CONCOURS NATIONAL TUNISIEN de MATHEMATIQUES

PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Instrument privilégié de motivation des lycéens pour les mathématiques, le Concours national tunisien de mathématiques organisé par l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques (A.T.S.M) est ouvert aux meilleurs élèves de 3e année du secondaire , section mathématiques. Il leur permet de développer leurs aptitudes à discuter, avec les autres, des idées mathématiques, de façon précise et rigoureuse et de mettre en valeur leur capacité à appréhender les situations nouvelles faisant intervenir des qualités de patience, d'intuition, de finesse et de rigueur.

Le Concours national représente pour l'A.T.S.M et donc pour les enseignants de mathématiques en Tunisie, un des instruments privilégiés pour évaluer des aspects de l'enseignement des mathématiques, en particulier le degré d'assimilation de certains concepts importants. Il permet également de recenser quelques types d'erreurs de nature à mener les enseignants à changer d'attitude et de comportement pédagogique dans l'introduction de certaines notions.

HISTORIQUE

Le concours national se déroule chaque année au mois de mai depuis 1976. Une préparation des jeunes lauréats est prise en charge par l'A.T.S.M en vue des olympiades maghrébines, africaines et internationales. L'A.T.S.M organise aussi les phases tunisiennes (demi-finales et finale nationale) du championnat international des jeux mathématiques et logiques (FFJM).

Compétition :
Les élèves sont sélectionnés par établissement scolaire.

Épreuves :
Individuelles.
Catégorie : 3e année du secondaire.
Exercices : aucun programme officiel, aucune érudition supposée. Les énoncés sont choisis de manière à ce que les candidats puissent utiliser leurs connaissances et les méthodes qu'ils ont acquises en secondaire.
Parrains :
Ministère de l'Éducation de Tunisie.

Revue de l'A.T.S.M : Omar Khayyam.

Contacts :
Association Tunisienne des Sciences Mathématiques
43, Rue de la liberté
2019 Le Bardo
BP 286 Le Bardo
Tél (216) 71 588 198
Fax (216) 71 588198

Enoncé 1 : SUITE PARTICULIERE

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que pour tout entier $n \geq \mathbf{1}$,
$u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = 1$
Montrer qu'il existe un réel k tel que : pour tout entier $n \geq 1$,
$u_{n+1} = ku_n - u_{n-1}$

Niveau scolaire :
Pour des élèves de seconde et de 3ème année du secondaire (17-18 ans).

Domaine mathématique :
Algèbre : Opérations sur les suites réelles, en vue de prouver une relation de récurrence.

Analyse de la tâche :

Solution :
Cela revient à montrer que la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ définie par $t_n = \dfrac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_n}$

est constante (Remarquer que tout entier naturel n , $u_n \neq 0$).

- Constater que pour tout entier naturel $u_n \neq 0$, $u_{n+1} = ku_n - u_{n-1}$
et que la proposition : *il existe un réel k tel que : pour tout entier $n \geq 1$,* $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = 1$ est équivalente à *la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ définie par* $t_n = \dfrac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_n}$ *est constante.*
- Il s'agit de montrer que $t_{n+1} = t_n$ et d'utiliser la relation d'hypothèse figurant dans l'énoncé.

On a le résultat : $t_{n+1} - t_n = \dfrac{\left(u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}\right) - \left(u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_n\right)}{u_{n+1}u_n} = 0$

Commentaires :
- La seule stratégie demandée est la compréhension du texte et la capacité à traduire la phrase : il existe un réel k tel que pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = ku_n - u_{n-1}$ (le réel k est constant et ne dépend pas de *n*).

- Les techniques et la procédure utilisées dans cet énoncé sont familières aux élèves et en principe on s'attend à une réussite de la part de la majorité des candidats.

Enoncé 2 : ÉGAL A UN

Montrer que si *a*, *b* et *c* sont trois réels tels que : $abc = 1$ et

$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, alors l'un au moins de ces réels est égal à 1.

Niveau scolaire :
Pour des élèves de seconde et de 3ème année du secondaire (17-18ans).

Domaine mathématique :
Algèbre : Opérations sur les nombres réels, en vue de prouver un résultat.

Analyse de la tâche :

Solution :

$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ca + ab}{abc}$ et comme abc = 1,

on aura $a + b + c = ab + bc + ca$

$(a-1)(b-1)(c-1) = (abc-1) + (a+b+c-ab-bc-ca) = 0 + 0 = 0$

Commentaires :
- L'égalité : $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ (avec abc = 1) est vraie

pour *a* = 1 (ou *b* = 1 ou *c* = 1).

- Il s'agit de traduire convenablement la question : l'un au moins des réels *a*, *b* ou *c* est égal à 1
($a - 1 = 0$ ou $b - 1 = 0$ ou $c - 1 = 0$) soit ($(a-1)(b-1)(c-1) = 0$).

- La réussite est attendue de la part de la majorité des élèves et la factorisation ($(a-1)(b-1)(c-1) = 0$) est apparente.

Enoncé 3 : INEGALITE

1) Montrer que, pour tout réel x strictement positif , $x+\frac{1}{x} \geq 2$

2) Soient x_0, x_1, x_2,..., x_n des réels positifs

tels que $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$
Montrer que

$$x_n + \frac{1}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{x_3 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \geq 2n + x_0$$

Niveau scolaire :
Pour des élèves de seconde et de 3e année du secondaire (17-18 ans).

Domaine mathématique :
Algèbre : Opérations sur les nombres réels , en vue de prouver une inégalité.

Analyse de la tâche :

Solution :

1) $x+\frac{1}{x}-2=\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$

2) $x_{i+1} - x_i + \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \geq 2$ ce qui donne les *n* inégalités :

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 + \frac{1}{x_1 - x_0} &\geq 2 \\ x_2 - x_1 + \frac{1}{x_2 - x_1} &\geq 2 \\ &\vdots \\ x_n - x_{n-1} + \frac{1}{x_n - x_{n-1}} &\geq 2 \end{aligned}$$

On en déduit, par addition terme à terme , que :

$$x_n - x_0 + \frac{1}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_2 - x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \geq 2n$$

Soit :

$$x_n + \frac{1}{x_1 - x_0} + \frac{1}{x_2 - x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \geq 2n + x_0 .$$