RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN (RMT)

PRÉSENTATION

Le Rallye Mathématique Transalpin (RMT) est une compétition entre classes du primaire et du secondaire (degrés 3 à 10 de la scolarité obligatoire, élèves de 6 à 16 ans). Il se déroule actuellement en Suisse romande, dont il est originaire, au Tessin, dans une douzaine de provinces ou régions d'Italie, en France dans le département de l'Ain, à Lyon et en Franche-Comté, au Luxembourg, en Belgique francophone et en Argentine. Les objectifs sont :

- pour les élèves, la résolution de problèmes, le travail en équipes, le débat scientifique et la justification des solutions ;
- pour les maîtres, l'observation des élèves en activité de résolution de problème, l'exploitation des sujets dans leur enseignement, l'analyse des résultats, la constitution d'une collection de problèmes expérimentés dont les stratégies et procédures de résolution ont été explicitement relevées ;
- pour les chercheurs en didactique, pour les formateurs et pour les animateurs, l'enrichissement de leurs connaissances sur les phénomènes liés à la résolution de problèmes dans les apprentissages en mathématiques.

Les épreuves (un entraînement qui détermine l'inscription de la classe, deux épreuves "officielles", une finale pour les classes qualifiées) sont constituées de 5 à 7 problèmes, de difficultés variées, afin que chaque élève puisse être actif et que l'ensemble de la tâche soit trop lourd pour un seul individu, aussi doué soit-il. En l'absence de leur enseignant, les élèves disposent de 50 minutes pour s'organiser, résoudre les problèmes, adopter une seule réponse pour la classe et la rédiger de manière très explicite, avec les justifications nécessaires, en décrivant leurs démarches et solutions.

Des journées d'études internationales permettent aux animateurs des différents pays participant de travailler ensemble à l'élaboration des sujets, aux analyses des résultats et aux exploitations didactiques des problèmes du RMT.

FICHE TECHNIQUE

Historique :

1993 : création du Rallye mathématique romand ouvert aux classes des degrés 3 à 5 de l'école primaire (8 - 11 ans), 20 classes y participent.

1996 : le Rallye mathématique romand devient Rallye Mathématique Transalpin (RMT) avec la participation de classes italiennes.

1997 : ouverture aux classes de degré 6 et extension à la région de Bourg-en-Bresse. Premières journées d'études internationales.

1998 : ouverture aux classes des degrés 7 et 8 ; extension à d'autres régions d'Italie, au Luxembourg et Israël ; participation totale de 500 à 600 classes.

2001 : participation de 1000 classes, 4e rencontre internationale, fondation de l'Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT).

2004 : plus de 2000 classes participent au 12e RMT, 8e journées d'études internationales, publication des actes de la 7e journée d'études. Ouverture aux classes des degrés 9 et 10.
2008 : près de 3000 classes participent au 16e RMT. Une première finale internationale réunit 12 classes de France, Suisse, Italie, Luxembourg et Suisse à Brigue (CH) à l'occasion des 12e journées d'études.
2010 : près de 4000 classes sont inscrites au 18e RMT, de 24 sections réparties en Italie, France, Belgique, Luxembourg, Suisse et Argentine. La 14e rencontre internationale se tient à Besançon, sur le thème des obstacles et erreurs.

Épreuves :
Collectives, par classes.
8 catégories, des degrés 3 à 10 (8 à 16 ans).
Problèmes : 5 à 7, à résoudre en 50 minutes, de difficultés échelonnées.
Beaucoup de problèmes sont communs à plusieurs catégories.
Les solutions sont à rédiger avec explications détaillées, prises en compte pour l'attribution des points. La préparation des problèmes est faite en coopération par les différentes équipes régionales et nationales. Les traductions (en français, italien, allemand, espagnol) sont rigoureusement comparées.

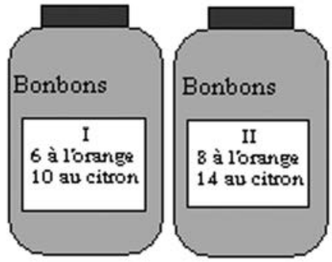
Compétition :
1. Épreuve d'entraînement en décembre, sous la responsabilité du maître. La classe s'inscrit en cas d'intérêt.
2. Épreuves I et II, de janvier à avril. Sur la base d'un barème unique, les corrections et les classements sont organisés au plan régional.
3. Finales régionales, en mai ou juin. Les classes qualifiées sont réunies dans un même établissement scolaire et disputent l'épreuve finale.
4. Une analyse comparée des solutions des meilleures classes finalistes de chaque région permet d'attribuer un titre de classe "championne" de chaque catégorie au plan international.

Partenaires :
L'association ARMT, l'unité locale de recherche en didactique du Département de Mathématiques de l'Université de Parme (Italie), divers instituts de formation des maîtres et départements de mathématiques universitaires, selon les régions.

Contacts,
ARMT, coordinateurs internationaux :
Site Internet : *www.armtint.org*
Roland Charnay, (France)
e-mail: *roland.charnay@sfr.fr*
Lucia Grugnetti, (Italie)
e-mail : *lucia.grugnetti@unipr.it*
François Jaquet, (Suisse) Président d'honneur
e-mail : *f_jaquet@orange.fr*

1. LES POTS DE BONBONS

Dans un premier pot, Grand-mère met 6 bonbons à l'orange et 10 au citron.
Dans un deuxième pot, elle met 8 bonbons à l'orange et 14 au citron. Les bonbons sont de même forme et enveloppés de la même façon.
Comme Grand-mère sait que Julien n'aime pas le goût du citron, elle lui dit :
Tu peux prendre un bonbon. Je te laisse choisir le pot dans lequel tu pourras glisser ta main, sans regarder à l'intérieur.



Julien réfléchit bien et choisit enfin le pot où il pense avoir la meilleure chance de prendre un bonbon à l'orange.

À la place de Julien, quel pot auriez-vous choisi ?
Justifiez votre réponse en expliquant votre raisonnement.

Domaine de connaissances
- Arithmétique : proportionnalité, approche de l'idée de " probabilité "

Analyse de la tâche (pour des élèves de 11 à 14 ans)
A) Se rendre compte qu'il ne suffit pas de choisir le pot qui a le plus de bonbons à l'orange ou le moins de bonbons au citron, mais qu'il faut aussi tenir compte des deux quantités simultanément, par un rapport de grandeurs.
B) Organiser les quatre données et mettant en évidence les deux couples correspondants

	pot I	pot II
orange :	6	8
citron :	10	14

et choisir le type de la relation à observer entre les couples : relation "additive" (somme ou écart) ou relation "multiplicative" (produit ou rapport) ou autre relation.
C) Se déterminer pour la comparaison des rapports

soit du nombre de bonbons à l'orange au nombre de bonbons au citron, dans chaque pot ;

soit du nombre de bonbons à l'orange au nombre total des bonbons de chaque pot ;

...

et calculer ces rapports en nombres décimaux ou en fractions facilement comparables (de même dénominateur ou de même numérateur) par exemple 6/10 > 8/14 car 84/140 > 80/140 ou 6 : 10 = 0,6 > 8 : 14 = 0, 57...

et finalement interpréter les comparaisons pour en déduire que le choix du premier pot est le plus favorable au tirage d'un bonbon à l'orange.

Commentaires
L'examen de plusieurs centaines de copies de groupes d'élèves n'a fait apparaître que quelques réponses (évoquées en (A) dans l'analyse de la tâche) ne prenant en compte qu'un type de bonbons :
Julien doit prendre le pot n° 1 car il y a moins de bonbons au citron que dans le pot n° II.

Beaucoup d'adultes peuvent se demander pour quelle raison la tâche de choix entre une comparaison d'écarts ou une comparaison de rapports (en B dans l'analyse a priori) est aussi fréquente aux degrés du Collège, car, pour eux, la question est résolue depuis fort longtemps.

Pourtant, les réponses fondées sur une comparaison des écarts au sein des pots (de 6 à 10 et de 8 à 14) ou d'un pot à l'autre (de 6 à 8 et de 10 à 14) sont majoritaires chez les élèves de degré 6 (11-12 ans) : 75% ; elles représentent environ 50% l'année suivante (12-13 ans ; niveau 5^{e}) et subsistent encore, environ 25% chez les élèves plus âgés (13-14 ans ; niveau 4^{e}). En voici deux exemples choisis parmi les copies analysées :
- le premier d'une comparaison au sein d'un pot, *Nous avons choisi le no 1 car il n'y a que 4 bonbons à l'orange de moins qu'au citron tandis que dans le no 2 il y a 6 bonbons de moins, donc il y a plus de chances ;*
- le second, fondé sur une comparaison d'un pot à l'autre : *Nous avons choisi le pot I car : dans le pot II il y a que 2 bonbons de plus à l'orange mais 4 de plus au citron.*
Il faut relever ici que les toutes les stratégies, inadéquates, relevées ci-dessus conduisent au pot I, c'est-à-dire à la "bonne réponse".
La troisième catégorie de procédure, fondée sur le calcul de rapports (C dans l'analyse de la tâche), ne devient majoritaire que dès 13 à 14 ans (avec 70%) alors qu'elle n'atteint lors des deux années précédentes que , respectivement, 6% et 48%.

Voici un exemple fondé sur la comparaison des rapports "orange/citron" qui conduit certes à la réponse attendue mais confond "chance" avec la probabilité.
Dans le premier pot il y a 60% de chance qu'il y ait un bonbon à l'orange car 6 oranges/10 citrons = 60 oranges/100 citrons alors que dans le deuxième il n'y aura que $8 \times 100/14 \approx 57,142857\,\%$
Julien prendra le 1er pot.
La comparaison des rapports "orange/nombre total de bonbons dans le pot" est un peu plus fréquente que la précédente et se rapproche plus d'une des définitions de la probabilité : "nombre de cas favorables/nombre de cas possibles".
En voici un exemple :

Le nombre des bonbons de la boîte n° 1 est égal à 16.
En divisant le nombre des bonbons à l'orange (6) et au citron (10) par 16, on obtient alors : Bonbons à l'orange : 37,5% ; Bonbons au citron : 62,5 %.

Le nombre des bonbons de la boîte n° 2 est égal à 22.
En divisant le nombre des bonbons à l'orange (8) et au citron (14) par 22, on obtient alors : Bonbons à l'orange : 36% ; Bonbons au citron : 64 %.

Si j'étais à la place de Julien, j'aurais choisi le pot n°1, car il a plus de chances d'avoir un bonbon à l'orange (37,5 % contre 36 % dans le pot n°2).

Ces résultats ont été confirmés par les analyses conduites dans les sections du RMT de Suisse, d'Italie, du Luxembourg et de Belgique. Dans cette situation d'approche intuitive de la probabilité, le passage de la comparaison des écarts à la comparaison des rapports arrive tardivement, vers 12 à 14 ans seulement.

D'un point de vue didactique, l'intérêt du problème est l'apparition de deux procédures, l'une en adéquation avec la situation et l'autre inadéquate mais conduisant cependant à la solution attendue : le choix du pot I.

Il est évident qu'il ne suffit jamais de s'intéresser à la réponse donnée mais qu'il faut toujours savoir d'où elle vient. Ceci ne simplifie pas le travail d'examen des copies d'élèves qu'on ne peut pas simplement classer en "juste" ou "faux". Le professeur doit, dans le cas où tous ses élèves ont résolu le problème des *Pots de bonbons*, conduire une séance de validation collective où les deux procédures des "écarts" et des "rapports" vont certainement apparaître (à moins qu'on ait "enseigné" préalablement la bonne procédure aux élèves pour leur éviter cet obstacle qui leur aurait "appris" à surmonter le conflit écart / rapport.)

C'est le débat collectif qui doit convaincre les élèves que la procédure de comparaison des écarts est inadéquate. Une méthode consiste à varier les nombres de bonbons au sein des pots.

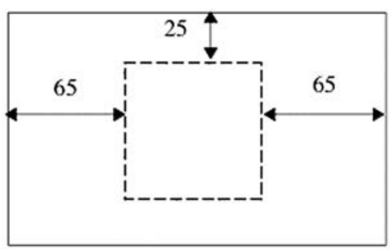
2. LA NAPPE

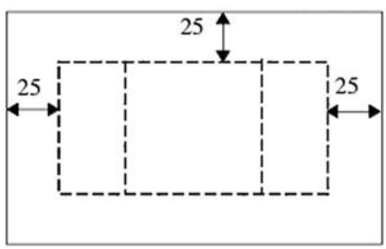
Dans la salle à manger de Luc, il y a une table carrée avec des rallonges. Quand les rallonges sont sorties, la table devient rectangulaire et sa longueur est le double de sa largeur.
Une nappe placée sur la table rectangulaire retombe alors de 25 cm de chaque côté. La même nappe placée sur la table carrée, retombe de 65 cm de chacun des deux côtés où les rallonges sont rentrées.

Quelles sont les dimensions de la nappe ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Domaine de connaissances
- Géométrie : carré et rectangle
- Arithmétique : opérations avec les nombres naturels
- Algèbre : équations de premier degré

Analyse de la tâche (pour des élèves de 11 à 15 ans)
- Interpréter géométriquement la situation en se rendant compte que pour passer d'un carré à un rectangle dont la longueur est le double de la largeur, les rallonges doivent être deux "demi-carrés" (si elles sont égales, ce qui est habituel) ou former un carré (si elles n'étaient pas égales).





- Constater que la différence entre 65 et 25 correspond à une largeur de rallonge de 40 (ou que la différence globale entre 130 (2 x 65) et 50 (2 x 25) est 80 et correspond à l'allongement total dû aux rallonges (mesures en cm).
- En déduire que le carré a un côté de 80, la table avec les rallonges a une longueur de 160 et que la nappe a des dimensions de 130 (80 + 2 x 25) et 210 (160 + 2 x 25) (mesures en cm).

Il y a encore de nombreux autres cheminements dans la recherche de la solution du problème, dont la voie algébrique : en désignant par x la mesure du côté de la table, en cm, on écrit l'équation $2x + 50 = x + 130$, dont la solution est 80, conduisant aux mesures des côtés de la nappe :

(80 + 50 = 130 et 160 + 50 = 210).

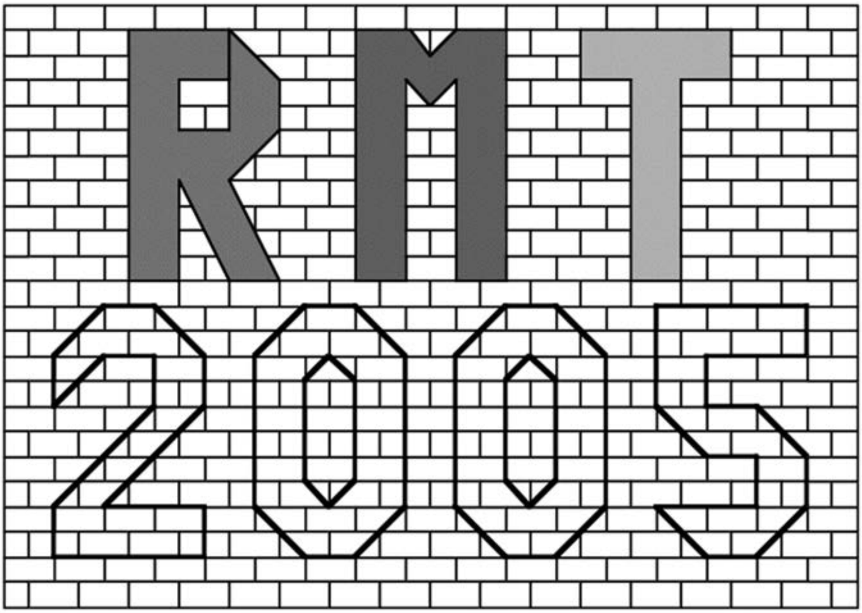
Commentaires
Le problème ne présente pas de difficulté du point de vue des opérations arithmétiques. Les figures du carré et du rectangle sont aussi familières et ne devraient pas constituer des obstacles. L'enjeu se situe au niveau du passage du cadre géométrique à celui des relations entre les mesures des côtés des objets. Les élèves se rendent bien compte que la différence entre les deux données 65 et 25 sera déterminante pour la résolution du problème mais ils ne savent qu'en faire.

On constate ainsi un échec presque total à 11 et 12 ans (près de 90%) à une réussite moyenne (de 50%) vers 13 - 15 ans.

Les élèves les plus jeunes n'arrivent pas à "entrer dans le problème", seuls ou lorsqu'ils travaillent en groupe. On peut faire l'hypothèse que cet échec est dû au manque d'activités où le passage d'un cadre à l'autre est valorisé et validé. Il faut en effet instaurer un va-et-vient entre l'élaboration de la représentation géométrique et sa transcription numérique dans le domaine des mesures comme le montre l'analyse de la tâche. De nombreuses pratiques scolaires sous-estiment la complexité de ce va-et-vient et les propriétés métriques des figures en jeu ; les données y sont déjà "prêtes à l'emploi", il suffit de les intégrer dans des schémas de résolution enseignés.
Dans le problème de *La nappe*, il faut revenir aux dimensions de la table à partir de données "relatives".

3. RMT 2005

Sur le mur de l'école, on a peint l'intérieur des lettres R, M et T pour la prochaine finale du Rallye Mathématique Transalpin. Il reste encore à peindre l'intérieur des quatre chiffres de 2005.
Sophie va peindre, le "2" et le premier "0". Marc peindra l'autre "0" et le "5".



Qui utilisera le plus de peinture ?

Domaine de connaissances
- Mesure : détermination de l'aire de figures par pavage, avec détermination préalable d'une unité commune
- Géométrie : décomposition et recomposition de rectangles en carrés, triangles et trapèzes rectangles

Tâche de l'élève (pour des élèves de 8 à 11 ans)
- Lecture de l'énoncé et observation des quatre chiffres. Se rendre compte que la quantité de peinture dépend de l'étendue des surfaces à recouvrir (l'aire) et non de leur pourtour ou de leur forme.
- Constater éventuellement que les deux "0" étant identiques, leurs aires sont les mêmes et, par équivalence, simplifier la recherche en ne comparant que les chiffres "2" et "5".

- Pour comparer les aires, choisir entre différentes méthodes :
Soit procéder par éliminations simultanées de pièces ou de groupes de pièces de même aire dans chacun des chiffres "2" et "5" pour constater qu'il reste l'équivalent d'un rectangle dans le "5" lorsque toutes les autres pièces ont été marquées successivement

Soit procéder par comptage des différentes pièces de chaque figure :
dans le "2" : 9 rectangles, 4 carrés, 8 triangles, 5 trapèzes, (26 pièces en tout),
dans le "5": 10 rectangles, 6 carrés, 2 triangles, 6 trapèzes, (24 pièces en tout),
se rendre compte qu'il ne faut pas s'intéresser au nombre total de pièces mais qu'il faut prendre en compte les équivalences entre pièces :

1 rectangle = 2 carrés = 4 triangles, 1 trapèze = 3 triangles, ...

procéder aux échanges pour pouvoir compter les deux aires.

- Déterminer la mesure de l'aire de chaque chiffre en choisissant une seule unité de mesure et en regroupant les autres pièces pour former des rectangles, au fur et à mesure du comptage .

- Trouver, par l'une de ces procédures ou une autre qu'il y a 17 rectangles (ou 34 carrés, ou ...) dans le "2", 18 rectangles (ou 36 carrés, ou ...) dans le "5" et 21 rectangles (ou 42 carrés, ou ...) dans le "0") et en déduire que c'est Marc qui utilisera le plus de peinture.

Commentaires :
Le problème "RMT 2005", comme l'indiquent les lignes précédentes, est conçu spécifiquement pour un travail de classe dans la mise en place du concept de mesure d'aire et, pour faire prendre conscience aux élèves de la nécessité d'une unité commune. La réponse *C'est Marc qui utilisera le plus de peinture* n'a donc d'intérêt que si elle entre en conflit avec l'autre : *C'est Sophie* ..., et est suivie d'un débat.
On peut ainsi exclure les variantes d'exploitation du problème "sans intervention de l'enseignant" ou "avec une trace écrite seulement" et ne conserver que celles qui organisent une "mise en commun" des solutions trouvées par les élèves ou groupes d'élèves.
Les expérimentations de ce problème ont montré en effet que les deux réponses "Marc" - sur la base d'assemblages des différentes parties de brique - et "Sophie" - par un simple comptage de parties - apparaissent presque toujours au sein d'une même classe, aux degrés 3 ou 4 et même encore au degré 5. Les tentatives de mesurage des périmètres des deux chiffres 2 et 5, bien que longues et peu précises, sont aussi fréquentes à ces degrés, par un usage non raisonné de l'instrument qui "fonctionne" si bien pour les longueurs : la règle graduée.
Au cours de la mise en commun, les élèves qui sont capables d'opérer des échanges simples comme, par exemple, celui d'un rectangle par deux carrés, ou de manipuler des équivalences comme, par exemple : un carré vaut deux

triangles, un rectangle vaut deux carrés, et par conséquent un rectangle vaut 4 triangles, ... devraient arriver à convaincre leurs camarades qui ne tiennent pas compte de la grandeur des pièces avec lesquelles ils ont recouvert leurs deux chiffres "2" et "5".

Dans le même ordre d'idées, certains élèves qui ont compris qu'il n'est pas nécessaire de recouvrir les "0" doivent pouvoir expliquer à leurs camarades le principe d'équivalence mobilisé. Par exemple : *Comme le "0" est le même pour Marc et pour Sophie, il suffit de comparer le "2" et le "5"* .

Dans un processus de construction du concept de la mesure d'aire, il faudrait susciter, si elle n'apparaît pas spontanément, une procédure qui va au-delà d'échanges "occasionnels". La procédure générale consiste à exprimer les aires des deux chiffres au moyen d'une même unité. Par exemple : aire du "2" = 17 et aire du "5" = 18, en rectangles unités, deviennent respectivement 34 et 36 en carrés unités ou 68 et 72 en triangles unités.

Compléments didactiques :
D'un point de vue mathématique, les différentes étapes de l'attribution d'une mesure sont les suivantes :

- Identification de la grandeur parmi toutes celles qui entrent "en concurrence" à propos de l'objet physique : le mur est composé de briques dont on observe les faces visibles, qui ont un périmètre, une couleur, d'autres caractéristiques, mais dont on ne s'intéresse qu'à l'aire.

- Lorsque la grandeur est identifiée, il faut s'assurer qu'elle a certaines propriétés qui la rendent "mesurable" (dans notre cas, il faut savoir reconnaître les briques de même aire, les comparer selon cette grandeur, en "assembler" deux d'entre elles, en vue de l'addition des mesures, pour en obtenir une troisième, plus grande, les "séparer" en parties plus petites, etc).

- Par itération d'un même objet dans l'opération "d'assemblage", apparaît la multiplication par un nombre naturel, puis la "décomposition" d'un objet en parties de même grandeur conduit à la division. Ces deux opérations se combinant, elles permettront d'exprimer une grandeur en fonction d'une autre, au moyen de nombres rationnels, considérés comme des opérateurs.

- Finalement, on arrive à la mesure lorsqu'on choisit de rapporter toutes les grandeurs à une grandeur unité et le rapport s'exprime alors par un nombre positif : la mesure de la grandeur.

Les mesures de longueur peuvent s'accompagner de manipulations simples consistant à reporter la longueur-unité ou à placer une règle graduée ou un ruban le long de la longueur à mesurer. Pour les aires, les premières comparaisons se font par superposition ou recouvrement (ce qui ne sera plus possible pour les volumes).

Le principe d'addition des mesures est acquis par l'élève qui, par son expérience, admet que l'aire d'un puzzle est égale à la somme des aires de ses pièces, sait reporter des "pavés-unités" choisis en fonction des surfaces à mesurer, a déjà vu l'intérêt du carré comme unité de mesure.
Mais lorsqu'on va au-delà des constructions et des visualisations de l'espace sensible, de nouveaux obstacles apparaissent, en particulier lorsque les surfaces à comparer ne sont pas mobiles ni à proximité immédiate, ni recouvrables par un nombre restreint d'unités. Il n'existe en effet pas d'instrument de mesure adapté aux aires, comme la règle l'est pour les longueurs. On est ici en présence d'une grandeur composée, qui dépend de deux mesures de longueur qu'il faudra multiplier.

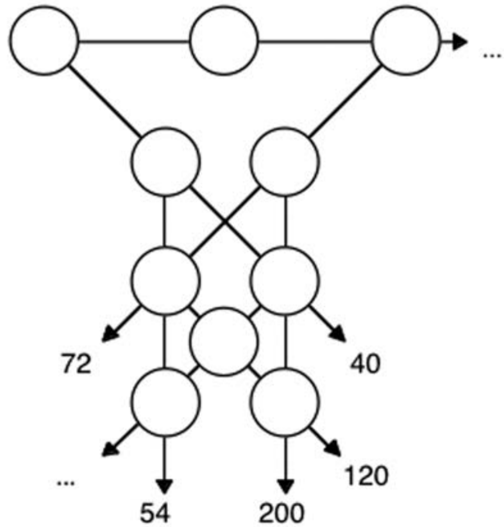
C'est un nouvel obstacle que l'élève aura à affronter, dès l'école secondaire, au passage des nombres naturels aux nombres rationnels, puis réels. Dans le cas d'un rectangle, la règle lui permettra de déterminer la mesure de la longueur et de la largeur, qu'il sait additionner ou doubler pour aboutir au périmètre. Les grandeurs à mesurer et à calculer sont de même nature, ce sont des longueurs. Pour l'aire en revanche, si les deux grandeurs à mesurer sont de même nature (des longueurs), la grandeur résultante est de nature toute différente (une aire). Le rectangle de 3 m sur 6 m a un périmètre de 18 m et une aire de 18 m^2. L'égalité des deux mesures "18" n'existe qu'au niveau des nombres, mais ne s'étend pas aux grandeurs.

4. PRODUITS EN LIGNE

Disposez les dix nombres de 1 à 10 dans les cercles de cette figure, de telle manière que le produit de trois nombres alignés soit le nombre indiqué en fin de ligne.

Calculez les deux produits manquants.

Combien y a-t-il de manières de disposer ces dix nombres ?



Domaine de connaissances :
- Multiplication : décomposition d'un nombre en facteurs premiers.
- Logique et raisonnement : conjonction et négation de critères.

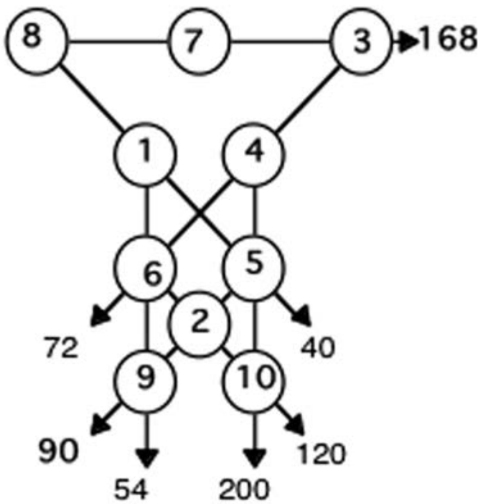
Tâche de l'élève (pour des élèves dès 11 à 12 ans)
- Lecture de l'énoncé : compréhension de "produit" et prise en considération des contraintes pour chaque alignement.

- Travailler par essais pour s'approprier les règles et constater qu'il faut organiser les recherches en tenant compte des différentes contraintes qui s'exercent sur chaque emplacement des nombres.

- Pour chacun des nombres, dresser l'inventaire des emplacements possibles et constater que les choix sont limités pour certains nombres comme le 9, le 5, le 10, le 7 en particulier.

- Placer l'un de ces nombres sur un emplacement possible (par exemple le 9 sur un des alignements "54" ou "72") et, par essais successifs, chercher à placer les autres nombres. Puis lorsqu'une disposition est trouvée, se demander s'il y en a d'autres et entreprendre d'autres essais.

- Pour éviter les tentatives longues et inutiles, analyser de manière plus approfondie la décomposition des nombres en facteurs premiers :
10 = 2 x 5 ; 9 = 3 x 3 ; 8 = 2 x 2 x 2 ; …ainsi que celle des produits à obtenir : 200 = 5 x 5 x 2 x 2 x 2 ; 120 = 5 x 3 x 2 x 2 x 2 ; 72 = 3 x 3 x 2 x 2 x 2 ; 54 = 3 x 3 x 3 x 2 et 40 = 5 x 2 x 2 x 2.
- On constate alors que le 7 est obligatoirement sur la ligne du haut, au milieu. Il n'y a alors plus que deux emplacements pour le 9 : en bas de la colonne du 54 ou en haut à droite (sur le première ligne). Si le 9 était dans cette dernière position, il faudrait que le 6 et le 3 soient dans la colonne du 54 (pour les deux facteurs "3" de ce nombre) mais pas dans l'alignement du 72 (dont les deux facteurs "3" seraient déjà pris par le 9), ni dans l'alignement du 40 (qui n'admet pas de facteur "3"). Il ne serait donc pas possible de placer le 6 et le 3 dans la colonne du 54 et, par conséquent, l'emplacement du 9 est déterminé de manière unique, en bas de la colonne du 54.



- Un raisonnement analogue sur les deux facteurs "5" qui interviennent dans 200 permet de dire que 5 et 10 occupent obligatoirement les deux emplacements inférieurs de la colonne du 200.
L'emplacement du 4 est alors déterminé de manière univoque : à l'intersection des alignements du 200 et du 72 (car 5 x 10 x 4 = 200). Le 10 ne peut alors plus se situer sur la ligne du 40 car pour compléter l'égalité 10 x … x … = 40, le 4 n'est plus disponible et le 2 n'est utilisable qu'une seule fois.
Les nombres 7, 9 4, 5 et 10 étant placés, les choix des emplacements des autres nombres se déterminent aisément, de manière aussi univoque. Il y a donc une solution unique au problème.

Développements mathématiques
L'activité "Produits en ligne" fait intervenir la décomposition multiplicative des nombres naturels. (On aborde là des propriétés essentielles de la multiplication, exprimées par les mathématiciens au travers du "théorème fondamental de l'arithmétique", qui dit que tout nombre naturel non premier et supérieur à 1 peut s'écrire d'une seule manière sous la forme d'un produit de nombres premiers.)

Comme le montre l'analyse de la tâche ci-dessus, l'expression des nombres en produit de facteurs premiers (qu'on ne peut plus décomposer) est un instrument efficace, indispensable pour toute l'arithmétique : multiples, diviseurs, communs multiples et diviseurs communs, fractions, …
Cette décomposition en facteurs permet ici de trouver les emplacements des nombres par déductions logiques plutôt que par essais successifs et éliminations. Elle permet en outre de s'assurer que toutes les solutions ont été trouvées ou de l'unicité de la solution comme dans ce cas.

Indications didactiques :
L'activité est "auto-validante" car il suffit de vérifier si les produits des nombres placés correspondent à ceux qui sont indiqués sur le schéma. L'écriture détaillée de tous ces produits constitue ainsi une exploitation minimale de l'activité.

Mais ces vérifications ne font intervenir que la connaissance de la table de multiplication et de produits élémentaires, sans exploiter la richesse de la situation du point de vue mathématique. Pour sensibiliser les élèves à l'efficacité de la "décomposition en facteurs premiers", il faut envisager une mise en commun et considérer cet atelier *Produits en ligne* comme une étape importante du parcours didactique sur les nombres premiers, dans le chapitre des multiples et diviseurs.

L'enseignant aura ici un rôle essentiel à jouer, après avoir laissé les élèves chercher la solution, au moment d'une validation collective où il faudra répondre à la question *Combien y a-t-il de manières de disposer ces dix nombres ?* de manière claire. L'unicité de la décomposition en facteurs premiers n'est pas une connaissance qui se construit spontanément : elle fait intervenir l'associativité et la commutativité de la multiplication dont les élèves sont peu conscients car ils rencontrent habituellement des produits de deux facteurs seulement ; elle demande une certaine familiarité avec les nombres premiers et les critères de divisibilité les plus courants ; elle fait appel à une méthode rigoureuse consistant à "extraire", dans l'ordre, les facteurs premiers du nombre à décomposer. C'est la raison pour laquelle l'enseignant devra être actif en fin de mise en commun, par des rappels, des suggestions et des aides. Il aura aussi la tâche de conduire les phases d'institutionnalisation qui suivront. Il devra encore proposer des activités de consolidation et d'assimilation des connaissances nécessaires à la décomposition en facteurs premiers.