RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE

Le Rallye Mathématique d'Alsace est créé en 1973 par le Professeur GLAESER de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg. Il s'inspire des Olympiades Internationales et constitue la première épreuve de ce genre en France.
Il s' adresse à tous les élèves volontaires des Premières et Terminales scientifiques d'Alsace et de quelques lycées à l'étranger (Baden-Baden, Freiburg, Saarbrücken, Wien, ...). Les deux compétitions ont lieu durant le printemps.
Les élèves concourent par binômes et sont confrontés pendant quatre heures à trois exercices faisant appel à l'intuition, l'imagination, l'originalité, la rigueur scientifique et la clarté de l'exposé.
Le rapport du Rallye Mathématique d'Alsace, publié chaque année, regroupe les sujets, les corrigés, le palmarès, les remarques et les idées originales rencontrées dans les copies. Distribué à tous les enseignants de mathématiques de l'académie, il peut, par ses remarques pédagogiques, servir de support à des mathématiques innovantes.
Le Comité Organisateur réunit au sein de l'IREM de Strasbourg cinq membres, enseignants du Supérieur et du Secondaire.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

- Créé en 1973, le Rallye Mathématique d'Alsace est le premier rallye régional ayant existé en France.
- 2004 : le 31^{e} Rallye réunit 1 100 élèves de Première et de Terminale.

Environ 60 ont été primés.
Le Rallye est organisé à l'initiative de l'IREM de Strasbourg avec le soutien du Rectorat, de l'Université Louis Pasteur (Strasbourg I) et du Département de Mathématiques.

ÉPREUVES

Deux catégories : élèves de Première et de Terminale. Les élèves sont groupés par deux et ont à leur disposition une salle de classe pour une durée de quatre heures.

COMPÉTITION

Deux épreuves (une par niveau) : les élèves concourent par binômes. Palmarès : au courant du mois de Juin, cérémonie présidée par Monsieur le Recteur de l'Académie de Strasbourg.

PARTENAIRES

Collectivités locales :
Conseil Régional d'Alsace,
Conseil Général du Bas-Rhin,
Municipalités.
Quelques entreprises privées.
Régionale de I'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques), ...

CONTACTS

Madame Claudine KAHN - IREM de Strasbourg
7, rue René Descartes 67084 STRASBOURG cedex
Tél. : 03 90 24 01 30
Fax : 03 90 24 01 65
E-mail : irem@math.u-strasbe.fr
http ://irem.u-strasbg.fr

1 - MÊME AIRE

1re 2002

Soit ABC un triangle et I le milieu de [AC]. Soit M un point quelconque de [IC].
Où placer le point P sur [AB] pour que (MP) partage le triangle ABC en deux parties de même aire ?

2 - CASSETTE PIRATÉE

1re 2002

Trois pirates ont dérobé une cassette remplie de louis d'or. Ils attendent le lendemain matin pour se partager le butin.
Durant la nuit, l'un des pirates se lève sans bruit, ouvre la cassette, jette à la mer un louis d'or pour honorer Lucile, Sainte Patronne des Pirates, et peut partager le reste en trois parties égales. Il empoche la sienne et remet les deux autres dans la cassette. Les deux autres pirates reproduisent tour à tour le même scénario.
Au lever du jour, nos trois compères ouvrent ensemble la fabuleuse cassette, offrent un louis d'or à Lucile et se partagent le butin restant en trois parts égales.
Quel est le nombre minimum de louis d'or contenus initialement dans la cassette ?

3 - GRAINS DE RIZ

1re 2003

Tout le monde connaît l'anecdote de ce roi qui s'engagea à récompenser l'inventeur du jeu d'échec selon ses souhaits, alors que celui-ci demandait à ce qu'on lui donne un grain de riz pour la première case de l'échiquier, deux grains de riz pour la seconde, quatre pour la troisième, et ainsi de suite en doublant le nombre de grains de riz à chaque case, jusqu'à la 64^e.
On connaît moins la façon dont le roi se tira de cette situation : il exigea de ses sept seigneurs qu'ils fournissent chacun une part égale de la récompense arrondie au grain de riz inférieure. Lui-même se contenterait de fournir les grains de riz nécessaires pour faire le compte exact.
Combien le roi dut-il fournir de grains de riz ?

4 - SUPPRESSION

Tale 2003

On considère la somme : S = 1 + 2 +…..+ 30.
Dans cette somme on supprime un certain nombre de signes « + ». Par exemple 2 + 3 est remplacé par 23 ou 2 + 3 + 4 par 234, pour obtenir une nouvelle somme S'.
Quel est le nombre minimal de signes « + » à supprimer pour obtenir une somme S' valant 3030 ?

1

MÊME AIRE

Menons par I la parallèle à la droite (MB). Elle rencontre le côté AB en un point P. Le triangle APM est réunion des triangles API et IPM (en particulier, l'aire de APM est la somme des aires de API et IPM). Et l'aire du triangle IPM est elle-même égale à l'aire du triangle IPB (les deux triangles ont la même base (IP) et leurs sommets M et B sont situés sur une parallèle à (IP)). Or la réunion des triangles API et PIB constitue le triangle ABI. Et puisque I est le milieu de [AC], l'aire du triangle ABI est la moitié de celle du triangle ABC. Finalement, l'aire du triangle APM est la moitié de celle du triangle ABC.

2

CASSETTE PIRATÉE

L'ultime somme contenue dans la cassette est de la forme $1 + 3x$, où x est un nombre entier supérieur ou égal à 1. Remontons les étapes successives de l'évolution subie par le contenu de la cassette.

- Le contenu que le pirate 3 avait trouvé était $1 + (1 + 3x) \times \frac{3}{2}$, c'est à dire en réduisant : $\frac{5 + 9x}{2}$.
- Le contenu que le pirate 2 avait trouvé était $1 + (\frac{5 + 9x}{2}) \times \frac{3}{2}$, c'est à dire en réduisant : $\frac{9 + 27x}{4}$.
- Le contenu initial, trouvé par le pirate 1, était $y = 1 + (\frac{19 + 27x}{4}) \times \frac{3}{2}$, c'est à dire en réduisant : $\frac{y = 65 + 81x}{8}$.

Ce contenu initial y doit être entier. On obtient l'équation en nombres entiers : $8y - 81x = 65$. Remarquant que $8 \times 10 - 81 = -1$, nous obtenons (en multipliant par -65) la solution particulière suivante de l'équation : $y = -650$ et $x = -65$, à partir de laquelle la solution générale s'écrit : $y = -650 + 81k$ et $x = -65 + 8k$.
Cette résolution a été envisagée jusqu'à présent pour les entiers relatifs sans considération de signes. Il convient à présent de prendre en compte le fait que l'on cherche des entiers positifs. La plus petite valeur de k qui convienne pour cela est $k = 9$, qui conduit à $x = 7$ et $y = 79$, qui est la réponse cherchée.

3

GRAINS DE RIZ

La somme de trois puissances consécutives de 2 est un multiple de 7. En effet, une telle somme s'écrit : $2^a(1 + 2 + 4) = 7 \times 2^a$.
Or $64 = 21 \times 3 + 1$. Ainsi, dans la somme des 64 puissances de 2 depuis $2^0 = 1$ jusqu'à 2^{63}, on peut former 21 groupes distincts de trois puissances de 2 consécutives, dont la somme est un multiple de 7, et il en reste alors une isolée. Le plus simple est de procéder à ces groupements en remontant de la fin (2^{63}) vers le début, ce qui amène à prendre en compte toutes les puissances de 2 en jeu sauf la première, à savoir $2^0 = 1$. Le reste dans la division par 7 de $1 + 2 + ... + 2^{63}$ est ainsi mis en évidence : il est égal à 1.
Le nombre de grains de riz fournis par les seigneurs étant le multiple de 7 immédiatement inférieur à la somme considérée, il ne manque donc qu'un unique grain de riz que le roi doit fournir.

4

SUPPRESSION

On a $1 + 2 + 3 + ... + 28 + 29 + 30 = 30 \leftrightarrow \frac{31}{2} = 465$.

Dans la somme $S = 1 + 2 + 3 + ... + 28 + 29 + 30$, faire disparaître un signe « + » situé devant un nombre à 1 chiffre revient à multiplier par 10 la valeur du nombre précédent, et faire disparaître un signe « + » situé devant un nombre à 2 chiffres revient à multiplier par 100 la valeur du nombre précédent. Notons a l'entier qui précède le signe « + » que l'on fait disparaître. On change S en $S + 9a$ ou en $S + 99a$ dans le second.
Avec $a < 9$, $S + 9a < 3\ 030$, ne peut pas convenir. Si $S + 99a = 3\ 030$, $99a = 2\ 565$. Comme 2565 n'est divisible par 11, il n'y a pas de solution.
Faisons disparaître deux signes « + » dans S. On peut exclure la disparition de deux signes « + » voisins, car alors le résultat atteint serait ou bien trop petit, ou trop grand. Pour deux signes « + » non voisins, il suffit de considérer $S + 9a + 99b$, avec $a < 9$ et $b > 8$. En effet, pour $S + 9a + 9b$, avec a et b inférieurs à 9, la valeur atteinte serait trop petite et pour $S + 99a + 99b$, avec a et b au moins égaux à 9, on retomberait sur l'objection précédente de non-divisibilité par 11.
L'égalité $S + 9a + 99b = 3\ 030$ revient à $9a + 99b = 2\ 565$. Or la division euclidienne de 2 565 par 99 s'écrit : $2\ 565 = 25 \leftrightarrow 99 + 90$.
Même si l'on prend la plus grande valeur possible pour b, soit $b = 25$, la valeur qu'il faudrait affecter à a serait égale à 10, qui dépasse la plus grande valeur autorisée, à savoir 8.
Pour la disparition de 3 signes « + », l'étude précédente fournit une réponse, en remplaçant a par $a_1 + a_2$, avec $a_1 < 9$, $a_2 < 9$ et $a_1 + a_2 = 10$.
Et cette fois-ci, on aboutit à des solutions acceptables. avec b = 25.