 = 10$.
Donc $OB^2 + AB^2 = 10 = OA^2$.
D'après la réciproque de Pythagore, le triangle OAB est rectangle en B.
Le triangle AOB est rectangle en B et isocèle donc l'angle $\widehat{AOB}$ vaut 45°.

2

PILE POIL

1) $OA = 2d - R$; $OI = \dfrac{d}{2} + R$.

Dans le triangle OAC rectangle en C, d'après Pythagore,
$OC^2 = (2d-R)^2 - d^2$.
Dans le triangle OCI rectangle en C, d'après Pythagore,
$OC^2 = \left(\dfrac{d}{2} + R\right)^2 - \left(\dfrac{d}{2}\right)^2$.

D'où $(2d-R)^2 - d^2 = \left(\dfrac{d}{2} + R\right)^2 - \left(\dfrac{d}{2}\right)^2$

soit $4d^2 - 4dR + R^2 - d^2 = \dfrac{d^2}{4} + dR + R^2 - \dfrac{d^2}{4}$.

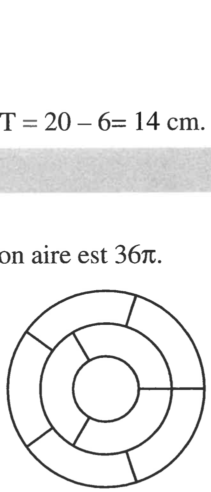
C'est-à-dire : $3d^2 = 5dR$ donc $R = \dfrac{3}{5}d$.

2) Pour $d = 10$ cm, $OT = R = 6$ cm et $OA = AT - OT = 20 - 6 = 14$ cm.

3

TRANCHES ÉTRANGES

La part unité est déterminée par le disque central et son aire est 36π.
Aire de la $1^{ère}$ couronne à partir du centre :
$144\pi - 36\pi = 108\pi$. Il faut donc 3 parts dans cette couronne soit 3 séparateurs.
Aire de la $2^{ème}$ couronne à partir du centre :
$324\pi - 144\pi = 180\pi$. Il faut donc 5 parts dans cette couronne soit 5 séparateurs.
Il faut donc positionner 8 séparateurs.



4

AMNÉSIE SUR LES BORDS DU CHER

Soit x, y et z les effectifs respectifs des troisièmes D, R et C.

1) Si $y = 28$, alors $x \times 13{,}7 + 28 \times 12{,}3 = (x + 28) \times 12{,}9$ soit $0{,}8x = 28 \times 0{,}6$ soit $x = 21$.
$28 \times 12{,}3 + z \times 10{,}5 = (28 + z) \times 11{,}3$ soit $0{,}8z = 28$ soit $z = 35$.

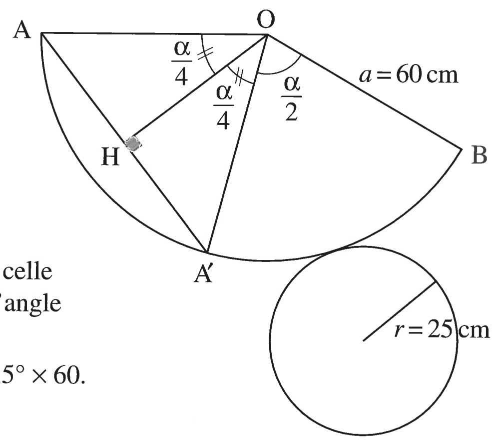
2) $x \times 13{,}7 + y \times 12{,}3 = (x + y) \times 12{,}9$ d'où $0{,}8x = 0{,}6y$ soit $x = 3/4\,y$.
$y \times 12{,}3 + z \times 10{,}5 = (y + z) \times 11{,}3$ d'où $0{,}8z = y$ soit $z = 5/4\,y$.
Le Principal a raison !

3) Alors la moyenne m des trois classes réunies est telle que :
$(3/4\,y + y + 5/4\,y) \times m = 3/4\,y \times 13{,}7 + y \times 12{,}3 + 5/4\,y \times 10{,}5$

soit $m = \dfrac{3/4 \times 13{,}7 + 12{,}3 + 5/4 \times 10{,}5}{3/4 + 1 + 5/4} = 11{,}9$.

5

DE QUOI EN BAVER !



Soit $\widehat{AOB} = \alpha$.

$\alpha = \dfrac{r \times 360}{a}$

$\alpha = \dfrac{25 \times 360}{60} = 150°$.

L'angle au sommet du patron est de 150°.

La longueur de la trace est celle du segment [AA′] tel que l'angle $\widehat{AOA'} = 75°$.

$AA' = 2 \times AH = 2 \times \sin 37{,}5° \times 60$.

$AA' \approx 73{,}1$ cm.

Solutions

6

LE CHALLENGE

Pour chaque cas, ce tableau indique le nombre de matches gagnés, nuls et perdus.

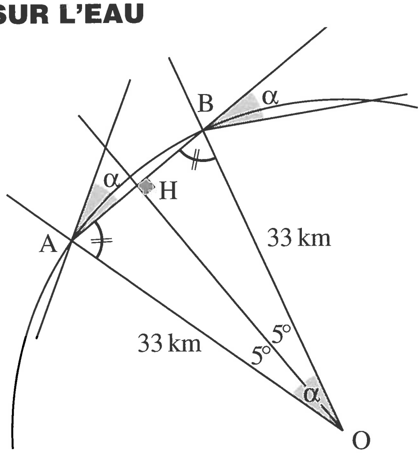
G (4 pt)	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0
N (2 pt)	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0
P (1 pt)	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4
Score	16	14	13	12	11	10	10	9	8	7	8	7	6	5	4

Les scores possibles sont tous les entiers de 4 à 16 sauf 15.
Les scores obtenus deux fois sont :

- 7 : 1 match gagné et 3 matches perdus
  ou bien 3 matches nuls et 1 match perdu,
- 8 : 1 match gagné, 1 match nul et 2 matches perdus
  ou bien 4 matches nuls,
- 10 : 2 matches gagnés et 2 matches perdus
  ou bien 1 match gagné et 3 matches nuls.

7

UN ROND SUR L'EAU



Dans le triangle rectangle OAH :
$AH = 33 \times \sin 5°$ donc $AB = 2 \times 33 \times \sin 5°$.
La durée, en secondes, pour parcourir AB est :

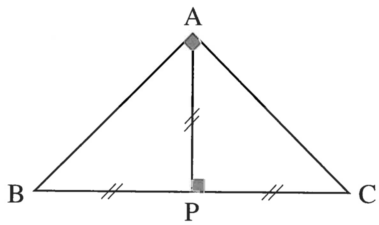
$$t = \frac{2 \times 33 \times \sin 5°}{180} \times 3600 = 115 \text{ s} = 1 \text{ min } 55 \text{ s}.$$

Solutions

8

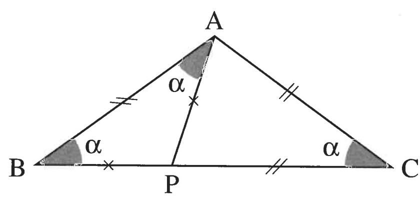
PARTAGE ISOCÈLE

a) *1^er Cas*



Si les deux triangles isocèles APB et APC ont pour sommet principal P,
alors on a PA = PB = PC.
Le triangle ABC est donc un triangle rectangle isocèle.

b) *2^ème Cas*



Si les deux triangles isocèles ont pour sommets principaux respectifs P et C, alors on a :

$\widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{BAP} = \alpha$.

$\widehat{CAP} = \dfrac{180° - \alpha}{2}$ donc $\widehat{BAC} = \alpha + \dfrac{180° - \alpha}{2}$.

Or $\widehat{BAC} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

$\left[\alpha + \dfrac{180° - \alpha}{2}\right] + \alpha + \alpha = 180°$.

d'où $\alpha = 36°$

Conclusion :

Un triangle isocèle ABC ne peut être partagé en deux triangles isocèles que dans les deux cas suivants :

1er cas : ABC est rectangle en A ;

2ème cas : les angles à la base du triangle ABC mesurent 36°.

9

ADMIS - RECALÉS

Sur 100 candidats, soit A le nombre de candidats admis.
Le nombre de candidats recalés est $100 - A$.
Le nombre total de points obtenus par les candidats admis est $13A$.
Le nombre total de points obtenus par les candidats recalés est $7(100 - A)$.
Le nombre total de points obtenus par tous les candidats est $100 \times 10{,}6 = 1060$.
$13A + 7(100 - A) = 1060$ soit $6A = 360$ ou encore $A = 60$.
Le pourcentage des admis par rapport à l'ensemble des candidats est de 60%.

10

AU PRINTEMPS DE BOURGES

a) Marie-Claire a parcouru 300 km pour 90 F.
Le coût du transport, par personne et par kilomètre est donc de 0,30 F.
Pour le parcours Jargeau-Bourges aller–retour (AR), Pierre devrait payer : $0{,}30 \times 210 = 63$ F.
Les frais du parcours Patay-Bourges (AR), des quatre passagers, s'élèvent à 90×4 soit 360 F.
Les frais du parcours Chartres-Patay (AR), s'élèvent à : $483 - (360 + 63)$ soit 60 F pour deux personnes à bord, c'est-à-dire, 30 F par personne.
L'aller-retour Chartres-Patay représente donc : $\dfrac{30}{0{,}30}$ soit 100 km.
La distance Chartres-Patay est donc égale à 50 km.

b) L'aller-retour Chartres-Bourges mesure 400 km.
Le prix de revient du kilomètre s'élève donc à $\dfrac{483}{400}$ soit 1,2075 F.
sur le tronçon Jargeau-Bourges (AR) les frais se sont élevés à :
$1{,}2075 \times 210 = 253{,}575$ F pour 5 personnes.
Pierre devrait donc payer : $\dfrac{253{,}575}{5}$ soit 50,715 F arrondis à 51 F.
Pierre a donc raison de s'estimer lésé dans la première façon de partager les frais où il aurait dû payer 63 F.