

## OLYMPIADES INTERNATIONALES

La plus prestigieuse compétition mathématique pour lycéens a été créée en Roumanie en 1959. Elle se déroule en juillet, dans un pays différent chaque année (2009: Allemagne, 2010: Kazakhstan, 2011 :Pays Bas, 2012: Argentine ... ).

Actuellement, plus de 100 pays y participent, en sélectionnant chacun six candidats(non bacheliers de moins de vingt ans) qui doivent résoudre, en deux épreuves de 4 h 30 chacune, six problèmes de difficultés inégales : les problèmes 3 et 6 sont plus difficiles que 1 et 4. Chaque problème est noté sur 7, et toute solution juste, même inélégante, vaut 7 points ; s'il manque des éléments non essentiels, la note est ramenée à 6, 5 ... Une copie qui n'atteint pas la solution mais contient des idées utilisables mérite 1, 2 ... Sur 600 candidats, certains atteignent le score maximum (42/42), les 50 premiers environ obtiennent une médaille d'or, les 100 suivants une médaille d'argent et les 150 suivants une médaille de bronze. Chine, Russie, Etats-Unis ... sont souvent les meilleurs pays, mais c'est une Allemande, Lisa Sauermann, qui a battu tous les records en obtenant 4 médailles d'or et 1 médaille d'argent en 5 participations (alors que 90% des candidats sont des garçons).

Pour tout savoir sur cette compétition, énoncés, résultats, vous pouvez consulter le site : [www.imo-official.org](http://www.imo-official.org).

La France participe aux Olympiades Internationales depuis 1969, et les a accueillies à Paris en 1983. Plusieurs compétitions (Olympiade Académique, Kangourou, FFJM, ... )permettent de repérer des candidats potentiels, mais certains élèves nous sont signalés par leurs professeurs, nous acceptons même des candidatures spontanées. Plusieurs clubs (Lyon, Orsay, ... ) ainsi que les stages d'Animath familiarisent les élèves aux techniques olympiques : le stage d'été d'Animath accueille une quarantaine de stagiaires sélectionnés parmi quelque deux cents candidats, au moyen d'un test en temps limité dans les établissements scolaires. C'est l'Olympiade Française de Mathématiques qui, en définitive, choisit les candidats français à l'Olympiade Internationale, en organisant pour une vingtaine d'élèves sélectionnés en début d'année scolaire des envois mensuels d'exercices, des stages et des tests en temps limité. Elle envoie également une équipe aux Olympiades Balkaniques qui se déroulent début mai. La France se situe actuellement aux alentours de la trentième place aux Olympiades Internationales, car certains pays investissent beaucoup plus que nous dans le repérage et la préparation des candidats : depuis 2005, par exemple, l'Italie est meilleure que la France, ce qui n'était pas le cas précédemment. La plupart de nos candidats sont en terminale mais il nous arrive d'envoyer des élèves dès la seconde, et nous nous efforçons de repérer certains élèves dès le collège, enorganisant par exemple des stages" junior" (seconde, troisième, quatrième) à laToussaint.

### Elémentaire, mais infaisable...

Peut-on se permettre d'utiliser ces deux adjectifs pour qualifier le même exercice ? c'est moins contradictoire qu'il n'y paraît !

L'exercice suivant a été proposé à la session d'octobre 2008 de la "pépinière de mathématiques", qui, à l'initiative d'un Inspecteur Pédagogique Régional, réunissait à Versailles des élèves de collège. Il a été repris à d'autres occasions, par exemple au stage olympique junior d'octobre 2010, destiné à initier les élèves de seconde et collège aux techniques de raisonnement des Olympiades Internationales de Mathématiques.

#### Énoncé :

Soit  $a, b, c$  des nombres strictement positifs tels que  $a \geq b \geq c$

Montrer que :

$$\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{c^2 - b^2}{a} + \frac{a^2 - c^2}{b} \geq 3a - 4b + c$$

mais rares sont les mathématiciens, même confirmés, qui trouvent la solution par eux-mêmes !

Remarquons que la solution, une fois trouvée, est incontestablement élémentaire. En effet il suffit d'écrire :

$$\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{c^2 - b^2}{a} + \frac{a^2 - c^2}{b} = \left(\frac{a+b}{c}\right)(a-b) + \left(\frac{c+b}{a}\right)(c-b) + \left(\frac{a+c}{b}\right)(a-c)$$

étant donnée l'hypothèse  $a \geq b \geq c > 0$ ,  $\left(\frac{a+b}{c}\right) \geq 2$ ,  $\left(\frac{c+b}{a}\right) \leq 2$

mais  $(c-b) \leq 0$ ,  $\left(\frac{a+c}{b}\right) \geq 1$ , d'où finalement :

$$\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{c^2 - b^2}{a} + \frac{a^2 - c^2}{b} \geq 2(a-b) + 2(c-b) + (a-c) = 3a - 4b + c$$

Peut-on poser ce problème à des élèves de collège ou de lycée ? Faut-il le présenter différemment, par exemple demander de prouver que :

$$\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{c^2 - b^2}{a} + \frac{a^2 - c^2}{b} \geq 2(a-b) + 2(c-b) + (a-c)$$

s'agit-il alors du "même" problème ?

## Quelle géométrie faut-il enseigner ?

Aux Olympiades Internationales de Mathématiques, la géométrie joue un rôle bien plus important que dans l'enseignement scolaire.

A Lyon, Bodo Lass a fondé le "club de mathématiques discrètes" qui attire, un week-end par mois, des élèves de plusieurs villes de France et même de Belgique, notamment la plupart des futurs candidats à l'Olympiade Internationale de Mathématiques. Bien que chercheur en combinatoire, Bodo Lass se passionne pour la géométrie. Mais pas n'importe quelle géométrie ! la géométrie projective...

Cette discipline rarement enseignée repose sur l'idée que si, à partir d'un point de l'espace, on projette une figure plane sur un autre plan non parallèle, les propriétés d'alignement et d'intersection de droites notamment sont conservées. Or il est toujours possible de trouver une telle projection qui envoie, par exemple, un cercle et un point quelconque intérieur au cercle en un cercle et son centre, et plus généralement une figure compliquée en une autre où le problème posé est bien plus évident.

La géométrie projective introduit également le birapport de quatre points d'une droite ou d'un cercle.

Sur une droite, il est défini par :

$$(A, B, C, D) = \frac{\left( \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \right)}{\left( \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \right)}$$

où  $\overline{CA}$  désigne la mesure algébrique de CA. On en déduit le birapport de quatre droites (a, b, c, d) passant par un même point O : c'est la valeur invariante du birapport (A, B, C, D) si A, B, C et D sont les intersections d'une droite quelconque ? avec les quatre droites a, b, c, d. Puis le birapport de quatre points A, B, C, D d'un cercle : c'est la valeur invariante du birapport des quatre droites (MA, MB, MC, MD) lorsque M parcourt le cercle. Or un certain nombre de transformations qui envoient une droite ou un cercle sur une droite ou un cercle laissent invariant ce birapport.

Aux Olympiades Internationales 2010, ceci a permis à un candidat Grenoblois de résoudre de manière remarquable un problème difficile :

**Énoncé.** Soit  $I$  le centre du cercle inscrit dans le triangle  $ABC$  et soit  $\Gamma$  son cercle circonscrit. La droite  $(AI)$  recoupe  $\Gamma$  en  $D$ . Soit  $E$  un point de l'arc  $\widehat{BDC}$  et  $F$  un point du coté  $[BC]$  tels que

$$\widehat{BAF} = \widehat{CAE} < \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Soit enfin  $G$  le milieu du segment  $[IF]$ .

Montrer que les droites  $(DG)$  et  $(EI)$  se coupent en un point de  $\Gamma$ .

\*\*\*

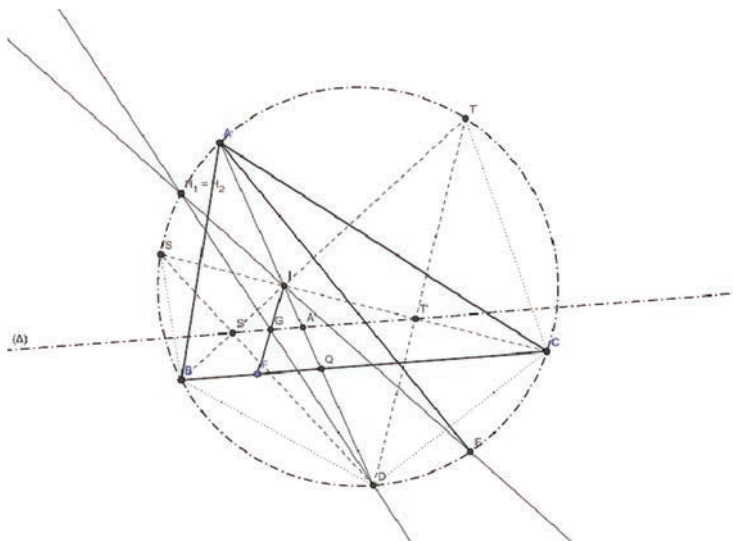
**Solution projective (due à Matthew Fitch).**

Tout comme  $D$  est le pôle sud de  $A$ , appelons  $S$  et  $T$  les pôles sud de  $C$  et  $B$ ,  $H_1$  et  $H_2$  les seconds points d'intersection respectivement de  $(DG)$  et  $(EI)$  avec le cercle  $\Gamma$ . L'idée est de construire une transformation, conservant le birapport, qui transforme chacun des points  $S, T$  et  $A$  en lui-même et le point  $H_1$  en  $H_2$ . Comme, pour  $S, T, A$  donnés, le birapport de  $STAH$  détermine  $H$  de manière unique sur  $\Gamma$ , cela prouvera que  $H_1 = H_2$ .

Or les transformations suivantes conservent chacune le birapport (voir figure ci-après) :

1. L'inversion de pôle  $D$  qui envoie  $\Gamma$  sur la parallèle  $(\Delta)$  à  $(BC)$  passant par  $G$ . Cette inversion transforme  $S, T, A$  et  $H_1$  en  $S', T', A'$  et  $G$ , intersections de  $(\Delta)$  avec  $(DS), (DT), (DA)$  et  $(DH_1)$  respectivement. Comme pour tout point  $M$  de  $(BC)$ , le milieu de  $[IM]$  appartient à  $\Delta$ ,  $S'$  et  $T'$  sont les milieux de  $[IB]$  et  $[IC]$  car, les triangles  $DBI$  et  $SBI$  (tout comme  $DCI$  et  $TCI$ ) étant isocèles (théorème du pôle sud),  $(DS)$  est médiatrice de  $[BI]$  - et  $(DT)$  de  $[CI]$ .
2. L'homothétie de centre  $I$  et de rapport 2 qui transforme  $(\Delta)$  en  $(BC)$ , envoyant  $S'$  et  $T'$  en  $B$  et  $C$ ,  $A'$  en le pied  $Q$  de la bissectrice  $(AI)$  et  $G$  en  $F$ .
3. L'involution de centre  $A$  qui échange  $B$  et  $C$ , en transformant  $(BC)$  en  $\Gamma$ ,  $F$  en  $E$  et  $Q$  en  $D$ .
4. L'inversion de pôle  $I$  qui conserve  $\Gamma$ , envoyant  $C$  en  $S$ ,  $B$  en  $T$ ,  $D$  en  $A$  et  $E$  en  $H_2$ .

La composée de ces quatre transformations envoie bien  $S, T, A$  et  $H_1$  en  $S, T, A$  et  $H_2$  respectivement, ce qui achève la démonstration.



Bien évidemment, un problème intéressant, notamment en géométrie, admet le plus souvent bon nombre de solutions totalement différentes, et celui-ci ne faisait pas exception. Beaucoup d'entre elles n'étaient pas projectives, et certaines faisables à partir des seuls programmes scolaires. Par exemple celle-ci :

**Énoncé.** Soit  $I$  le centre du cercle inscrit dans le triangle  $ABC$  et soit  $\Gamma$  son cercle circonscrit. La droite  $(AI)$  recoupe  $\Gamma$  en  $D$ . Soit  $E$  un point de l'arc  $\widehat{BDC}$  et  $F$  un point du côté  $[BC]$  tels que

$$\widehat{BAF} = \widehat{CAE} < \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

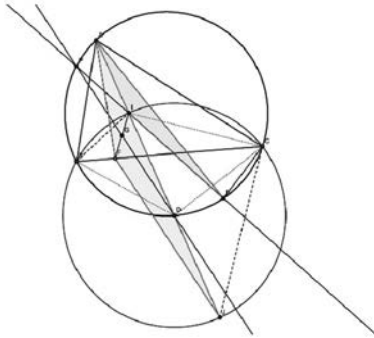
Soit enfin  $G$  le milieu du segment  $[IF]$ .

Montrer que les droites  $(DG)$  et  $(EI)$  se coupent en un point de  $\Gamma$ .

\*\*\*

**Solution élémentaire.**

Une « chasse aux angles » élémentaire suffit à montrer, classiquement, que le triangle  $DBI$  est isocèle (puisque  $\widehat{BDI} + 2(\widehat{IBC} + \widehat{CBD}) = \pi$ ), tout comme le triangle  $DCI$  (voir figure ci-après). Le cercle de centre  $D$  passant par  $I$  passe donc par  $B$  et  $C$ , et recoupe  $(AD)$  en un point  $J$  diamétralement opposé à  $I$  (et centre d'un cercle exinscrit de  $ABC$ , puisque  $\widehat{IBJ} = \frac{\pi}{2} = \widehat{ICJ}$ , mais cela ne nous est pas utile). Non seulement  $D$  est milieu de  $[IJ]$ , ce qui prouve que  $(DG)$ , droite des milieux du triangle  $IJJ'$ , est parallèle à  $(JF)$ , mais  $\widehat{AJC} = \widehat{IJC} = \widehat{IBC} = \widehat{ABI}$ . Comme en outre  $\widehat{JAC} = \widehat{BAI}$ , les triangles  $AJC$  et  $ABI$  sont semblables :  $\frac{AJ}{AB} = \frac{AC}{AI}$ . Or les triangles  $ABF$  et  $AEC$  sont eux aussi semblables, puisque par hypothèse  $\widehat{BAF} = \widehat{CAE}$  et que manifestement  $\widehat{ABF} = \widehat{ABC}$  et  $\widehat{AEC}$ , angles inscrits dans  $\Gamma$ , sont égaux. D'où :  $\frac{AB}{AE} = \frac{AF}{AC}$ . De ces deux relations résulte :  $AJ \times AI = AB \times AC = AE \times AF$ , ou encore :  $\frac{AJ}{AE} = \frac{AF}{AI}$ . Compte tenu de l'hypothèse  $\widehat{JAF} = \widehat{EAI}$ , cela fait apparaître deux nouveaux triangles semblables :  $AJF$  et  $AEI$ , donc une nouvelle égalité d'angles :  $\widehat{AJF} = \widehat{AEI}$ . Si  $(DG)$  et  $(EI)$  se coupent en  $P$ ,  $(DP)$  étant parallèle à  $(JF)$ ,  $\widehat{ADP} = \widehat{AEP}$ , ce qui suffit à prouver que  $A, D, P$  et  $E$  sont cocycliques.



Encore fallait-il y penser ! La géométrie notamment est un domaine où le fait d'avoir sous la main une palette riche de méthodes utilisables augmente les chances de trouver une solution. Bodo Lass affirme que tous les problèmes géométriques intéressants peuvent être résolus avec des méthodes projectives. Aux Olympiades Internationales 2010, un autre candidat français est parti d'une idée projective pour construire une démonstration qui, dans sa rédaction finale, n'était pas projective.