OLYMPIADES MATHÉMATIQUES DE PREMIÈRE

Les **Olympiades académiques de mathématiques** ont été créées dans le but de stimuler chez les élèves le goût de l'initiative et de la recherche.

Ce concours est destiné à tous les lycéens de première de toutes séries.

L'inscription se fait auprès des professeurs, sur la base du volontariat.

Les connaissances nécessaires sont basées sur les programmes des classes de collège et de seconde , complétées par les parties communes des programmes des différentes classes de première.

Dans chaque académie, le dispositif est suivi par une cellule, présidée par un responsable désigné par le recteur.

La correction des copies, la mise au point du palmarès académique sont assurés par la cellule académique. La remise des prix fait l'objet d'une cérémonie académique, présidée par le recteur ou son représentant, en faisant appel à des partenaires locaux ou régionaux..

La cellule académique fait parvenir au groupe national les meilleures copies ; le groupe national établit le palmarès national.

La remise des prix nationaux fait l'objet d'une cérémonie organisée en collaboration avec le ministère chargé de l'éducation nationale et différents partenaires associatifs ou privés.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

Créées en novembre 2000 pour les élèves des classes de premières scientifiques et technologiques.
A compter de la session 2005 s'adressent à tous les lycéens de première de toutes séries.

ÉPREUVES

Individuelles.
Durée quatre heures.
Quatre exercices dont deux sont communs à toutes les académies, deux autres sont choisis par la cellule académique.

COMPÉTITION

Une seule épreuve au cours du second trimestre de l'année scolaire

PARTENAIRES

Chaque académie a ses propres partenaires.
Au niveau national :
Editions Belin.

CONTACTS

BO n° 35 du 30/09/2004.
Annales publiées par l'APMEP

1 - LES FOURMIS 2002

Des fourmis se déplacent, en ligne droite, à la queue leu leu, à vitesse constante, en formant une colonne de 50 cm de long.
La dernière fourmi du groupe décide d'aller ravitailler la fourmi chef et pour cela rejoint la tête de la colonne puis, sa mission étant accomplie, retourne aussitôt à la queue de la colonne.

Sachant que, pendant cet aller-retour, la vitesse de cette fourmi est restée constante et que la colonne a parcouru 50 cm, quelle est la distance parcourue par la fourmi ravitailleuse ?

2 - LA TABLE RONDE 2002

10 personnes sont assises autour d'une table ronde.
10 jetons portant les numéros de 1 à 10 sont distribués au hasard à ces 10 personnes.
Chaque personne gagne une somme égale en euros au total du numéro de son propre jeton, de celui de son voisin de gauche et de celui de son voisin de droite.

1) **À l'aide d'un procédé aléatoire de votre choix, donner un exemple de répartition des jetons. Sur cet exemple, indiquer le gain de chaque personne et la moyenne de ces dix gains.**
2) **Prouver que, quelle que soit la répartition des jetons, au moins une des dix personnes aura un gain supérieur ou égal à 17 euros**
3) **Donner un exemple où tous les gains sont inférieurs ou égaux à 18 euros.**
4) **Dans la deuxième question, peut-on remplacer 17 par 18 ?**

3 - PAGES NUMEROTÉES 2003

Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à n (on rappelle que la page numérotée 1 est toujours une page de droite). On additionne les numéros de toutes les pages et on trouve un total égal à 2003. Mais deux pages numérotées sont restées collées et leurs numéros n'ont pas été comptés. **Quel est le nombre de pages du livre et les numéros des pages collées ?**

4 - TABLE À 8 PIEDS 2003

René dispose dans son jardin d'une très grande terrasse carrelée avec de très belles dalles carrées de 0,5 m de côté. Il décide de construire sur cette terrasse une table ronde avec les pieds sur le bord et un parasol central.

René est un bricoleur prévoyant, aussi, pour gagner en stabilité, il décide que la table devra avoir le maximum de pieds, tous solidement fixés dans le sol, tout comme le parasol.

Mais René est aussi un bricoleur soigneux; alors, pour ne pas détériorer les dalles, il choisit de percer la terrasse uniquement aux intersections des joints de séparation.

Si n désigne le nombre de pieds de la table et d son diamère exprimé en mètres, on définit le cofficient de solidité s de la table par la formule $s = n/d$. Une table est donc d'autant plus solide que son coefficient de solidité est élevé.

- **Calculer le coefficient de solidité d'une table à huit pieds.**
- **Quelles sont les deux tables les plus petites ? Préciser leur coefficient de solidité**
- **Quel est le coefficient de solidité maximal d'une table à 12 pieds ?**
- **Quelle est la table la plus solide ?**
- **René peut-il fabriquer une table à 16 pieds dont le diamètre exprimé en mètres est un nombre entier ?**

Solutions

1

LES FOURMIS

Soit v la vitesse de la colonie de fourmis en cm par seconde, V la vitesse de la fourmi, t_1 le temps aller de la fourmi en secondes et t_2 le temps retour.
La distance aller est : $d_1 = Vt_1 = vt_1 + 50$.
La distance retour est : $d_2 = Vt_2 = 50 - vt_2$
On en déduit $t_1 = \frac{50}{V} - v$ et $t_2 = \frac{50}{V} + v$
On a donc : $50 = \frac{50}{V-v} + \frac{50}{V+v}$ et, en posant $\frac{X = V}{v}$ on a :
$X^2 - 2X - 1 = 0$ d'où $V = (1 + \sqrt{2})v$
La distance parcourue est 50 $(1 + \sqrt{2})$ cm.

2

AUTOUR DE LA TABLE RONDE

1. La somme des gains est égale à $3 \infty (1 + 2 + \dots + 10) = 165$. La moyenne des dix gains est donc égale à 16,5.
2. Si tous les gains étaient inférieurs ou égaux à 16, leur somme serait inférieure ou égale à 160. Le gain est au moins supérieur ou égal à 17.
3. On peut construire une répartition pour laquelle tous les gains sont inférieurs ou égaux à 18 : on répartit les jetons de 2 à 10 par groupes de trois ; chaque groupe de trois doit avoir une somme égale à 18.
   On examine alors les partitions de 18 en trois entiers distincts inférieurs ou égaux à 10 :
   $10 + 6 + 2$; $10 + 5 + 3$; $9 + 7 + 2$; $9 + 6 + 3$; $9 + 5 + 4$; $8 + 7 + 3$; $8 + 6 + 4$; $7 + 6 + 5$.
   Le choix de $10 + 6 + 2$ impose pour les deux autres sommes $9 + 5 + 4$ et $8 + 7 + 3$
   Le choix de $10 + 5 + 3$ impose pour les deux autres sommes $9 + 7 + 2$ et $8 + 6 + 4$.
   Dans chaque cas on peut fabriquer plusieurs solutions.
   Dans ce cas les gains sont :17, 18, 17, 16, 18, 17, 15, 18, 11, 18.
4. En isolant le 1 et en répartissant 3 par 3 les autres jetons, la somme de tous les jetons serait au maximum égale à $1 + 3 \infty 17 = 52$ ce qui est impossible car $1 + 2 + \dots + 10 = 55$. Il y a donc au moins un gain supérieur ou égal à 18.

3

PAGES NUMEROTÉES

Soit n le nombre de pages du livre. Les pages collées sont une page de gauche de numéro pair $2p$ et une page de droite de numéro $2p + 1$. Donc la somme de tous les nombres de 1 à n, hormis $2p$ et $2p + 1$, est égale à 2 003, soit : $\frac{n(n+1)}{2} - (4p + 1) = 2\,003$ **(1)**

Or, $2 = 2\,p < n$ d'où $5 = 4p + 1 < 2n + 1$, ce qui amène à :

$\frac{n(n+1)}{2} - (2n + 1) < 2\,003 < \frac{n(n+1)}{2} - 5$.

Cette double inégalité conduit aux deux inéquations :

$n^2 - 3n - 4\,008 < 0$ **(2)**

Et $n^2 + n - 4\,016 = 0$ **(3)**

(2) donne $n < 64{,}8$ et **(3)** donne $n > 62{,}9$.

n étant entier on a $n = 63$ ou $n = 64$.

Si $n = 63$, on trouve $p = 3$ et si $n = 64$, on trouve $p = 19$.

Ou bien le livre a 63 pages et les pages 6 et 7 sont collées, ou bien le livre a 64 pages et les pages 38 et 39 sont collées.

4

TABLE À 8 PIEDS

On choisit comme repère orthonormal le repère de centre O le centre de la table et d'unité la longueur du carreau du quadrillage (0,5 m).

1. On a $R = \sqrt{1{,}25}$ donc $s = \frac{8}{2\sqrt{1{,}25}} = 3{,}58$ environ.
2. Les deux plus petites tables ont pour diamètres respectifs en mètres 1 et $\sqrt{2}$. Si $d = 1$, la table a quatre pieds d'où $s = 4$. Si $d = \sqrt{2}$ la table a encore quatre pieds d'où $s = 2\sqrt{2}$.
3. La table à 12 pieds la plus solide est la plus petite car, si N est constant, $s = s'$ équivaut à $d = d'$. La plus solide est celle de diamètre 5 mètres et son coefficient de solidité maximum est 12 pieds est 2,4.
4. On peut montrer que pour toutes les tables, sauf la plus petite, $s < 4$. La table la plus solide est donc la plus petite...
5. Quand le rayon est un nombre entier, il y a 4 pieds sur les axes. Donc, si une table à 16 pieds a un diamètre en nombre entier, on doit avoir 3 pieds par quart de table sur des intersections de joints. Pour des raisons de symétrie il doit y avoir un pied sur la première bissectrice. Dans ce cas, on a $R^2 = 2a^2$, où a est un nombre entier ou décimal, et donc $d = 2 \times \sqrt{2} \times a$, avec $2a$ entier. Ceci contredit le fait que le diamètre est un entier. René ne pourra pas construire une table à 16 pieds dont le diamètre est un entier.