TOURNOI MATHÉMATIQUE DU LIMOUSIN

Le Tournoi, qui s'adresse aux élèves de quatrième et aux lycéens, travaillant par équipe de deux, obtient la participation de tous les lycées et de plus de trois collèges sur quatre dans les trois départements de la Région : Corrèze, Creuse et Haute-Vienne.

Développer le goût de la recherche scientifique, promouvoir l'image des mathématiques auprès des jeunes et du grand public, tels sont ses objectifs.
La remise des prix, grande fête des mathématiques et des jeunes a lieu au printemps. Un grand nombre de jeunes de toutes sections y sont récompensés.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

Le Tournoi mathématique du Limousin a été créé en 1987 par la Régionale de Limoges de l'APMEP, le département de Mathématique de la Faculté des Sciences de Limoges, l'Inspection Pédagogique Régionale, l'IREM de Limoges, groupés en association « loi 1901 ».
Cinq mille élèves de quatrième et deux mille lycéens ont participé au Tournoi Mathématique du Limousin en 2002.

COMPÉTITION

Épreuve 4ème : le 14 janvier 2003 (2 heures durant le temps scolaire).
Épreuve en lycée : le 15 janvier 2003 (3 heures durant le temps scolaire).
Remise des prix : le 5 avril, au Centre Culturel Jean Moulin à Limoges.

PARTENAIRES

Rectorat,
Conseil Général du Limousin,
Conseils Généraux de Corrèze, Creuse et Haute-Vienne.
Banque Tarneaud …

ÉPREUVES

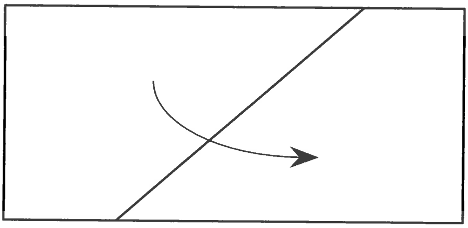
Par équipe de 2.
Catégories : $4^{\text{ème}}$ et $2^{\text{nde}}/1^{\text{ère}}$/terminales.
Les textes proposés, sous forme ludique, donnent envie de chercher, nécessitent une solution rédigée et sont susceptibles de prolongements.

CONTACTS

Tournoi Mathématique du Limousin :
IREM 123, av. Albert Thomas 87060 Limoges CEDEX
Jean Lebraud :
15, rue Jean Jaurès 87350 Panazol
Tél : 05 55 30 82 78

1 - PLIEZ, PERCEZ... $4^{ème}$

Pliez une feuille rectangulaire suivant un pli de votre choix :



Repliez suivant une autre direction afin d'obtenir 4 épaisseurs de papier. Percez une seule fois les quatre épaisseurs avec une pointe de compas.

Dépliez : les quatre trous obtenus sont les sommets d'un trapèze isocèle ; justifiez.

Comment plier une autre feuille et comment la percer une seule fois pour obtenir quatre trous qui sont :

- sommets d'un rectangle ?
- sommets d'un carré ?

2 - SUPER-1 $4^{ème}$

Anne compte les entiers positifs, inférieurs ou égaux à 160, dont l'écriture contient le chiffre 1.

Barbara compte les entiers positifs, non nuls, inférieurs ou égaux à 160, qui s'écrivent sans le chiffre 1.

Elles trouvent le même résultat et s'exclament :
« génial ! 160 est un *super-1.* »

Vérifiez leurs calculs.

Quels sont les trois plus petits *super-1* ?

3 - OBJECTIF 2000 $4^{ème}$

En partant de 1, on peut arriver à 2000 en n'utilisant que deux opérations :

- ajouter 1,
- multiplier par 3.

Donnez un exemple et dites en combien d'étapes vous avez réussi.
Quel est le nombre minimum d'étapes à utiliser ?

4 - ABATTEZ VOS CARTES ! $4^{ème}$

On veut recouvrir en partie un rectangle de 13 cm sur 8 cm en utilisant sept cartes de 5 cm sur 3 cm.
Les cartes peuvent se chevaucher (mais ne les coupez pas !).

Proposez trois dispositions laissant :

- la première, une partie découverte de 4 cm^2,
- une autre, une partie découverte de 3 cm^2,
- la dernière, une partie découverte de 2 cm^2.

5 - LE PRIX DU SOLEIL $4^{ème}$

Alice vend les voyelles mais offre gratuitement les consonnes et les accents.
Au pays d'Alice, Vénus vaut 30 euros, Mercure vaut 43 euros et Uranus 54 euros. Jupiter vaut le double de Mars et Pluton a le même prix que la Terre.

Quel est le prix du Soleil ?

6 - COUPEZ, ASSEMBLEZ $4^{ème}$

Théo veut découper un rectangle en quatre trapèzes rectangles de même aire.
Comment peut-il faire ?

Léa veut découper un trapèze rectangle et reconstituer avec tous les morceaux quatre trapèzes rectangles de même aire. Aidez-la.
Attention : les trapèzes rectangles dont il est question ici ne doivent pas être des rectangles.

7 - À LA QUEUE LEU LEU ! $1^{ère}$-Term

1999 = 999 + 1000

Quels sont les entiers naturels qui, comme 1999, peuvent s'écrire comme somme de deux entiers naturels consécutifs ?

2000 = 398 + 399 + 400 + 401 + 402

Trouver tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 qui peuvent s'écrire comme somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs.

Plus généralement, quels sont les entiers naturels pouvant s'écrire comme somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs ?

8 - GRAND RALLYE PÉDESTRE

Lycée

Claude et Dominique sont engagés dans le Grand Rallye Pédestre du Limousin.
Claude, dossard bleu, en catégorie cadet et Dominique, dossard rouge, en catégorie junior.
Pour chaque catégorie, la numérotation des dossards commence à 1 et on ne saute pas de numéro.

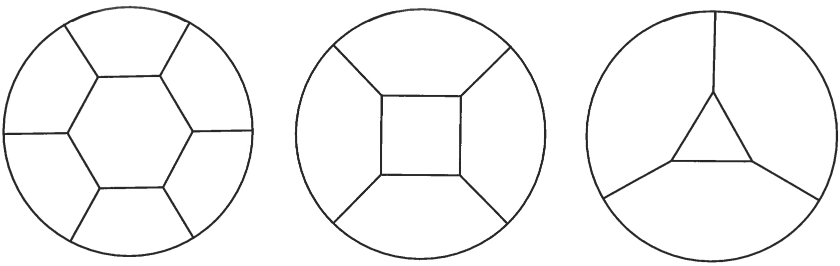
Dans l'ambiance électrique du départ, Claude observe ses adversaires et dit à Dominique :
« C'est curieux, j'ai fait la somme des numéros de dossards (bleus) qui sont plus petits que le mien et j'observe qu'elle est égale à la somme des numéros de dossards (bleus) qui sont plus grands que le mien ! ».
Dominique éclate de rire et lui dit :
« Vous n'êtes même pas une douzaine dans ta catégorie, c'était facile à observer. Admire un peu, je suis dans la même situation que toi dans ma catégorie et pourtant nous sommes bien plus nombreux que vous, même si nous sommes loin d'atteindre la centaine ! ».

Alors combien y a-t-il de concurrents engagés au Grand Rallye Pédestre du Limousin en catégorie cadet et en catégorie junior ?

Énoncés

9 - L'ARTISTE ET SES TOILES Lycée

Une araignée a tissé sa toile plane dans l'anneau circulaire d'un panier de basket. Tous les segments constituant la toile ont la même longueur ; le polygone central est régulier et les segments qui le relient au cercle sont sur des droites passant par le centre du cercle. Pour rivaliser avec l'araignée, construisez à la règle et au compas les toiles suivantes (le cercle et son centre sont donnés) :



10 - PILES D'ASSIETTES Lycée

2001 assiettes identiques sont réparties en 3 piles de hauteurs différentes. Quel nombre minimum d'assiettes peut contenir la plus haute pile ?

2001 assiettes identiques sont réparties en 5 piles de hauteurs différentes. Quel nombre minimum d'assiettes peut contenir la plus haute pile ? Quel nombre minimum d'assiettes peut-on obtenir en réunissant les deux plus hautes piles ? (Sans en casser !)
Donner une disposition réalisant ce minimum.

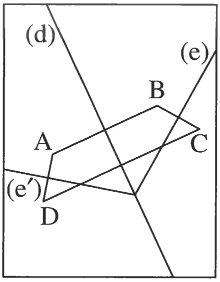
N assiettes identiques sont réparties en 5 piles de hauteurs différentes. Quel nombre minimum d'assiettes peut-on obtenir en réunissant les deux plus hautes piles ?

N assiettes identiques sont réparties en n piles de hauteurs différentes. Quel nombre minimum d'assiettes peut-on obtenir en réunissant les p plus hautes piles ?

1

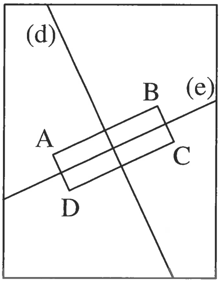
PLIEZ, PERCEZ...

On plie suivant (d), puis suivant (e) [ou (e′)], on perce les 4 épaisseurs, on ouvre et on obtient :

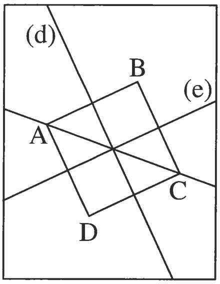


ABCD est un trapèze isocèle, car [AD] et [BC] se correspondent par symétrie d'axe (d).

Pour obtenir un rectangle, il faut en plus un angle droit (par exemple en B), et donc que (d) et (e) soient perpendiculaires :



Pour obtenir un carré, il faut en plus que A (par exemple) soit équidistant de (d) et (e), donc on perce sur une bissectrice d'un angle droit formé par (d) et (e). La bissectrice est obtenue par un troisième pli :



2

SUPER-1

Comptons parmi les entiers non nuls inférieurs à 160 ceux qui s'écrivent avec un 1 et ceux qui s'écrivent sans 1 :

	de 1 à 9	de 10 à 19	de 20 à 99	de 100 à 160	total
avec 1	1	10	8	61	80
sans 1	8	0	72	0	80

Pour trouver effectivement les premiers super-1 traçons une droite et écrivons au-dessus de cette droite les nombres dont l'écriture contient le chiffre 1 et au-dessous ceux dont l'écriture ne contient pas le chiffre 1. On obtient :

1	10 11 12 13 14 15 16	17 18 19 21
2 3 4 5 6 7 8 9		20 22 23 24

2, 16, 24 sont les trois plus petits super-1 ; le suivant est 160.
24 est un super-1, car il y a 12 nombres contenant le chiffre 1 inférieurs ou égaux à 24, donc 12 nombres inférieurs ou égaux à 24 ne contenant pas le chiffre 1.

3

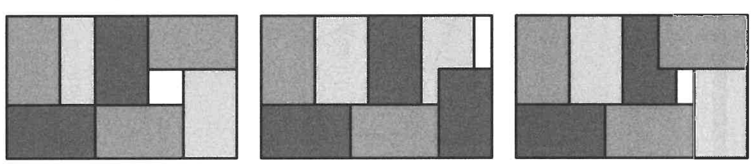
OBJECTIF 2000

Il est plus économique (en étapes) de multiplier par 3 que d'ajouter 1, a fortiori quand le nombre est « grand ».
Le plus grand multiple de 3 inférieur à 2000 est1998, c'est donc lui qu'on cherche à atteindre.
$1998 = 3 \times 666$, $666 = 3 \times 222$, $222 = 3 \times 74$.
On cherche alors le plus grand multiple de 3 inférieur à 74 : c'est 72,
$72 = 3 \times 24$, $24 = 3 \times 8$
puis le plus grand multiple de 3 inférieur à 8 : c'est 6, $6 = 3 \times 2$.
On a alors les 13 étapes suivantes :

$$1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{\times 3} 6 \xrightarrow{+1} 7 \xrightarrow{+1} 8 \xrightarrow{\times 3} 24 \xrightarrow{\times 3} 72 \xrightarrow{+1} 73 \xrightarrow{+1}$$
$$74 \xrightarrow{\times 3} 222 \xrightarrow{\times 3} 666 \xrightarrow{\times 3} 1998 \xrightarrow{+1} 1999 \xrightarrow{+1} 2000.$$

4

ABATTEZ VOS CARTES !



5

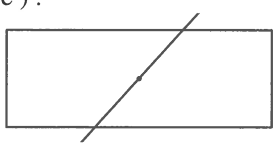
LE PRIX DU SOLEIL

Appelons a, e, i, o, u les valeurs en euros des voyelles correspondantes.
Le prix, en euros, de Vénus s'obtient ainsi : $e + u = 30$, celui de Mercure ainsi : $2e + u = 43$. Par différence on trouve : $e = 13$.
Comme $e + u = 30$, $u = 30 - 13 = 17$.
Le prix d'Uranus s'obtient ainsi : $2u + a = 54$. Donc $a = 54 - 2 \times 17 = 20$.
Le prix de Jupiter est le double de celui de Mars, donc : $u + i + e = 2a$ d'où $17 + i + 13 = 40$ et $i = 10$.
Pluton et la Terre ont le même prix, donc : $u + o = 2e$ d'où $17 + o = 26$ et $o = 9$.
Le prix du Soleil se calcule ainsi : $o + e + i = 9 + 13 + 10 = 32$.
Le prix du Soleil est 32 euros.

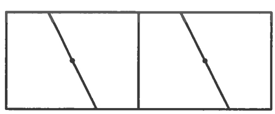
6

COUPEZ, ASSEMBLEZ

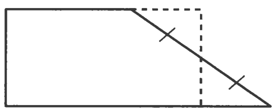
Théo peut utiliser le partage d'un rectangle en deux trapèzes de même aire à l'aide d'une droite passant par le centre de symétrie du rectangle (les deux trapèzes sont symétriques par rapport au centre du rectangle et ont donc la même aire) :



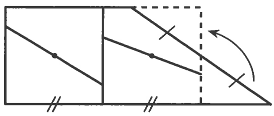
On peut donc découper le rectangle de départ en deux rectangles de même aire, grâce à un de ses axes de symétrie et ensuite découper les deux rectangles obtenus comme expliqué ci-dessus. Théo peut obtenir :



Léa peut facilement découper un trapèze rectangle et assembler les morceaux pour obtenir un rectangle. Sur la figure ci-dessous les deux triangles rectangles sont symétriques par rapport à leur sommet commun.



Léa peut ensuite appliquer le même procédé que Théo :



Bien entendu, il y a d'autres solutions ...

7

À LA QUEUE LEU LEU !

La somme de deux entiers consécutifs peut s'écrire : $n + (n+1) = 2n + 1$, les nombres pouvant ainsi s'écrire sont tous les nombres impairs.

Parmi les entiers inférieurs ou égaux à 20, peuvent s'écrire comme somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs tous les nombres impairs ainsi que :
$1+2+3=6$, $2+3+4=9$, $3+4+5=12$, $4+5+6=15$,
$5+6+7=18$, $1+2+3+4=10$, $2+3+4+5=14$,
$3+4+5+6=18$, $1+2+3+4+5=15$, $2+3+4+5+6=20$.
On constate que seuls les nombres 0, 2, 4, 8, 16 ne figurent pas dans la liste ci-dessus.

Nous allons montrer que, plus généralement, les nombres entiers de la forme 2^k, $k \geqslant 1$, sont les seuls avec 0, qui ne peuvent s'écrire comme somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs.
Soit S une somme d'entiers consécutifs : $S = x + (x+1) + \ldots\ldots + (x+n-1)$ avec $(x \geqslant 1 \;,\; n \geqslant 2)$, on a : $S = nx + \dfrac{n(n-1)}{2}$

1^er^ cas : $n = 2p \;\; (p \geqslant 1)$; $S = p \times [2(x+p)-1]$ avec $[2(x+p)-1]$ nombre impair supérieur ou égal à 3.

2^ème^ cas : $n = 2p+1 \;\; (p \geqslant 1)$; $S = (2p+1)(x+p)$ avec $2p+1$ nombre impair supérieur ou égal à 3.

S est donc toujours divisible par un nombre impair supérieur ou égal à 3, il n'est donc pas possible d'obtenir un nombre de la forme 2^k, $k \geqslant 1$.
2^k ne peut pas s'écrire comme somme d'au moins deux entiers consécutifs.

En revanche, soit N un nombre qui n'est pas de la forme 2^k, alors $N = 2^k \times (2m+1)$ avec $m \geqslant 1$, on peut avoir $S = N$ en choisissant :
Dans le 1^er^ cas, $p = 2^k$, $n = 2p$, $x+p = m+1$ c'est à dire $x = m+1-2^k$ (c'est possible si $x \geqslant 1$ c'est à dire $m \geqslant 2^k$).
Dans le 2^ème^ cas, $p = m$, $n = 2p+1$, $x+p = 2^k$ c'est à dire $x = 2^k - m$ (c'est possible si $x \geqslant 1$ c'est à dire $m \leqslant 2^k - 1$).
On peut donc toujours écrire, pour $m \geqslant 1$ et $N = 2^k \times (2m+1)$, N comme somme d'au moins deux entiers consécutifs.

8

GRAND RALLYE PÉDESTRE DU LIMOUSIN

Soit n le nombre de concurrents engagés dans une catégorie et soit p le numéro du dossard de Claude (respectivement Dominique).
Somme des numéros des dossards plus petits que p :

$$1+2+3+\ldots+(p-1)=\frac{p(p-1)}{2}$$

Somme des numéros des dossards plus grands que p :

$$(p+1)+(p+2)+\ldots\ldots+n \text{ c'est à dire : } (n-p)\times\frac{p+1+n}{2}$$

En écrivant l'égalité et en simplifiant on trouve : $p^2=\frac{n(n+1)}{2}$

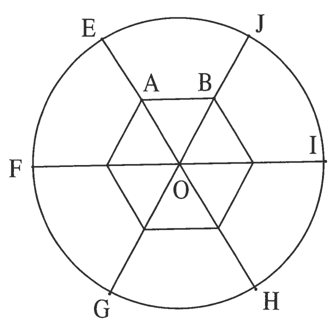
On obtient les solutions par essais successifs : on donne à n les valeurs 1, 2, 3, … et on regarde si $\frac{n(n+1)}{2}$ est le carré d'un entier.

Dans la catégorie cadet, il y a moins de 12 engagés, on trouve une solution $n = 8$ et $p = 6$.
Dans la catégorie junior, n est plus grand mais inférieur à 100, en continuant à examiner les valeurs successives de n on trouve une seule autre solution $n = 49$ et $p = 35$.

9 début

L'ARTISTE ET SES TOILES

Première toile



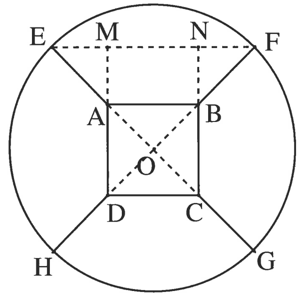
D'après les propriétés d'un hexagone régulier, ABO est équilatéral donc : AB = AO, or AB = AE donc A est le milieu de [EO].
On construit d'abord un hexagone régulier dont les sommets sont sur le cercle. E étant l'un de ces sommets, on construit le milieu A de [EO] puis le cercle de centre O et de rayon OA, et enfin un hexagone de centre O dont A est un sommet. Réciproquement, supposons A milieu de [EO], EA=AO, or AO=AB donc EA=AB.

Solutions

9 fin

Deuxième toile

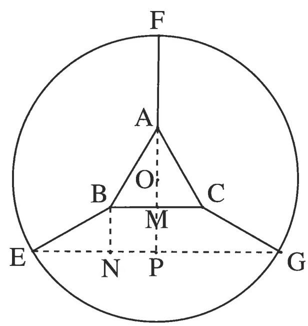
Complétons le dessin comme indiqué ci-contre : les triangles rectangles isocèles MEA, NBF, AOB sont superposables.



donc EC = EA + AO + OC,
EC = MN + EM + NF = EF.
On construit deux diamètres perpendiculaires EG et HF, la propriété EC = EF permet de construire C puis le cercle de centre O et de rayon OC, on complète alors le carré ABCD.
Réciproquement, supposons EC = EF, EA + 2 AO = MN + 2 EM,
$EA + \sqrt{2}\,AB = AB + \sqrt{2}\,EA$, $EA\,(1-\sqrt{2}) = AB\,(1-\sqrt{2})$, EA = AB.

Troisième toile

Considérons le dessin ci-contre :

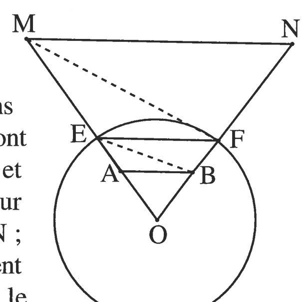


ABM et EBN sont deux triangles semi-équilatéraux superposables.
EP = EN + NP, EP = AM +MP, EP = AP
Construisons d'abord un triangle équilatéral EFG, les rayons [OE], [OF], [OG].
Soit P le milieu de [EG], la propriété EP = AP permet de construire A puis le cercle de centre O et de rayon OA et enfin les points B et C. Réciproquement, supposons EP = AP, EN + NP = AM + MP, EN + BM = AM + BN

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\,EB + \frac{1}{2}\,AB = \frac{\sqrt{3}}{2}\,AB + \frac{1}{2}\,EB,\ \ EB\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) = AB\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right),$$

EB = AB.

Chacune des constructions précédentes est adaptée au nombre de côtés du polygone situé au centre de la toile.



Voici maintenant une construction valable dans tous les cas : soit un polygone de n sommets dont [EF] est l'un des côtés, on veut construire A et B tels que EA = AB = BF ; plaçons M et N sur les droites (OE) et (OF) avec ME = EF = FN ; la figure formée par le triangle OEF et le segment [AB] est l'image de la figure formée par le triangle OMN et le segment [EF] par l'homothétie de centre O qui transforme M en E ; les droites (MF) et (EB) sont donc parallèles ; ayant construit M et N, on peut ainsi construire A et B.

10

PILES D'ASSIETTES

Notons a, b, c, les nombres d'assiettes dans les trois piles, avec $a < b < c$.
On a : $b \leqslant c - 1$ et $a \leqslant b - 1$ donc : $a \leqslant c - 2$.
Donc : $a + b + c \leqslant (c - 2) + (c - 1) + c$, c'est à dire : $2001 \leqslant 3c - 3$.
On en déduit : $\mathbf{c \geqslant 668}$.
On réalise ce minimum en prenant $a = 666$, $b = 667$, $c = 668$.

Avec 5 piles d'effectifs a, b, c, d, e et $a < b < c < d < e$, on a :
$a + b + c + d + e \leqslant (e - 4) + (e - 3) + (e - 2) + (e - 1) + e$
$2001 \leqslant 5e - 10$, donc : $e \geqslant 2011/5$, $e \geqslant 402{,}2$ donc : $\mathbf{e \geqslant 403}$.
D'autre part, $a + b + c + d + e \leqslant (d - 3) + (d - 2) + (d - 1) + d + e$
d'où : $2001 \leqslant 4(d + e) - 6 - 3e$, $4(d + e) \geqslant 2007 + 3e \geqslant 2007 + 1209$.
On en déduit : $\mathbf{d + e \geqslant 804}$.
Réalisation : $a = 398$, $b = 399$, $c = 400$, $d = 401$, $e = 403$.

Avec N assiettes réparties en 5 piles, on montre comme précédemment
$N \geqslant 5e - 10$, soit $e \geqslant 2 + N/5$ et $4(d + e) \geqslant N + 6 + 3e$;
posons $N = 5q + r$ avec $0 \leqslant r \leqslant 4$

r	0	1	2	3	4
$e \geqslant$	$q + 2$	$q + 3$	$q + 3$	$q + 3$	$q + 3$
$d + e \geqslant$	$2q + 3$	$2q + 4$	$2q + 5$	$2q + 5$	$2q + 5$

On a maintenant N assiettes réparties en n piles d'effectifs strictement croissants $x_1, x_2, \ldots x_n$, on réunit les p plus gros tas.
Posons $y_i = x_i - i$; on a : $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots\ldots \leqslant y_n$.
Soit $N' = N - (1 + 2 + \ldots + n)$ et $N' = nq + r$ avec $0 \leqslant r \leqslant n - 1$.
Le minimum de la somme des y_i associés aux p plus gros tas est obtenu pour la suite :
q, q, q, … q, q+1, q+1, …… q+1 (r fois q + 1) et vaut : $\min(r, p) + q \times p$.
Le minimum de la somme des effectifs des p plus gros tas est donc :
$\min(r, p) + q \times p + p \times \dfrac{n + n - p + 1}{2}$.