L'OLYMPIADE MATHÉMATIQUE BELGE

Depuis 1976, grâce à une importante équipe de bénévoles, la SBPMef (Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française), encouragée par l'enthousiasme des élèves participants et de leurs professeurs qui les incitent à s'inscrire et qui les motivent, organise chaque année l'Olympiade Mathématique Belge (OMB), ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire belge francophone ou luxembourgeois.

Dès 1977, elle se dédouble en deux catégories, "Mini" et "Maxi", respectivement réservées aux élèves des trois classes inférieures et des trois classes supérieures. En 1996, une catégorie intermédiaire est créée et désormais, il y a trois Olympiades : "Mini", "Midi" et "Maxi", destinées respectivement aux élèves des 1er, 2e et 3e degrés de l'enseignement secondaire.

Le Jury National, réunissant des professeurs des enseignements secondaire et supérieur, des inspecteurs et des conseillers pédagogiques, compose les questionnaires ; il s'efforce de privilégier les questions peu scolaires, obligeant les élèves à faire preuve de créativité sur base de leurs connaissances. De manière générale, il est responsable de l'organisation de l'Olympiade ; il est secondé par le secrétariat de la SBPMef, notamment pour les questions de courrier.

L'éliminatoire se déroule vers la mi-janvier dans les écoles inscrites, sous la responsabilité d'un professeur. Les 30 questions sont à choix multiples (pour la plupart, une réponse correcte parmi cinq, avec pénalité pour les mauvaises réponses ; mais quelques questions ont pour réponse un entier entre 0 et 999). Le professeur responsable organise dans son établissement la correction de cette première épreuve puis envoie les résultats à son Secrétaire Régional.

Les Secrétaires Régionaux (10 actuellement : Arlon, Bruxelles, Charleroi, Liège, Louvain-la-Neuve, Luxembourg, Marche-en-Famenne, Mons, Namur et Tournai) ont de lourdes responsabilités : sélectionner les demi-finalistes sur base des résultats fournis par les écoles ; tenir à jour les statistiques de leur région et renvoyer l'information au Responsable National et aux écoles ; convoquer les demi-finalistes et organiser les demi-finales.

Les épreuves de la demi-finale (dans le courant de mars) sont du même type que les éliminatoires, mais les questions présentent un degré de difficulté légèrement supérieur. Elles sont corrigées par les Secrétaires Régionaux entourés de leurs équipes, après quoi les résultats sont transmis au Responsable National.

C'est au Jury National qu'il appartient de sélectionner les finalistes. Ceux-ci sont invités à Namur, peu après les vacances de Pâques, pour travailler 4 heures durant à la résolution de problèmes difficiles dont les réponses doivent être argumentées et correctement rédigées. Le Jury National corrige ces épreuves finales et détermine les lauréats.
Dorénavant, tous les finalistes sont invités à la proclamation solennelle des résultats et y reçoivent un diplôme de participation ; les lauréats se partagent de nombreux prix. La SBPMef peut heureusement compter sur de nombreux mécènes qui soutiennent la compétition. Dans le tableau d'honneur, figurent également un prix d'élégance et des prix spéciaux, attribués aux élèves de 1re, 3^{e} ou 5^{e} qui se sont bien défendus face à leurs ainés de 2de, 4^{e} ou 6^{e}.

Le but poursuivi par la SBPMef en organisant l'Olympiade est triple :
- Intéresser les élèves à l'activité mathématique par le biais d'une compétition passionnante ;
- Mettre l'accent sur l'importance des problèmes dans la formation mathématique ;
- Fournir aux professeurs un choix d'exercices peu routiniers.

Voici les derniers nombres de participants disponibles, ceux de 2010 :

	Inscrits	Demi-finalistes	Finalistes	Lauréats
Mini	13 416	1060	42	17
Midi	7 507	705	38	13
Maxi	5 922	658	33	14
Total	26 845	2423	113	44

SBPMef
Rue du Onze Novembre 24,
B - 7000 Mons
Belgique
tél. : +32.65.31.91.80 ;

courriel : *sbpm@sbpm.be* ;
site : *http://www.sbpm.be/* ;

site de l'OMB : *http://omb.sbpm.be/*

Toutes les questions des Olympiades 2007-2010 sont réunies dans un volume (A5, 188 pp.) disponible à l'adresse ci-dessus.

PROBLEME 1 *(OMB 2010, finale Mini)*

Dans le parallélogramme $RSTU$, la longueur du côté $[RS]$ est double de celle du côté $[RU]$. Le point P est le milieu du côté $[RS]$.

1. Démontrer que la droite (UP) est la bissectrice de l'angle $\widehat{RUT}$ et que la droite (TP) est la bissectrice de l'angle $\widehat{STU}$.

2. Le triangle TUP est-il acutangle, rectangle ou obtusangle ?

Niveau scolaire :
Ce problème a été proposé à des élèves des deux premières années de l'enseignement secondaire (12 à 14 ans)

Domaine mathématique :
Géométrie plane.
Contenu des connaissances de l'énoncé.
Propriétés du parallélogramme, du milieu d'un segment, de la bissectrice d'un angle. Classement des triangles.
Contenu des connaissances dans les procédures.
Propriétés des quadrilatères, des triangles, des droites parallèles et perpendiculaires, des angles (complémentaires, supplémentaires, alternes-internes), de la médiatrice d'un segment, du triangle inscrit dans un demi-cercle.
Propriété de la somme des angles d'un triangle.
Propriétés des translations et des symétries centrales.
Cas d'isométrie des triangles.

Analyse du problème :
1) Pour démontrer qu'une droite est bissectrice d'un angle, on peut, par exemple, démontrer que cette droite :
- partage l'angle en deux angles de même amplitude (A1,B1.2),
- est médiatrice de la base d'un triangle isocèle (B1.3),
- est une diagonale d'un losange (B1.1,C).

2) Le but est de conjecturer une propriété et de la démontrer.
Pour démontrer qu'un triangle est rectangle, on peut, par exemple, démontrer que ce triangle :
- a un angle droit (A2, B2.3),
- a deux côtés perpendiculaires (B2.2,C),
- est inscrit dans un demi-cercle (B2.1).

A. Procédure sans construction

1. Soit un parallélogramme $RSTU$ et soit P le milieu du côté $[RS]$.

La contrainte $RS = 2RU$ entraîne le même codage des quatre segments $[RP]$, $[PS]$, $[RU]$ et $[ST]$

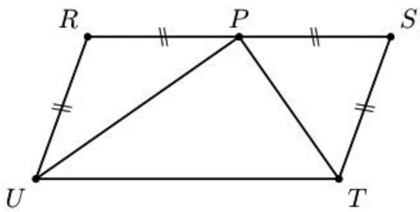


Fig. 1

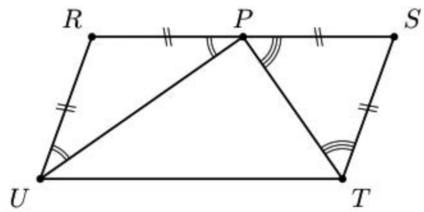


Fig. 2

Le triangle URP est isocèle en R d'où $\widehat{RUP} = \widehat{RPU}$.

Les angles alternes-internes $\widehat{RPU}$ et $\widehat{PUT}$ ont même amplitude.

On en déduit $\widehat{RUP} = \widehat{PUT}$.

La droite (UP) est donc bissectrice de l'angle $\widehat{RUT}$.

De manière analogue, on démontre que la droite (TP) est bissectrice de l'angle $\widehat{STU}$.

2. On peut conjecturer que le triangle TUP est rectangle en P.

Dans le parallélogramme $RSTU$, les angles consécutifs $\widehat{RUT}$ et $\widehat{STU}$ sont supplémentaires. Les angles $\widehat{PUT}$ et $\widehat{UTP}$ sont donc complémentaires et le triangle UPT est rectangle en P.

B. Procédures avec construction du point M, milieu du côté $[UT]$.

1. La droite (UP) est bissectrice de l'angle $\widehat{RUT}$

La droite (MP) est une médiane du parallélogramme $RSTU$. On a ainsi le même codage pour les segments $[RP]$, $[PS]$, $[RU]$, $[ST]$, $[UM]$, $[MP]$ et (MP).

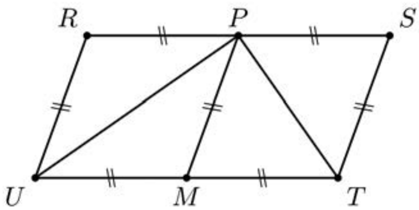


Fig. 3

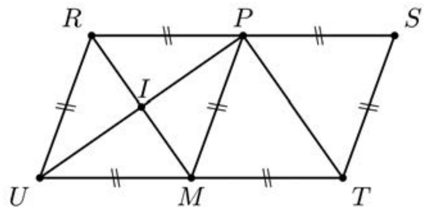


Fig. 4

1.1. La diagonale (UP) du losange $RPMU$ est bissectrice de l'angle $\widehat{RUT}$ (Fig. 3).

1.2. Les triangles RUP et MUP sont isométriques. On en déduit $\widehat{RUP} = \widehat{RPU}$. La droite (UP) est donc bissectrice de l'angle $\widehat{RUT}$ (Fig. 3).

1.3. Comme $UR = UM$ et $PR = PM$ (Fig. 4), la droite (UP) est médiatrice du segment $[RM]$.

Dans le triangle isocèle RUM, la droite (UP) est donc bissectrice de l'angle $\widehat{RUM}$.

2. Le triangle UPT est rectangle en P

2.1. Le triangle UPT est inscrit dans le demi-cercle de diamètre $[UT]$ (Fig. 3), il est donc rectangle en P.

2.2. Les diagonales du losange $RPMU$ se coupent en leur milieu I, elles sont perpendiculaires (Fig. 4). Dans le triangle UPT, I est milieu du côté $[UP]$ et M est milieu du côté $[UT]$.

Les droites (IM) et (PT) sont donc parallèles.

On en déduit que les droites (UP) et (PT) sont perpendiculaires.

Le triangle UPT est donc rectangle en P.

2.3. Le point I (resp. J) est le point d'intersection des diagonales du losange $RPMU$ (resp. $PSTM$) (Fig. 5).

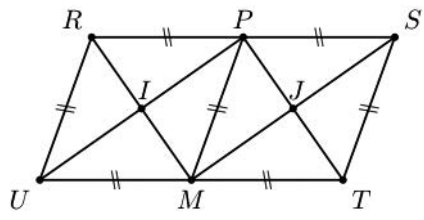


Fig. 5

Dans le triangle UPT, I (resp. J, M) est milieu du côté $[UP]$, (resp. $[PT]$, $[UT]$). Les droites (IM) et (PJ) (resp. (IP) et (MJ)) sont parallèles. Le quadrilatère $IPJM$ est donc un parallélogramme.

Il a un angle droit en I (les diagonales d'un losange sont perpendiculaires). Le parallélogramme $IPJM$ est donc un rectangle et le triangle IPJ est rectangle en P.

On peut aussi démontrer que $IPJM$ est un parallélogramme en utilisant la translation qui applique R sur P.

Cette translation applique P (resp. U et M) sur S (resp. M et T).

Les droites (RM) et (PT) sont donc parallèles ainsi que les droites (PU) et (SM).

<u>C. Procédure avec construction du point *M* et utilisation de la symétrie de centre *P*</u>

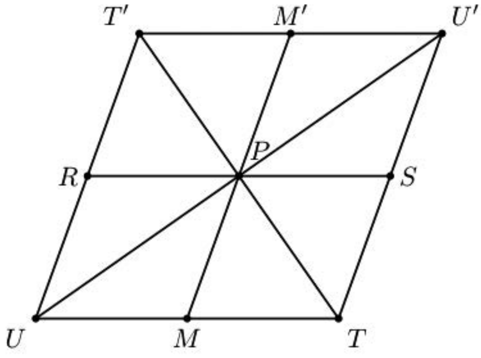


Fig. 6

On construit T' (resp. M' et U') image de T (resp. M et U) par la symétrie de centre P .

Les conditions initiales et les propriétés de la symétrie centrale (l'image d'une droite est une droite parallèle, les longueurs des segments sont conservées) permettent de dire que $UT'U'T$ est un losange. La diagonale (UP) du losange $UT'U'T$ est donc bissectrice de l'angle $\widehat{RUT}$ et perpendiculaire à la diagonale (TP) . Le triangle UPT est donc rectangle en P .

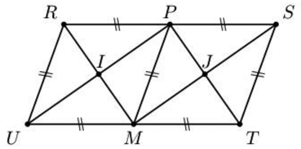
Commentaires /

1. La première démonstration est la plus simple, elle ne demande aucune construction.

2. On peut aussi définir le point M comme point d'intersection de (UT) et de la parallèle à (RU) comprenant P ou comme point d'intersection de (UT) et de la parallèle à (PT) comprenant R .

Solution d'un élève de 2e année du secondaire

Soit M le milieu de $[UT]$ (Fig. 5).



Deux cotés opposés d'un parallélogramme ayant la même longueur et dans ce cas-ci, le grand côté étant deux fois plus grand que le petit,

$$2UR = 2RP = 2PS = 2ST = 2TM = 2MU = RS = TU \cdot$$

De plus, R une médiane du parallélogramme,

$$PM = UR = RP = PS = ST = TM = MU \,.$$

On a ainsi deux quadrilatères $RPMU$ et $PSTM$ ayant quatre côtés de même longueur. Ce sont donc des losanges. Puisqu'ils ont un côté commun ils sont isométriques. Les droites (UP) et (PT) étant des diagonales de ces losanges, elles sont des axes de symétrie et donc des bissectrices des angles $\widehat{TUR}$ et $\widehat{STU}$.

Les diagonales d'un losange étant perpendiculaires, $\widehat{MIP} = \widehat{MJP} = 90° \cdot$

Les deux losanges étant isométriques, leurs demi-diagonales $[MI]$ et $[PJ]$ ont même longueur. Le quadrilatère $PJMI$ est donc un rectangle, l'angle $\widehat{UPT}$ est droit et le triangle UPT est rectangle.

PROBLEME 2 ***(OMB 2010, finale Midi)***

Soit un carré $ABCD$ de centre E. La droite (CF) est tangente au cercle de diamètre $[AB]$ en $F \neq B$. Quel est le rapport des aires du triangle BEF et du carré $ABCD$?

Niveau scolaire :
Ce problème a été proposé à des élèves de 3e et 4e années de l'enseignement secondaire (14 à 16 ans)

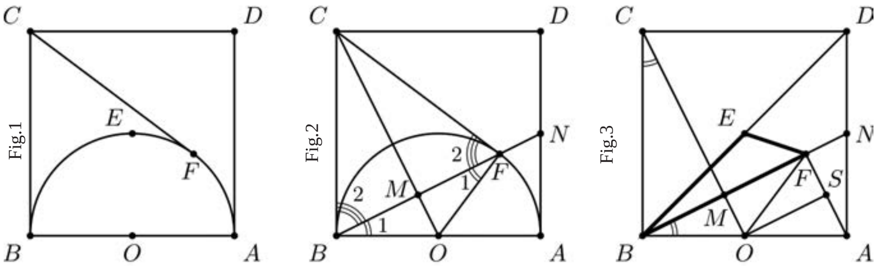
Domaine mathématique :
Géométrie plane
<u>Contenu des connaissances de l'énoncé.</u>
Propriétés du carré et des tangentes à un cercle par un point extérieur à ce cercle. Aire d'une figure.
<u>Contenu des connaissances dans les procédures</u>
Propriétés du triangle isocèle, des angles (complémentaires, à côtés perpendiculaires, inscrits dans un cercle), de la médiatrice d'un segment.
Propriétés des rotations.
Théorème de Pythagore.
Cas d'isométrie et de similitude des triangles. Rapport de similitude (resp. des aires) de deux triangles semblables.
Propriétés des aires. Différentes formules de l'aire d'un triangle.
Coordonnées d'un point dans un repère et calcul de la distance entre deux points.

Analyse du problème :
Le point F appartient au cercle de diamètre $[AB]$, au cercle de diamètre $[CO]$ et au cercle de centre C et de rayon AB. On peut le construire en appliquant la méthode des deux lieux. L'élève peut aussi "placer" le point F sur le cercle de diamètre $[AB]$ tel que $(OF) \perp (CF)$.

Le rapport des aires n'est pas donné dans l'énoncé. Pour répondre à la question, on peut calculer l'aire du triangle BEF en fonction de la longueur

côté du carré. On peut aussi partager le carré en plusieurs triangles et appliquer les propriétés des aires.

Procédure n°1



Les points B et F appartiennent au cercle de centre O, milieu du segment $[AB]$, on a $OB = OF$. Le triangle BOF est isocèle en O : angle B_1 = angle F_1.
Comme (CF) est tangente au cercle de centre O, le triangle CFO est rectangle en F. On en déduit : $\widehat{B_2} = \widehat{F_2}$ (angles complémentaires de deux angles de même amplitude). Par conséquent : $CB = CF$.
La droite (OC) est donc médiatrice de $[BF]$, elle est perpendiculaire à la droite (BF) et coupe $[BF]$ en son milieu, noté M.
Soit N, le point d'intersection des droites (BF) et (AD). Les angles aigus $\widehat{ABN}$ et $\widehat{BCO}$ sont des angles à côtés perpendiculaires, ils ont donc même amplitude (Fig. 3).
Les triangles rectangles BAN et CBO sont isométriques.
En effet, $BA = CB$ et $\widehat{ABN} = \widehat{BCO}$.
On en déduit : $AN = 1/2 \times AD$. Le point N est donc milieu de $[AD]$.
Soit S le milieu de $[AF]$. Dans le triangle ABF, on détermine ainsi quatre triangles rectangles de même aire.
Les triangles rectangles BMO et AFN sont isométriques.
En effet, $BO = AN$ et $\widehat{BOM} = \widehat{ANF}$ (angles complémentaires de angle MBO).

On a : $\text{Aire}(AFN) = \text{Aire}(ABN)/5 = \text{Aire}(ABCD)/20$.

Comme N est le milieu de $[AD]$,

$\text{Aire}(DFN) = \text{Aire}(ABCD)/20$ et

$$\text{Aire}(BDN) = \text{Aire}(ABN) = \text{Aire}(ABCD)/4$$

On en déduit : $\text{Aire}(BDF) = \text{Aire}(ABCD)/5$.

Comme E est le milieu de $[BD]$, $\text{Aire}(EBF) = \text{Aire}(ABCD)/10$.

Procédure n°2

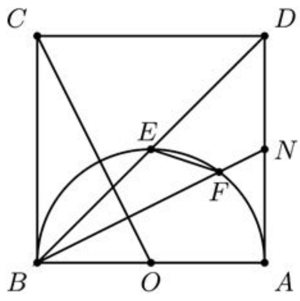


Fig. 4

Le point E, milieu de $[BD]$, appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

On a $OB = OF$ (voir procédure n°1). Par égalité des longueurs des segments de tangentes menées d'un point à un cercle, $CB = CF$.

La droite (OC) est donc médiatrice de $[BF]$, elle est perpendiculaire à la droite (BF).

On appelle r_E la rotation de centre E et d'angle 90°.

Cette rotation applique $[BA]$ sur $[AD]$ et (OC) sur (BF)

($r_E(C) = B$ et $CO \perp BF$)

Cette rotation applique donc le point O sur le point d'intersection des droites (AD) et (BF), noté N, et N est le milieu de $[AD]$.

L'angle inscrit $\widehat{EFB}$ dans le cercle de centre O et l'angle $\widehat{BDA}$ ont la même amplitude (45 °).

Les deux triangles BEF et BND sont donc semblables.

On pose $AB = 2c$. Le rapport de similitude des deux triangles est donné par $\dfrac{BE}{BN} = \dfrac{\sqrt{2}c}{\sqrt{4c^2+c^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. Le rapport des aires des deux triangles est $\dfrac{\text{Aire}(BEF)}{\text{Aire}(BND)} = \dfrac{2}{5}$

Comme $\text{Aire}(BND) = \text{Aire}(ABCD)/4$, on en déduit :

$$\frac{\text{Aire}(BEF)}{\text{Aire}(ABCD)} = \frac{\text{Aire}(BEF)}{\text{Aire}(BND)} \times \frac{\text{Aire}(BND)}{\text{Aire}(ABCD)} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

.

Procédure n°3

Soit le côté c du carré. Par égalité des longueurs des segments de tangentes menées d'un point à un cercle, $CF = CB$, donc B appartient au cercle de rayon c centré en C . Par suite, il peut être défini par l'intersection des deux arcs de cercle. On fait une figure un peu précise :

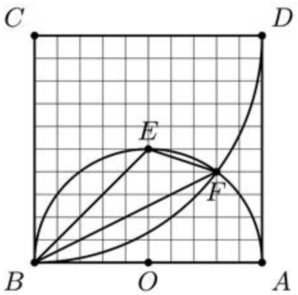


Fig. 5

On y observe que les coordonnées de F sont $(4c/5, 2c/5)$ (dans le repère "évident" $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$). Il reste à le justifier, ce qui est immédiat par calcul des distances

$$OF = \sqrt{\left(\frac{4c}{5} - \frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2c}{5} - 0\right)^2} = \frac{c}{2}$$

et

$$CF = \sqrt{\left(\frac{4c}{5} - 0\right)^2 + \left(\frac{2c}{5} - c\right)^2} = c$$

Le calcul de l'aire du triangle se fait maintenant par le procédé que l'on veut (formule de Héron, formule $\frac{1}{2}\sum\left(x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i\right)$, déterminant

$$\det\begin{pmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{pmatrix}$$

théorème de Pick ou simplement comptage des petits carrés).

On obtient $\frac{\text{Aire}(BEF)}{\text{Aire}(ABCD)} = \frac{1}{10}$.

Commentaires :

1. Dans la procédure n°3, on peut utiliser d'autres formules de l'aire d'un triangle :

$S = \frac{bc\sin\widehat{A}}{2}$, $S = \frac{abc}{4R}$ (où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle).

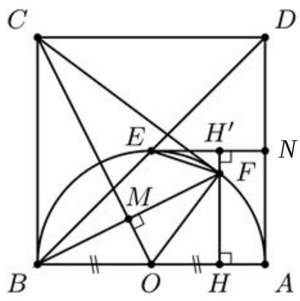
En effet, l'angle $\widehat{EFB}$ a une amplitude de $45°$ et le cercle de centre O est circonscrit au triangle BEF .

2. Le point F pourrait être défini comme le point d'intersection des droites (BN) (N milieu de $[AD]$) et (AR) (R milieu de $[CD]$).

Dans la première procédure, on a démontré que le point N (point d'intersection des droites (BF) et (AD) est le milieu de $[AD]$. On peut facilement démontrer que le point d'intersection des droites (AF) et (CD) est le milieu de $[CD]$

.

Solution d'un élève de 4e année du secondaire



Appelons $2a$ le côté du carré $ABCD$. Puisque $OF = OB$,
le triangle OBF est isocèle et donc $\widehat{OBF} = \widehat{OFB}$.
Or, $\widehat{CFB} = 90° - \widehat{OFB} = \widehat{CBF}$, le triangle BCF est donc isocèle en C . D'autre part, puisque $OF = OB$, $CF = CB$ et $\widehat{CFO} = \widehat{CBO}$, les triangles CFO et CBO sont isométriques.

Le triangle BCO, rectangle en B , est tel que $BC = 2BO$. Soit M le point d'intersection de (CO) et de (BF) et N celui de (BF) et de (DA).
Les triangles BCO , MBO et ABN sont donc semblables
et $BA = 2NA$. N est donc le milieu de $[DA]$.

Soit H la projection orthogonale de F sur (AB).
Il est clair que les triangles BMO et BAN sont semblables. De plus, comme les triangles BMO et FMO sont isométriques, on a également les triangles FMO et BAN semblables. Donc

$$\frac{FO}{BN} = \frac{FM}{BA} \Rightarrow FM = \frac{2a \times a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

De plus,

$$\frac{BF}{BN} = \frac{FH}{NA} \Rightarrow \frac{4a/\sqrt{5}}{a\sqrt{5}} = \frac{FH}{a} \Rightarrow FH = \frac{4a}{5}$$

Soit H' la projection orthogonale de F sur (EN), on a aussi $FH' = a/5$.

Ainsi

$$\text{Aire}(ENF) = \frac{1}{2}EN \times FH' = \frac{1}{2}a\frac{a}{5} = \frac{a^2}{10}$$

$$\text{Aire}(BNA) = \frac{1}{2}a \times 2a = a^2$$

$$\text{Aire}(DEN) = \frac{1}{2}a \times a = \frac{a^2}{2}$$

donc

$$\text{Aire}(BEF) = \text{Aire}(BDA) - \text{Aire}(ENF) - \text{Aire}(BNA) - \text{Aire}(DEN) = \frac{2a^2}{5}$$

or

$\text{Aire}(ABCD) = (2a)^2 = 4a^2$,

donc finalement

$$\frac{\text{Aire}(BEF)}{\text{Aire}(ABCD)} = \frac{2a^2/5}{4a^2} = \frac{1}{10}.$$