TOURNOI DES VILLES

Le **Tournoi des Villes** est un tournoi mathématique pour les élèves de la quatrième à la terminale. Ce tournoi a démarré en Russie en 1980 et est devenu réellement international depuis. Aujourd'hui, plus de 100 villes dans 20 pays différents en Europe de l'Est et de l'Ouest, en Amérique du Nord et du Sud, en Asie et en Australie y participent. Ce tournoi se déroule en deux temps (une version d'automne et une version de printemps) et le meilleur des deux résultats est conservé pour établir le classement. Évidemment, rien n'empêche un candidat de ne venir qu'à une seule des deux épreuves.

Les sujets sont les mêmes dans tous les pays où le tournoi est organisé. Pour chacune des deux catégories d'âge (de la quatrième à la seconde et de la première à la terminale), deux versions de l'épreuve sont proposées (la version normale qui dure 4 heures et la version difficile qui dure 5 heures). La difficulté des problèmes est assez variée et on ne conserve, pour chaque candidat, que les points des trois problèmes les mieux réussis ce qui permet à chacun de concourir à son niveau. Le score final est affecté d'un coefficient suivant la classe effective du participant. Les démonstrations sont demandées.

Le tournoi est organisé à Paris, Lyon et Nancy pour l'instant. Un de nos objectifs est de l'organiser plus largement en France avec des collaborateurs locaux.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

- 1980 : Première organisation du tournoi à Moscou, Leningrad et Riga.
- 1984 : Le tournoi est soutenu par l'académie des sciences d'URSS et devient international.
- 1988 : Première participation « occidentale » : Toronto.
- 1998 : Première participation de Paris.
- 2003 : Création d'une association et première participation de Lyon et Nancy.

ÉPREUVES

Individuelles
Catégories : 2 (quatrième, troisième, seconde et première, terminale)
Niveaux : 2 (normal et difficile, au choix du candidat)
Problèmes : 5 à 7 en quatre ou cinq heures (seuls les trois les mieux réussis comptent) dont les solutions doivent être rédigées.

COMPÉTITION

Version d'automne : un dimanche matin en octobre ou en novembre.
Version de printemps : un dimanche matin en février ou en mars.

CONTACTS

Tournoi des Villes
36, rue de Picpus
75012 Paris

site web : http://www.tournoidesvilles.fr
e-mail : infos@tournoidesvilles.fr

1 - POLYGONE

4^e, 3^e, 2^{nde} ; épreuve normale ; automne 2002 ; 4 points

Dans un polygone convexe à 2 002 côtés, on trace certaines diagonales, qui ne se coupent pas à l'intérieur du polygone. Ce dessin décompose le polygone en 2 000 triangles.

Est-il possible qu'exactement la moitié de ces triangles aient leurs trois côtés qui soient des diagonales ?

2 - SUCCESSEUR

1^e, t^{ale} ; épreuve norm^{le} ; aut^{ne} 2002 ; 5 points

On considère une suite infinie de nombres entiers positifs telle que le successeur x' de x est obtenu en ajoutant à x l'un de ses chiffres non nuls.

Montrer que dans cette suite apparaît nécessairement un nombre pair.

3 - BOTANIQUE

4^e, 3^e, 2^{nde} ; épreuve difficile ; aut^{ne} 2002 ; 5 points

Toutes les espèces de plantes en Russie ont été numérotées par les nombres de 2 à 20 000 (chaque nombre est utilisé une et une seule fois). Pour chaque paire d'espèces différentes le plus grand commun diviseur de leurs numéros a été retenu, tandis que les numéros eux-mêmes ont été perdus (suite à une défaillance dans l'ordinateur).

Peut-on rétablir les numéros de toutes les espèces ?

4 - PORTEFEUILLE

4e, 3e, 2nde ; épreuve normle ; printemps 2003 ; 4 points

On place 2 003 euros dans des portefeuilles et ces portefeuilles sont placés dans des poches. On sait que le nombre d'euros dans chaque poche est strictement inférieur au nombre total de portefeuilles.

Existe-t-il forcément un portefeuille qui contienne strictement moins d'euros qu'il n'y a de poches ?

5 - PARALLÉLÉPIPÈDE

2nde ; version normle ; autne 2003 ; 3 points

Chacune des faces d'un parallélépipède rectangle dont les côtés sont de longueur 3, 4 et 5 est divisée en carrés unité.

Peut-on écrire un nombre dans chacun de ces carrés de telle sorte que la somme des nombres dans chaque anneau de carrés (d'un carré de large) encerclant le parallélépipède soit égale à 120 ?

6 - DÉCOMPOSITION

1e, tale ; version diffle ; autne 2003 ; 4 points

Démontrez que tout entier strictement positif peut s'écrire sous la forme :
$3^{u_1} \times 2^{v_1} + 3^{u_2} \times 2^{v_2} + \ldots + 3^{u_k} \times 2^{v_k}$
où $u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k$ sont des entiers vérifiant $u_1 > u_2 > \ldots > u_k \geq 0$ et $0 \leq v_1 < v_2 < \ldots < v_k$.

1

POLYGONE

Tout triangle a au plus deux côtés qui sont des bords du polygone ; comme le polygone a 2 002 côtés, on en déduit qu'au moins 1 001 triangles ont au moins un côté qui est un bord du polygone, donc on en a au plus 999 dont tous les côtés sont des diagonales.

2

SUCCESSEUR

Tout d'abord, regardons la même suite où l'on a enlevé le dernier chiffre de chaque terme. Cette suite augmente au plus de 1 à chaque étape et tend vers l'infini (car la suite de départ tend vers l'infini) donc elle parcourt tous les nombres plus grands que le nombre de départ.
A un moment, elle passera donc par un nombre constitué uniquement de chiffres impairs. Revenons à la suite originale : à ce moment là, elle n'aura que des chiffres impairs, sauf peut-être le dernier ; soit ce dernier chiffre est pair et c'est gagné, soit il est impair et le prochain nombre de la suite sera forcément pair.

3

BOTANIQUE

On ne peut pas retrouver tous les numéros des plantes : par exemple, les deux nombres 8 192 = 213 et 16 384 = 214 ne sont pas différenciables à partir des plus grands communs diviseurs. En effet, tous les autres nombres ont comme plus grand commun diviseur avec ces deux là la plus grande puissance de 2 les divisant (car à part 16 384, il n'y a pas de multiple de 214 inférieur à 20 000). Par ailleurs, ce n'est pas leur plus grand commun diviseur qui va les départager.
Remarquons que c'est aussi vrai avec tous les nombres premiers entre 10 000 et 20 000, mais pour que la réponse soit exacte, encore faut-il démontrer qu'il existe deux nombres premiers entre 10 000 et 20 000.

Solutions

4

PORTEFEUILLE

Soit m le nombre de portefeuilles et n le nombre de poches. Par hypothèse, il y a strictement moins d'euros dans chaque poche que de portefeuilles au total ; en faisant la somme sur toutes les poches, on trouve que $2\,003 < mn$. Si jamais tous les portefeuilles contenaient au moins autant d'euros qu'il y a de poches, on aurait, en calculant la somme sur tous les portefeuilles, $2\,003 = mn$. Cela contredit l'inégalité précédente, donc il existe au moins un portefeuille contenant strictement moins d'euros qu'il n'y a de poches.

5

PARALLÉLÉPIPÈDE

On va montrer que c'est possible même en imposant que sur chaque face le nombre écrit soit toujours le même. Pour faire cela, notons a le nombre sur la face 3×4, b celui sur la face 3×5 et c sur la face 4×5. Pour que tout fonctionne il faut que $4a + 5b = 3a + 5c = 3b + 4c = 120$. Or ceci est vrai si $a = 10$, $b = 16$ et $c = 18$.

6

DECOMPOSITION

On va montrer cela par récurrence (forte) sur le nombre n que l'on veut décomposer.

Le cas $n = 1$ est évident ($1 = 3^0 \times 2^0$).

Supposons que le résultat est vrai pour tout nombre strictement inférieur à n et montrons le pour n. Pour cela, distinguons deux cas :

- Si $n = 2m$ est pair, on applique l'hypothèse de récurrence à m puis on ajoute 1 à chacun des v_k.
- Si n est impair, on note u_1 le plus grand entier tel que $3^{u1} = n$; bien sûr, $n - 3^{u1}$ est pair donc on peut écrire $n = 3^{u1} \times 2^0 + 2 \times m$. On applique alors l'hypothèse de récurrence à m puis en ajoutant 1 à chaque v_k, on obtient une décomposition de n grâce à l'égalité précédente. Il suffit, pour montrer que cette décomposition est valide de montrer que $u_1 > u_2$. Mais, si cela n'était pas le cas, on aurait $n = 3^{u1} \times 2^0 + 2 \times m \geq 3^{u1} \times 2^0 + 2 \times 3^{u2} \geq 3^{u1} \times 2^0 + 2 \times 3^{u1} = 3^{u1}+1$ ce qui contredit le fait que l'on a choisit le plus grand u_1 possible.