CONCOURS NATIONAL TUNISIEN DE MATHEMATIQUES A.T.S.M.

Instrument privilégié de motivation des lycéens pour les mathématiques, le **Concours national de mathématiques** organisé par l'**Association Tunisienne des Sciences Mathématiques** (A.T.S.M.) est ouvert aux meilleurs élèves de sixième année du secondaire. Il leur permet de mettre en valeur leur capacité à appréhender les situations nouvelles faisant intervenir les qualités de patience, d'intuition, de finesse et de rigueur.

Le Concours national représente pour l'A.T.S.M. et donc pour les enseignants de mathématiques en Tunisie, un des instruments privilégiés pour évaluer des aspects de l'enseignement des mathématiques, en particulier le degré d' assimilation de certains concepts importants. Il permet également de recenser quelques types d'erreurs de nature à mener les enseignants à changer d'attitude et de comportement pédagogiques dans l' introduction de certaines notions.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

Le concours se déroule chaque année au mois de mai, depuis 1976.
Une préparation des jeunes lauréats est prise en charge par l'ATSM en vue des Olympiades maghrébines et internationales.
L'ATSM organise aussi depuis quelques années les phases tunisiennes (demi-finales et finale nationale) du championnat international des jeux mathématiques FFJM.

ÉPREUVES

Individuelles.
Catégorie : 6^e année du secondaire.
Exercices : Aucun programme officiel, aucune érudition supposée. Les énoncés sont choisis de manière à ce que les candidats puissent utiliser leurs connaissances et les méthodes qu'ils ont acquises en secondaire.

COMPÉTITION

Les élèves sont sélectionnés par établissement.

PARRAINS

Ministère de l'Éducation Nationale de Tunisie.
Revue de l'ATSM : Omar Khayyam

CONTACTS

ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
Bechir Kachoukh
43, rue de la Liberté
2019 Le Bardo
Tunis TUNISIE
Tél : (216) 1 261455
Fax : (216) 568 954

1 - PLUS GRANDE VALEUR

Déterminer la plus grande valeur pour chacun des réels x, y, z, satisfaisant aux conditions suivantes :
$x + y + z = 10$
$xy + yz + zx = 12$.

2 - ANGLES DU TRIANGLE

On désigne par a, b, c les longueurs respectives des côtés [BC], [CA], [AB] d'un triangle (ABC) et par α, β, γ, les mesures en radians des angles BAC, ABC, ACB de ce triangle.

Montrer que si $c^2 = b^2 + ab$ alors $\gamma = 2\beta$.

3 - SUITE D'ENTIERS

Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$f(1) = 3$ et $f(n + m) + f(n - m) = n - m + 1 + \dfrac{f(2n) + f(2m)}{2}$ pour n et m entiers naturels tels que $n = m$.

Montrer que $f(2n) = 4\,f(n) - 2n - 3$.

Soit (V_n) la suite définie par $V_n = f(n) - f(n - 1)$; montrer que (V_n) est une suite arithmétique.

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} V_k$ en déduire $f(n)$ pour n dans $\mathbb{N}$.

4 - TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

Soit (ABC) un triangle équilatéral, tel que $(AB, AC) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$;
D un point de [AB] et E un point de [AC] tels que AD = AE.

On construit les triangles équilatéraux (AEF), (AGB) et (CDH) tels que :
$(AE, AF) = (AG, AB) = (CD, CH) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

1) **Montrer que les droites (EF) et (BG) passent par H.**
2) **Montrer que les milieux respectifs I, J, K des segments [AF], [EH], [GD] sont les sommets d'un triangle équilatéral.**

Solutions

1

PLUS GRANDE VALEUR

On a : $x + y = 10 - z$ et $xy = 12 - z(10 - z)$.
Si on pose X = x ou y on obtient : $X^2 - (10 - z)X + 12 - z(10 - z) = 0$.
$\gamma = -3(z+2)(z - \frac{26}{3})$; $\gamma = 0$ pour $-2 = z = \frac{26}{3}$, d'où $z = \frac{26}{3}$ et $x = y = \frac{2}{3}$
donc l'un des réels peut prendre comme plus grande valeur $\frac{26}{3}$.

2

ANGLES DU TRIANGLE

On a $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\tilde{a} = b^2 + ab$ donc $\cos\tilde{a} = \frac{(a-b)}{2b}$.
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ d'où $c^2 - ab = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ donc
$\cos\beta = \frac{(a+b)}{2c}$.
$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = 2\left(\frac{a+b}{2c}\right)^2 - 1 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - 2c^2}{2c^2} =$
$\frac{a^2 + ab - c^2}{2c^2} = \frac{a^2 - b^2 + b^2 + ab - c^2}{2c^2} = \frac{a^2 - b^2}{2c^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{2(b^2 + ab)} =$
$\frac{(a-b)}{2b} = \cos\gamma$ d'où $\gamma = 2\beta$.

3

SUITE D'ENTIERS

On a f(0) = 1 d'où $2\,f(n) = n + 1 + \dfrac{f(2n) + 1}{2}$ donc $f(2n) = 4\,f(n) - 2n - 3$.

$V_{n+1} - V_n = f(n + 1) - f(n - 1) - 2\,f(n) = n + f(2n) + f(2) - 2\,f(n)$.

$V_{n+1} - V_n = \dfrac{f(2)}{2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{2} - \dfrac{3}{2} = 2$ donc (V_n) est une suite arithmétique de raison 2.

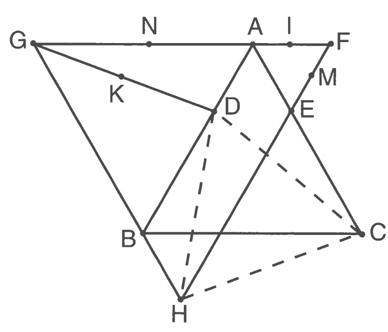
$$\sum_{k=1}^{n} V_k = \frac{n[2V_1 + (n-1)2]}{2} \text{ or } V_1 = f(1) - f(0) = 2$$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} V_k = \frac{n[4 + (n-1)2]}{2}$.

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = n\,(n + 1) = f(n) - f(0) \text{ donc } f(n) = n^2 + n + 1.$$

4

TRIANGLE ÉQUILATÉRAL



Soit $\mathcal{R}\left(C, \dfrac{\pi}{3}\right) : A \to B$ et $D \to H$ d'où AD = BH = AF.

$\widehat{CBH} = \widehat{CAD} = \dfrac{\pi}{3}$ donc (BG) passe par H.

(AE) est parallèle à (BH) et AE = BH donc (HE) est parallèle à (AD) et HEC = AEF $= \dfrac{\pi}{3}$. Donc (EF) passe par H.

Soit M et N les milieux de [EF] et [AG], KN $= \dfrac{1}{2}$ DA $= \dfrac{1}{2}$ AE = IM.

NI $= \dfrac{1}{2}$ (AG + AF) $= \dfrac{1}{2}$ GF $= \dfrac{1}{2}$ HF = MJ.

INK $= \dfrac{2\pi}{3}$ = IMJ d'où IK = IJ et NIK = IJM.

KIJ = π – (NIK + FIJ) = π – [NIK + π – (IFJ – IJF)] $= \dfrac{\pi}{3}$.

Donc le triangle IJK est équilatéral.