OLYMPIADES MATHÉMATIQUES DE PREMIÈRE

PRÉSENTATION

Les Olympiades académiques de mathématiques ont été créées dans le but de stimuler chez les élèves le goût de l'initiative et de la recherche.
Ce concours est destiné à tous les lycéens de première de toutes séries.
L'inscription se fait auprès des professeurs, sur la base du volontariat.
Les connaissances nécessaires sont basées sur les programmes des classes de collège et de seconde , complétées par les parties communes des programmes des différentes classes de première.
Dans chaque académie, le dispositif est suivi par une cellule, présidée par un responsable désigné par le recteur.
La correction des copies, la mise au point du palmarès académique sont assurés par la cellule académique. La remise des prix fait l'objet d'une cérémonie académique, présidée par le recteur ou son représentant, en faisant appel à des partenaires locaux ou régionaux..
La cellule académique fait parvenir au groupe national les meilleures copies ; le groupe national établit le palmarès national.
La remise des prix nationaux fait l'objet d'une cérémonie organisée en collaboration avec le ministère chargé de l'éducation nationale et différent partenaires associatifs ou privés.

FICHE TECHNIQUE

Historique :
Créées en novembre 2000 pour les élèves des classes de premières scientifiques et technologiques.
A compter de la session 2005 s'adressent à tous les lycéens de première de toutes séries.

Epreuves :
Individuelles.
Durée quatre heures.
Quatre exercices dont deux sont communs à toutes les académies, deux autres sont choisis par la cellule académique.

Contact :
BO n° 35 du 30/09/2004.
Annales publiées par l'APMEP

LILLE

Deuxième exercice académique

Série S

Des couples parfaits

Énoncé

Le couple d'entiers (25 ; 36) possède deux propriéts remarquables :

- Ce sont des carrés parfaits.
- Le deuxième nombre s'écrit avec les chiffres du premier augmentés de 1, dans le même ordre.

Bernard et Cécile cherchent d'autres couples vérifiant ces deux propriétés.

Partie I

Dans un premier temps, ils se limitent aux entiers inférieurs à 100 pour tester leur méthode.

1. Existe-t-il des couples d'entiers à deux chiffres (compris entre 10 et 99) vérifiant ces deux propriétés ?
2. Pour vérifier leurs résultats, Bernard propose l'algorithme suivant :

```
Pour i allant de 10 à 88
        Si √i est un entier et √(i + 11) est un entier
                Alors écrire i et i + 11
        Fin du Si
Fin du Pour
```

Cécile propose l'algorithme suivant

```
Pour i allant de 4 à 9
        Si √(i² + 11) est un entier
                Alors écrire i² et i² + 11
        Fin du Si
Fin du Pour
```

Pour chaque algorithme, on appellera temps de l'algorithme le nombre de fois que le programme correspondant rencontrera une condition (**Si**) ; par exemple, le temps de l'algorithme de Bernard est 79.

a. Pour chaque algorithme proposé, expliquer ce que représente la variable i.

b. Quel est le temps de l'algorithme de Cécile.

Partie II

Bernard et Cécile cherchent maintenant les couples d'entiers naturels à quatre chiffres (compris entre 1000 et 9999) vérifiant les deux propriétés.

(a) Comment chacun peut-il transformer son algorithme pour résoudre le problème ?
Quel sera alors le temps de chaque algorithme ?

(b) Quelle est la réponse au problème posé ?

(c) René ne sait pas écrire d'algorithme. Comment peut-il résoudre le problème malgré tout ?

Partie III

Dans le cas des couples d'entiers 'a trois chiffres (compris entre 100 et 999), que vont donner les algorithmes adaptés de Bernard et Cécile ?
Quelle est la réponse au problème posé ?

Éléments de solution

Partie I

a. Soit (a^2, b^2) le couple d'entiers cherché.
Dans l'algorithme de Bernard i représente a^2

b. Dans l'algorithme de Cécile, i représente a et le temps est 9-3=6.

Partie II

1. Bernard doit remplacer les trois premières lignes de son algorithme : :

```
Pour i allant de 1000 à 8888
        Si √i est un entier et √(i+1111) est un entier
                Alors écrire i et i+1111
        Fin du Si
Fin du Pour
```

Le temps de ce nouvel algorithme est 7889.
Cécile doit remplacer les trois premières lignes de son algorithme :

```
Pour i allant de 32 à 99
        Si √(i²+1111) est un entier
                Alors écrire i² et i²+1111
        Fin du Si
Fin du Pour
```

Le temps de ce nouvel algorithme est 68.

2. La réponse est (2025, 3136), obtenue pour $i = 45$.

3. On a $b^2 = a^2 + 1111$ ou $b^2 - a^2 = 1111 = 11 \times 101$ produit de deux nombres premiers.
D'où $b + a = 101$ et $b - a = 11$, d'où $b = 56$ et $a = 45$, puis $a^2 = 2025$ et $b^2 = 3136$; on vérifie que $3136 = 2025 + 1111$.
L'alternative $b + a = 1111$ et $b - a = 1$ qui conduirait à $b = 551$ ne convient pas car $551^2 > 10000$.

Partie III

On a maintenant $b^2 = a^2 + 111$
d'où $b^2 - a^2 = 3 \times 37$ produit de deux nombres premiers
d'où $b + a = 37$ et $b - a = 3$ d'où $b = 20$ et $a = 17$,
$b^2 = 400$ et $a^2 = 289$; on vérifie que $400 = 289 + 111$.

L'alternative $b + a = 111,\ b - a = 1$ donnerait $a = 55$ et $b = 56$ donc $b^2 = 3136$ qui a quatre chiffres et donc ne convient pas.

PARIS

Deuxième exercice académique

Toutes séries

Un octogone particulier

Énoncé

Un octogone convexe $A_1A_2A_3\dots A_8$ est inscrit dans un cercle de rayon non nul.
$A_1A_3A_5A_7$ est un carré d'aire égale à 5 ; $A_2A_4A_6A_8$ est un rectangle d'aire égale à 4.

Déterminer, en justifiant, l'aire maximale de l'octogone.

Éléments de solution

Ce problème à l'énnoncé très court est très ouvert et comporte de nombreuses voies d'attaque et de résolution ; nous en proposons quatre ici.

Calculs préliminaires

Le côté d'un carré d'aire 5 mesure $\sqrt{5}$ et sa demi diagonale $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

Un rectangle d'aire 4 et de diagonale $2\sqrt{\dfrac{5}{2}} = \sqrt{10}$ a des côtés de longueurs a et b tels que $ab = 4$ et $a^2 + b^2 = 10$ d'où $(a+b)^2 = 18$ et $(a-b)^2 = 2$, puis $a = 2\sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$.

L'angle $\widehat{BOC} = \theta$ est tel que $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ et $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ et $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

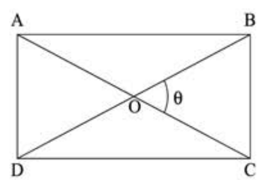

figure 1

1. Voie expérimentale

A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on construit successivement

- En noir un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.
- En vert, un rectanngle $A_2A_4A_6A_8$ inscrit dans $(\mathcal{C})$ tel que $A_2A_4 = A_6A_8 = \sqrt{2}$ et $A_4A_6 = A_8A_2 = 2\sqrt{2}$ et ses diagonales.
- En rouge, un carré $A_3A_5A_7A_1$ de côté $\sqrt{5}$ et tel que A_3 soit dans le petit arc $\widehat{A_2A_4}$, et ses diagonales.

On calcule alors l'aire de l'octogone $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, comme somme d'aires de triangles ou rectangles.

On anime la figure 2 (page suivante) en gardant fixe le rectangle vert et en faisant parcourir à A_3 l'arc $\widehat{A_2A_4}$. On constate que l'aire est maximum quand A_3 est au milieu de l'arc $\widehat{A_2A_4}$ et donc A_1 au milieu de l'arc $\widehat{A_2A_8}$. Elle est alors égale à $3\sqrt{5} \approx 6,708$.

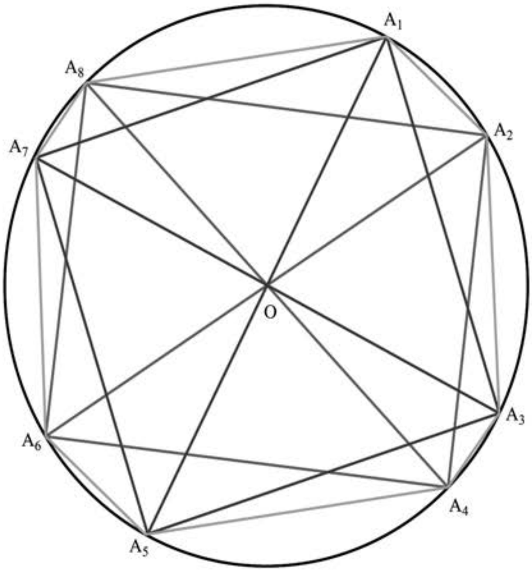

figure 2

2. Voie géométrique

L'aire de l'octogone est la somme des aires
- du rectangle $A_2A_4A_6A_8$ égale à 4
- des quatre triangles $A_8A_1A_2$, $A_2A_3A_4$,$A_4A_5A_6$ et $A_6A_7A_8$

Commençons par démontrer que si un point A décrit un arc de cercle $\widehat{BC}$, l'aire du triangle BAC est maximum quand A_0 est au milieu de l'arc.
En effet, abaissons de A et A_0 les perpendiculaires (AH) et (A_0H_0) à la droite (BC) et traçons la tangente à l'arc en A_0. Pour tout point D de la bande fermée limitée par cette tangente et la droite (BC), on a $DK \leqslant D_0K = A_0H_0$.
En particulier, $AH \leqslant A_0H_0$, l'égalité n'étant réalisée que si A est en A_0.
Mais l'aire du triangle BAC est égale à $\dfrac{BC \times AH}{2}$ et on a $\dfrac{BC \times AH}{2} \leqslant \dfrac{BC \times A_0H_0}{2}$, l'égalité n'étant réalisée que si A est en A_0. (cf. figure 3).

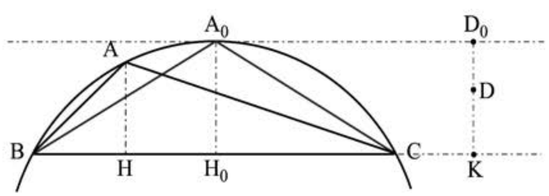

figure 3

Mais (cf. figure 2) A_1A_5 et A_3A_7 sont les diagonales d'un carré et donc perpendiculaires ; si A_3 est au milieu de l'arc $\widehat{A_2A_4}$, A_1 se trouve au milieu de l'arc $\widehat{A_2A_8}$, de sorte qu'on maximise en même temps l'aire des deux triangles $A_8A_1A_2$ et $A_2A_3A_4$, donc aussi celles de $A_4A_5A_6$ et $A_6A_7A_8$ (cf. figure 4, page suivante).

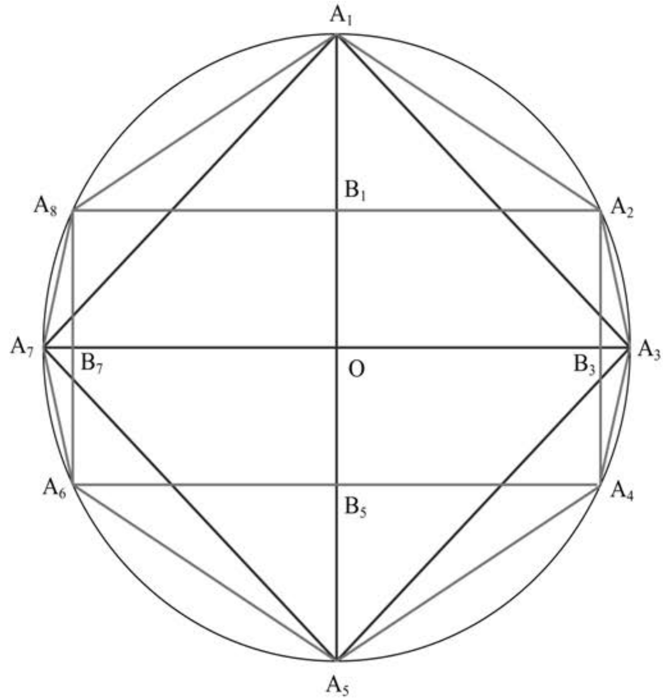

figure 4

L'aire de l'octogone est alors :

$$4 + A_2A_8 \times A_1B_1 + A_2A_4 \times A_3B_3 = 4 + a\left(R - \frac{b}{2}\right) + b\left(R - \frac{a}{2}\right)$$
$$= 4 + R(a+b) - ab = 3\sqrt{5}.$$

3. Voie de l'analyse

Posons (cf. figure 5) :
$\widehat{A_3OA_4} = \varphi$, $\widehat{A_2OA_4} = \theta$ donc $\widehat{A_2OA_3} = \theta - \varphi$.
De $\widehat{A_3OA_1} = \widehat{A_3OA_5} = \frac{\pi}{2}$, on déduit
$\widehat{A_1OA_2} = \frac{\pi}{2} - \theta + \varphi$ et $\widehat{A_4OA_5} = \frac{\pi}{2} - \varphi$.
L'aire de l'octogone est la somme des aires des huit triangles :
A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4, A_4OA_5, A_5OA_6, A_6OA_7, A_7OA_8, A_8OA_1 qui sont égales deux à deux en raison de la symétrie de l'octogone par rapport à O.
L'aire du triangle A_iOA_{i+1} est égale à $\frac{R^2}{2} \sin \widehat{A_iOA_{i+1}}$. Celle de l'octogone est donc

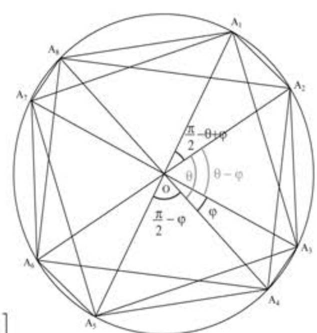

figure 5

$$R^2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta + \varphi\right) + \sin(\theta - \varphi) + \sin\varphi + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right]$$
$$= R^2\left[\cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi) + \sin\varphi + \cos\varphi\right]$$

et quand A_3 décrit l'arc $\widehat{A_4A_2}$, φ varie de 0 à θ.

Posons $f(\varphi) = \cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi) + \sin\varphi + \cos\varphi$
f est dérivable sur $[0, \theta]$ de dérivée f' donnée par $f'(\varphi) = \sin(\theta - \varphi) - \cos(\theta - \varphi) + \cos\varphi - \sin\varphi$
f' s'annule pour $\varphi = \dfrac{\theta}{2}$.

Si $0 \leqslant \varphi < \dfrac{\theta}{2}$, $\theta - \varphi > \varphi$, $\sin(\theta - \varphi) > \sin\varphi$, $\cos(\theta - \varphi) < \cos\varphi$ donc $f'(\varphi) > 0$.
De même si $\dfrac{\theta}{2} < \varphi \leqslant \theta$, $f'(\varphi < 0$.
f passe donc par un maximum pour $\varphi = \dfrac{\theta}{2}$.
L'aire de l'octogone est alors $2R^2\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + \sin\dfrac{\theta}{2}\right) = 2 \times \dfrac{5}{2} \times \dfrac{3}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$.

4. Voie trigonométrtique

Nous partons de l'expression de l'aire de l'octogone obtenue ci-dessus :

$$R^2\left[\cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi) + \sin\phi + \cos\phi\right]$$

On peut écrire $\sin\varphi + \cos\varphi = \sqrt{2}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi\right]$
$= \sqrt{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\varphi + \sin\dfrac{\pi}{4}\cos\varphi\right]$
$= \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \varphi\right)$.
et $\cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi) = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta - \varphi\right)$.

L'aire s'écrit donc

$$R^2\sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta - \varphi\right)\right] = \frac{5\sqrt{2}}{2}\left[2\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos(2\varphi - \theta)\right]$$

La fonction $\varphi \mapsto \cos(2\varphi - \theta)$ a pour courbe représentative un arc de sinusoïde.

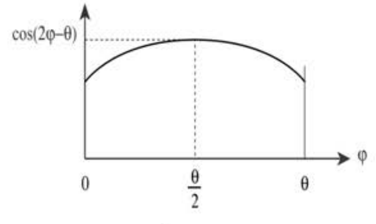

figure 6

Elle atteint son maximum 1 pour $2\varphi - \theta = 0$ ou $\varphi = \dfrac{\theta}{2}$.

L'aire maximale est donc

$$5\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 5(\sin\theta + \cos\theta) = 3\sqrt{5}$$