TOURNOI MATHÉMATIQUE DU LIMOUSIN

Le Tournoi, qui s' adresse aux élèves de quatrième et aux lycéens, travaillant par équipe de deux, obtient la participation de tous les lycées et de plus de trois collèges. sur quatre dans les trois départements de la Région : Corrèze, Creuse et Haute-Vienne.
Développer le goût de la recherche scientifique, promouvoir l'image des mathématiques auprès des jeunes et du grand public, tels sont ses objectifs.

La remise des prix, grande fête des mathématiques et des jeunes a lieu au printemps. Un grand nombre de jeunes de toutes sections y sont récompensés.

FICHE TECHNIQUE

HISTORIQUE

Le Tournoi Mathématique du Limousin, association « loi 1901 », a été créé en 1987 par la Régionale de Limoges de l'APMEP, le département de Mathématique de la Faculté des Sciences de Limoges, l'Inspection Pédagogique Régionale, l'IREM de Limoges. Cinq mille élèves de quatrième et deux mille lycéens environ participent au Tournoi Mathématique du Limousin en 2003.

ÉPREUVES

Par équipe de 2.
Catégories : 4^e et 2^{nde}/ 1^{re} / t^{ale}.
Les textes proposés, sous forme ludique, donnent envie de chercher, nécessitent une solution rédigée et sont susceptibles de prolongement.

COMPÉTITION

Épreuve 4^e en janvier (2 heures durant le temps scolaire).
Épreuve en lycée en janvier (3 heures durant le temps scolaire).
Remise des prix au printemps, dans le grand amphithéâtre de la Faculté de Droit à Limoges.

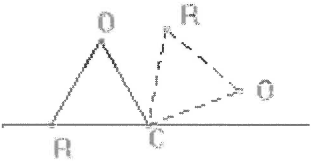
PARTENAIRES

Rectorat ;
Conseil Régional du Limousin ;
Conseils Généraux de Corrèze, Creuse et Haute-Vienne ;
CASDEN Banque populaire.
Editions BELIN
Calculatrices CASIO.

CONTACTS

Tournoi Mathématique du Limousin:
IREM 123, av. Albert Thomas 87060 Limoges CEDEX
tel : 05 55 45 72 49
Anne Bellido

1 - ROC AND ROLL
Collège 2002



Un triangle équilatéral ROC, de côté 4 cm, « roule » sur une droite.
Dans sa position initiale, R et C sont sur la droite. On fait basculer le triangle autour de C pour amener le point O sur la droite ; puis on le fait basculer autour de O pour amener R sur la droite et on continue, toujours dans le même sens …

Dessiner le trajet parcouru par le point R pendant trois basculements.
Combien de basculements faut-il effectuer pour que la longueur du trajet parcouru par R dépasse 2002 cm ?

2 - CHAÎNE NUMÉRIQUE
Collège 2003

Classez les entiers de 1 à 15 de sorte que la somme de deux nombres placés côte à côte soit toujours le carré d'un entier.

3 - X FACE À 10
Lycée 2003

Des personnes numérotées de 1 à n sont placées dans cet ordre autour d'une table ronde et sont régulièrement espacées.
La personne portant le numéro x est en face de la personne portant le numéro 10.

Si x = 2, quel est le nombre de personnes ?
Si x = 25, quel est le nombre de personnes ?
Peut-on remplacer x par n'importe quel autre nombre ?

4 - MÉMOIRES VIVES Lycée 2002

Marcel aimerait prendre sa revanche dans le jeu qui l'a opposé à Rémi il y a quelque temps.
Dans chaque partie de ce jeu, le vainqueur gagne un certain nombre de points, ils ne savent plus combien, mais c'est toujours le même à chaque partie et son adversaire perd un certain nombre de points, ils ne savent plus non plus combien, mais c'est encore toujours le même à chaque partie.
Cependant ils n'ont pas tout oublié : ils se souviennent que les points gagnés ou perdus sont des nombres entiers, qu'il ne peut pas y avoir de partie nulle et qu'après plusieurs parties, Rémi avait battu Marcel par 10 points contre 3.

Aidez-les à retrouver le nombre de points qu'on peut gagner et le nombre de points qu'on peut perdre à chaque partie de ce jeu.

5 - PLUS OU MOINS CARRÉ Lycée 2003

On observe que :

$$2 = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2$$

$$4 = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$$

Écrivez une égalité analogue pour les entiers $n = 5$, $n = 6$, $n = 11$ (on part de 12 puis on ajoute ou on retranche les carrés d'entiers consécutifs de façon à obtenir n).
Écrivez ainsi 2003 avec le minimum de carrés.

Montrez que si l'on peut ainsi écrire n avec k carrés, on peut écrire $n + 4$ avec $k + 4$ carrés. Prouvez alors que tout entier n ($n > 7$) peut s'écrire avec au maximum n carrés.

Solutions

1

ROC AND ROLL ...

Au bout de trois basculements, le point R se trouve en R_3 sur la droite. Il a parcouru successivement les arcs RR_1 et R_1R_2 qui sont chacun un tiers de cercle de rayon 4 cm.
La longueur du trajet parcouru en 3 basculements est : $\frac{2}{3} \times \pi \times 8$.
Pour arriver à un trajet de 2 002 cm il faut :
$2002 \div \left(\frac{2}{3} \times \pi \times 8\right)$ séries de 3 basculements, soit environ 119,48.
Après 119 séries de 3 basculements, soit 357 basculements la distance est inférieure à 2002 cm et le point R se trouve sur la droite. Avec un basculement supplémentaire la longueur du trajet du point R vaut 2002,24 cm. Il faut donc **358 basculements** pour que la longueur du trajet parcouru par le point R dépasse 2002 cm

2

CHAÎNE NUMÉRIQUE

Les nombres que l'on peut mettre à côté de 1 sont 3, 8 et 15 parce que :
$1 + 3 = 4 = 2^2$ $1 + 8 = 9 = 3^2$ $1 + 15 = 16 = 4^2$.
Voici les « voisins » possibles dans la chaîne de chacun des nombres de 1 à 15 :

nombres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
voisins possibles	3 8 15	7 14	1 6 13	5 12	4 11	3 10	2 9	1	7	6 15	5 14	4 13	3 12	2 11	1 10

On remarque que 8 et 9 ont un seul voisin donc ils doivent se trouver à chaque extrémité de la chaîne.Plaçons par exemple le 8 en début de chaîne et le 9 en fin.
Après le 8 on ne peut mettre que le 1, avant le 7 on ne peut mettre que le 2 ; on continue de droite à gauche à partir du 2 où il n'y a qu'un choix possible à chaque fois. A gauche du 3 on ne peut pas mettre le 1 qui est déjà placé donc on choisit 6 et on termine en ayant chaque fois un seul choix jusqu'au 1 :

8 ~1 ~15 ~ 10 ~ 6 ~ 3 ~ 13 ~ 12 ~ 4 ~ 5 ~ 11 ~ 14 ~ 2 ~ 7 ~ 9.

3

X FACE A 10

SI $x = 2$, il y a **16 personnes** en tout et si $\boldsymbol{x = 25}$, **30 personnes**. On peut remplacer x par tout entier non nul tel que $\mathbf{x \leq 5}$ **ou** $\mathbf{x \geq 20}$.

4

MÉMOIRES VIVES

Dans chaque partie du jeu, le vainqueur gagne a points (a entier positif) et son adversaire perd b points (b entier positif). Désignons par x le nombre de parties gagnées par Rémi et donc perdues par Marcel, et par y le nombre de parties perdues par Rémi et donc gagnées par Marcel.
Rémi obtient $(ax - by)$ points et Marcel obtient $(ay - bx)$ points. On sait que Rémi a battu Marcel par 10 points contre 3 donc : $ax - by = 10$ et $ay - bx = 3$.
En additionnant et en retranchant ces deux égalités, on obtient :
$(a - b)(x + y) = 13$ et $(a + b)(x - y) = 7$.
$(a + b)$ est un diviseur positif de 7 et $(a - b)$ est un diviseur positif de 13 car $x + y$ est positif ; $(a + b)$ est donc égal à 1 ou 7 et $(a - b)$ est égal à 1 ou 13.
Si b est nul, $a + b = a - b = a$, donc $a = 1$; $x = 10$ et $y = 3$, ce cas est acceptable.
Si b est non nul, $(a + b)$ est supérieur strictement à $(a - b)$; donc $(a + b) = 7$ et $(a - b) = 1$; $2a = 8$ et $2b = 6$; $a = 4$ et $b = 3$.
Pour $a = 4$ et $b = 3$, on obtient $(x + y) = 13$ et $(x - y) = 1$, $x = 7$ et $y = 6$.
Rémi a gagné 7 parties et perdu 6 parties.
À chaque partie, on peut gagner 4 points ou perdre 3 points.

5

PLUS OU MOINS CARRÉ

On vérifie que $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2 = 2$ et $1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 = 4$.
On a aussi $1^2 + 2^2 = 5$ et $1^2 - 2^2 + 3^2 = 6$ et $1^2 - 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 = 11$.
On peut remarquer que si dans la somme $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, on remplace certains signes « + » par des signes « – », on obtient un nombre inférieur. De plus, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 17^2 = 1785$ donc 2003 s'écrit avec plus de 17 carrés ; on a aussi $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 18^2 = 2\,109$ donc 2 003 s'obtient en remplaçant dans cette dernière somme certains signe « + » par des signes « – ».
Si on replace 2^2 par -2^2 et 7^2 par -7^2 la somme diminue de $2 \times 4 + 2 \times 49 = 106$; or $2\,109 - 106 = 2\,003$.
Donc $\mathbf{2\,003 = 1^2 - 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2}$.
On montre en développant que : $(k + 1)^2 - (k + 2)^2 - (k + 3)^2 + (k + 4)^2 = 4$.
Donc si n peut s'écrire avec k carrés, $n + 4$ peut s'écrire avec $k + 4$ carrés.
Les décompositions de 4, 5 et 6 permettent d'affirmer que 8 peut s'écrire avec huit carrés , 9 avec six carrés, 10 avec sept carrés ; donc si n est l'un des nombres 8, 9, 10, 11 alors n peut s'écrire avec au maximum n carrés. En ajoutant 4 éventuellement plusieurs fois à ces entiers, on peut obtenir tout autre entier supérieur, et d'après ce qui précède, **tout entier *n*** ($n > 7$) peut s'écrire avec **au maximum *n* carrés**.