CONCOURS ALKHAWARICHTI

REGIONALE de LILLE

PRESENTATION :

Le concours Alkhawarichti a été créé en novembre 2009 par la Régionale de Lille de L'APMEP afin d'accompagner l'introduction de l'algorithmique en classe de Seconde.
Le comité organisateur souhaitait également permettre aux élèves de découvrir l'histoire des mathématiques et des mathématiciens, la grande histoire comme les petites histoires sous forme de devinettes rédigées en quatrains.
Le concours Alkhawarichti propose en 2009-2010 cinq "ch'tis quatrain" et deux"ch'tis calculs" en moyenne tous les mois. Pour être résolus, les quatrains nécessitent l'utilisation des ressources historiques et internet disponibles (chronomath.fr, wikipedia.fr…).
Les ch'tis calculs nécessitent la mise en place d'une programmation, d'un algorithme, à l'aide d'une machine ou d'un ordinateur. Ces calculs s'inspirent des calculs proposés par le Projet Euler : http://projecteuler.net/.

Chacun des défis est accessible pendant les six mois de la durée du concours (du 1er novembre au 30 avril) et les réponses (toutes sous forme numérique) peuvent être proposées à tout moment ; elles peuvent d'ailleurs être testées sur le site du concours :
http://defiapmep.free.fr/calculs/index.html.

Ce concours est proposé aux élèves des lycées de l'Académie de Lille, grâce aux enseignants qui diffusent l'information auprès de leurs élèves. La Régionale de Lille suggère aux enseignants d'amorcer le concours par un exemple travaillé collectivement, en groupe, en devoir...
Le blog de la Régionale diffuse les défis sur

http://maths5962.blogspot.com/2010/11/alkhawarichti-saison-2-episode-1.html

et quelques conseils sur

http://maths5962.blogspot.com/2010/11/conseils-pour-le-concours.html.

En novembre 2010, pour la deuxième édition, le comité organisateur a souhaité compléter la richesse des défis. Ainsi, certains *ch'tis calculs* seront des calculs complexes, n'utilisant pas d'algorithme pour leur résolution et dont l'idée se rapproche plus des Olympiades.

FICHE TECHNIQUE

Historique :
2009-2010 : Création du concours Alkhawarichti
30 défis *les ch'tis quatrains*
14 défis *les ch'tis calculs*
26 participants ayant envoyé de bonnes réponses (le système de vérification des réponses ne nous permet pas de savoir combien d'élèves ont réellement participé à ce concours).

2010-2011 : deuxième saison du concours
30 défis l*es ch'tis quatrains*
6 défis *les ch'tis calculs*
6 défis *géométriques*

Epreuves :
Individuelles
Catégories : lycéens de l'Académie de Lille

Problèmes à réponse numérique (de culture mathématique, algorithmique ou de calculs plus complexes type Olympiades)

Parrains :
IREM de Lille et UFR de mathématiques de l'USTL, Lille 1

Compétitions :
- Difficulté progressive des défis au long de l'année
- Défis diffusés de manière mensuelle
- Possibilité de répondre entre le 1er novembre et le 30 avril à chacun des défis précédemment diffusés.

Contacts :
Informations, défis, formulaire de réponses et règlement :

http://defiapmep.free.fr/

apmep.lille@laposte.net

Un ch'ti Quatrain (facile) : Spirale

Enoncé :

Membre d'une éminente famille de Bâle,
Géométrie, analyse, probabilités, de tout je tâte.
Sur ma tombe est gravée une spirale,
Mais la plus connue est ma lemniscate.

Qui suis-je ? Additionne mes années de naissance et de mort et donne le résultat sous la forme d'un nombre de quatre chiffres.

Solution :

Une recherche par mots-clé avec un moteur sur internet permet assez facilement de relier la ville de Bâle à la famille Bernoulli, reste à identifier lequel. La spirale, la lemniscate, les probabilités permettent d'identifier Jakob Bernoulli (1654-1705).

Complément d'information :

Jakob Bernoulli (Jacques Ier pour les Français) fut membre d'une dynastie de mathématiciens et physiciens renommés avec ses frères Daniel et Johann puis leurs enfants.
Il travailla principalement sur l'analyse fonctionnelle, le calcul différentiel, le calcul intégral : le terme est de lui, en 1690, mais revendiqué aussi par Johann. On lui doit aussi les fonctions exponentielles, les premières méthodes de résolution d'équations différentielles et le calcul des probabilités.

On peut alors répondre au défi : $1654 + 1705 = 3359$.

Un ch'ti Quatrain (moins facile) : Plutôt deux fois qu'une

Enoncé :

La majeure partie de mes oeuvres est parue en Intégrale
et je n'ai jamais dû me répéter, malgré un nom peu banal.
Fatou et Borel furent mes collègues admirables
à propos de ma théorie des fonctions mesurables.

Quel est le jour de ma naissance ? (sous la forme jjmmaaaa)

Solution :
Les noms de Fatou et Borel renvoient sur internet à des mathématiciens, généralement français. Le terme de "fonctions mesurables" renvoie à une liste de mathématiciens, n'ayant en commun avec la précédente que très peu de noms. Parmi eux, celui de Lebesgue permet de comprendre le titre et l'allusion au "nom peu banal" et le fait de devoir se répéter. Le mot "Intégrale" est utilisé ici avec un double sens, avec l'Intégrale de Lebesgue étudiée après le bac.

Conclusion : il s'agit d'Henri-Léon Lebesgue (28 juin 1875 à Beauvais - 26 juillet 1941 à Paris), d'où la réponse : 28061875.

Un Ch'ti Calcul : Puissances des chiffres

Enoncé :
Le nombre 135 est égal à la somme de son premier chiffre, du carré de son second chiffre et du cube de son troisième chiffre.

On a $135 = 1^1 + 3^2 + 5^3$.

Quel est le plus grand nombre à 3 chiffres qui vérifie la même propriété ?

Solution :
Pour répondre à la question il suffit de passer en revue tous les nombres à 3 chiffres, c'est-à-dire les entiers de 100 à 999, et de vérifier pour chacun d'entre eux s'il possède la propriété indiquée. Comme seul le plus grand de ces entiers est demandé, on aura intérêt à commencer par 999 et à diminuer ce nombre jusqu'à obtenir la première solution qui sera alors la plus grande. Au pire, on trouvera 135, cela nous assure l'existence d'une solution.
On peut résumer cela de la façon suivante :
- le nombre à tester est 999 et on n'a pas encore trouvé de solution
- tant qu'on n'a pas trouvé de solution voir si le nombre à tester est une solution et le diminuer d'une unité si ce n'est pas le cas

De façon un peu plus formelle, en utilisant des variables, cela devient :

```
variable nombre_a_tester = 999
variable nombre_solution = 0
tant que nombre_solution = 0
        si nombre_a_tester est une solution
                alors nombre_solution = nombre_a_tester
                sinon diminuer nombre_a_tester d'une unité
afficher nombre_solution
```

Comment effectuer le test ?

Vérifier si 999 est une solution au problème n'est pas difficile, si on sait que 999 s'écrit avec les chiffres 9, 9 et 9; il suffit de calculer $9 + 9^2 + 9^3$ et de voir si le résultat est 999. Lorsque nous voyons un nombre à 3 chiffres écrit en base 10, nous savons immédiatement les 3 chiffres qui le constituent et le test à effectuer ne pose pas de problème. Malheureusemen, ce n'est pas le cas pour un ordinateur qui compte en base 2 et qui "voit" une suite de 0 et de 1, en l'occurence 0000001111100111. Il nous faut donc trouver une façon de passer d'un nombre entier entre 100 et 999 aux trois chiffres qui permettent de l'écrire en base 10.

L'idée est d'utiliser des divisions euclidiennes. Le chiffre des unités est le reste de la division par 10 et le chiffre des centaines est le quotient euclidien de la division par 100. Il reste à trouver le chiffre des dizaines qu'on obtient en soustrayant les unités et les centaines et en divisant par 10.

Par exemple, traitons le nombre 647.

- En divisant 647 par 10 on trouve 64 fois 10 et un reste de 7. Le chiffre des unités est donc 7.
- En divisant 647 par 100 on trouve 6 fois 100 et un reste de 47. Le chiffre des centaines est donc 6.
- En enlevant 7 unités et 6 centaines il reste 40 qu'il suffit de diviser par 10 pour obtenir le chiffre des dizaines.

Vers un programme : Inscrivons ces nouvelles idées dans l'algorithme présenté au début avec les conventions suivantes :

le chiffre des unités est noté *u*, le chiffre des dizaines est noté *d* et celui des centaines est noté *c*.

variable *nombre_a_tester* = 999
variable *nombre_solution* = 0
tant que *nombre_solution* = 0
    u = reste de la division de *nombre_a_tester* par 10
    c = quotient euclidien de la division de *nombre_a_tester* par 100
    d = (*nombre_a_tester* - *u* -100**c*)/10
    si *nombre_a_tester* = $c + d^2 + u^3$
        alors *nombre_solution* = *nombre_a_tester*
        sinon diminuer *nombre_a_tester* d'une unité
afficher *nombre_solution*

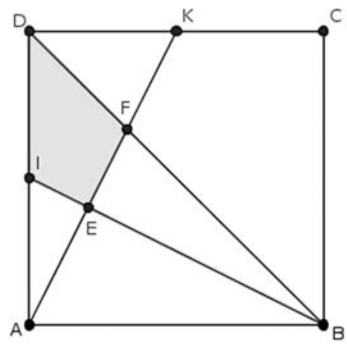
On peut facilement traduire ceci dans un langage de programmation et on obtient la réponse attendue, 598.

Cette méthode peut encore facilement être mise en oeuvre avec un tableur.

Un défi géométrique : un quadrilatère dans un carré

Enoncé :

ABCD est un carré de 10 cm de côté ; I et K sont les milieux respectifs des côtés AD et DC.
La droite AK coupe le segment IB en E et le segment DB en F.



Quelle est l'aire, arrondie à 0.001 près, du quadrilatère DIEF ?

Solution :

L'aire demandée en valeur exacte est de 35/3 cm2 soit de 11,666 cm2 à 0,001 près.
On peut le trouver par des méthodes de géométrie analytique mais aussi en faisant intervenir par exemple des homothéties.
Les triangles FKD et FAB se correspondent dans une homothétie de centre F et de rapport 2, leurs hauteurs aussi et on calcule S_{FKD} = ½ x 5 x 10/3 = 25/3
(AK) coupe (BC) en R et les triangles ElA et EBR se correspondent dans une homothétie de centre E et de rapport 4, leurs hauteurs aussi ; on calcule et S_{EIA}= ½ x 10/5 x 5 = 5.
On a donc S_{IED} = S_{IEA} = 5 et S_{DEF} = S_{DEK} - S_{DFK} = 15 - 25/3 = 20/3.
La surface du quadrilatère IEFD est donc de 5 + 20/3 cm2

Pour aller plus loin :

Le fonctionnement même du concours rend difficile l'étude des difficultés rencontrées. Le fait qu'aussi bien des Secondes que des Terminales aient bien réussi le concours la première année confirme que la difficulté est correctement dosée, la rapidité avec laquelle certains candidats répondaient dès le début du mois laisse penser que les questions étaient attendues de pied ferme. Les quatrains peuvent être réutilisés en recherche à la maison pour des collégiens ou comme amusement pour des collègues de toutes disciplines. On note des commentaires enthousiastes de la part de nombreux collègues testeurs.
Les défis nécessitant une approche algorithmique n'ont pas le même public large. Au contraire, ils visent délibérément la niche ouverte par l'introduction de l'algorithmique en Seconde sans que les collègues y soient tous formés ; les défis donnent ainsi du "corps" à la mise en place de stratégies plus sophistiquées que la recherche manuelle. A signaler : la Régionale APMEP de Lille prévoit de publier au printemps 2011 l'intégralité des défis des deux premières saisons, avec solutions commentées et analysées.