RALLYE MATHEMATIQUE D'AUVERGNE

PRESENTATION

Le Rallye est destiné aux élèves de troisième et de seconde. La compétition n'est pas individuelle mais entre classes entières ou suffisamment représentées : plus de deux tiers.

Les classes ont à résoudre sept problème en deux heures. Les solutions doivent être rédigées. Une des solutions est présentée sous forme d'affiche.

Pour chaque exercice, le jury évalue :

- l'exactitude de la (ou des) réponse(s) aux questions posées,
- l'argumentation,
- la présentation.

FICHE TECHNIQUE

Historique :
Le premier Rallye a été organisé en 1998.

Compétition :
Elle a lieu un mercredi après-midi. Les centres d'épreuves sont les lycées qui accueillent aussi les collèges du secteur.

Epreuves :
Epreuves par classes. Une catégorie Troisième - Seconde.
Sept problèmes à résoudre en deux heures.

Partenaires :
Inspection Pédagogique Régionale
IREM

Contacts :
Anne CROUZIER
IREM
Complexe Scientifique Les Cézeaux
63177 AUBIERE

Exercice du rallye Auvergne-Sétif 2008 :

Enoncé :
Un batelier descend une rivière de 120 km. Il la remonte ensuite et met un jour de plus, car chaque jour, il fait 6 km de moins qu'en descendant. ***Combien a-t-il mis de jours pour descendre ?***

Solution de l'auteur :
Appelons N le nombre de jours mis par le batelier pour descendre la rivière. Lorsqu'il remonte la rivière, sachant que chaque jour il fait $6\,\mathbf{km}$ de moins qu'en descendant, au bout de N jours, de remontée, il lui restera encore $6 \times N\,\mathbf{km}$ à parcourir. Comme il met un jour de plus, il parcoura cette distance en un jour. En remontant, il parcourt ainsi $6 \times N\,\mathbf{km}$ par jour et comme il met $N+1$ jours pour ce faire, nous avons :

$$6 \times N(N+1)\,\mathbf{km} = 120\,\mathbf{km}$$

ce qui après simplification par "$6\,\mathbf{km}$" donne : $N(N+1) = 20$
Quel est l'entier qui multiplié par son successeur donne 20 ? C'est 4.

Réponse : $N = 4\,\mathbf{j.}$

Vérification :
En descendant, le batelier fait $120\,\mathbf{km}/4\,\mathbf{j.}$ soit $30\,\mathbf{km}$ par jour.
En remontant, il fait $120\,\mathbf{km}/5\,\mathbf{j.}$ soit $24\,\mathbf{km}$ par jour ce qui fait bien que chaque jour en remontant, il parcourt $6\,\mathbf{km}$ de moins qu'en descendant.

Analyse de l'exercice :
Robert Noirfalise, Irem de Clermont

Nous proposons ci-dessous un inventaire des diverses solutions proposées par les 101 groupes d'élèves qui ont abordé cet exercice. 77 copies donnent le bon résultat (soit à peu près les 3/4 des groupes). 15 fournissent une argumentation complètement valide mathématiquement, 36 une argumentation partielle et 26 se contentent de donner le résultat sans justification ou en disant qu'ils ont procéder par tâtonnement mais sans donner davantage d'indications sur la démarche suivie.

Les solutions utilisées par les élèves :
On peut distinguer deux types de solutions : des solutions algébriques d'une part et des solutions arithmétiques d'autre part.

2. a. Solutions algébriques.
Les élèves ont mis le problème en équations, le plus souvent avec, a priori, deux inconnues, le nombre x de jours mis par le batelier pour descendre la rivière et y la distance parcourue chaque jour à la descente.

Mises en équations :

- Ils expriment en fonction de x la distance parcourue quotidiennement à la descente et à la remontée et traduisent en équation la différence entre les deux:

"Descente : nombre de km/jour : $\frac{120}{x}$ *"Remontée : nombre de km/jour :* $\frac{120}{x+1}$

Equation du problème : $\frac{120}{x+1} = \frac{120}{x} - 6$

- Mises en équations sous forme de système consistant à écrire la distance du trajet sous deux formes correspondant, l'une à la descente et l'autre à la montée.

$$\begin{cases} 120 = xy \\ 120 = (x+1)(y-6) \end{cases}$$

Résolution :

La majorité des groupes ayant réussi à résoudre le problème, a choisi d'éliminer la seconde variable, y , en l'exprimant en fonction de la première. Ils sont arrivés avec quelques variations à une équation du second degré de la forme :

$$x^2 + x - 20 = 0 \text{ ou } x^2 + x = 20$$

Ne percevant pas que ces relations traduisent une relation de divisibilité, ils ont recours à des techniques de factorisation : le fait que, le plus souvent, ils aient utilisé x au lieu d'une notation signifiant qu'il s'agit d'un entier (n par exemple) n'est sûrement pas innocent et peut justifier qu'ils ne pensent pas à des propriétés arithmétiques de divisibilité.

$$x^2 + x - 20 = (x+5)(x-4)$$

ou encore :

$$x^2 + x - 20 = x^2 - 4x + 5x - 20 = (x-4)(x+5)$$

D'autres ont écrit :

$$x^2 + x - 20 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 20 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

ou encore

$$x^2 + x - 20 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{80}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}$$

Plus étonnant ces élèves qui utilisent le discriminant ;*"c'est un polynôme du second degré, on calcule le discriminant* $\Delta = 1 + 80 = 81$ *"* puis qui se servent des formes de solutions :

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2}$$

Une petite enquête dans une des classes (il y en a trois) utilisant cette solution laisse entendre qu'elle serait le fait de bons élèves ayant repéré ce type de technique de résolution d'équations du second degré dans leur manuel de seconde (le manuel Repères).

D'autres groupes, moins nombreux, ont éliminé x et l'ont exprimé en fonction de y et sont alors arrivés à une équation de la forme :

$$720 = y^2 - 6y$$

Un groupe l'a résolu de la façon suivante en pensant à ajouter 9 aux deux membres de l'équation :

$$720 + 9 = y^2 - 6y + 9$$

$$729 = (y - 3)^2$$

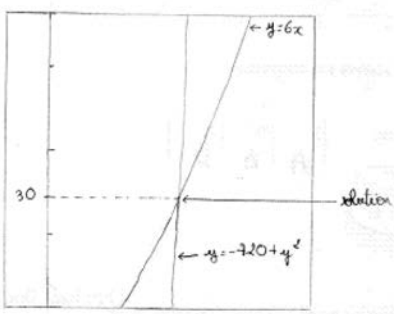
$$\sqrt{729} = y - 3$$

$$y = 30$$

Un groupe utilise aussi pour résoudre cette équation le discriminant, enfin un groupe utilise une calculatrice graphique :

"Comme nous ne pouvons résoudre cette équation algébriquement, nous l'avons résolue graphiquement à l'aide de la calculatrice."

Voici l'allure approximative de la courbe :



Nous déduisons que $y = 30$ mais nous le vérifions :

$6 \times 30 = 180$

et $-720 + y^2 = 180$

Donc $y = 30$.

Nous calculons x :

$120 = x \times 30$

$x = 4$

La solution du système est donc $(4 ; 30)$.

Cela signifie que le batelier parcourre 30 kms par un jour pendant 4 jours pour faire ses 120 kms, à l'allée (en descendant).

Mais les données sont différentes pour le retour.

Les solutions de type algébriques comme celles qui précèdent sont majoritairement le fait d'élèves de lycées mais on les rencontre aussi sous la plume de collégiens.

2.b Solutions arithmétiques

Nous avons qualifié d'arithmétiques les solutions utilisant le fait que N, le nombre de jours mis par le batelier pour descendre le fleuve, est un entier.

Certains groupes ont commencé par modéliser le problème de façon algébrique comme ci-dessus. Ils arrivent à l'équation $x^2 + x = 20$, la résolvent en remarquant que x étant entier la seule solution possible est $x = 4$.
D'autres factorisent, obtiennent $x(x+1) = 20$ et concluent.

Plus nombreux sont ceux qui utilisent d'emblée le fait que N est un entier et ils le font varier, $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$, $N = 4$, trouvent ainsi que $N = 4$ convient, contrairement aux autres valeurs. Ayant trouvé une solution, ils s'en satisfont et ne justifient pas que c'est la seule. (Voir en annexe, la solution proposée par une classe de LEP).
De façon pertinente, certains limitent les valeurs de N possibles en utilisant le fait qu'*en remontant le batelier fait 6 km de moins qu'en montant,* ce qui impose que N soit inférieur à 20. Sinon, il ferait moins de 6 km par jour en descendant, ce qui ne se peut pas. Les élèves font des essais pour des valeurs de N entre 1 et 19 et s'arrêtent quand ils ont trouvé une solution qui convient.

Signalons aussi ces solutions qui supposent simultanément que N, mais aussi la distance parcourue quotidiennement en descendant sont des entiers (ce qui en toute rigueur devrait faire l'objet d'une démonstration, rien n'imposant que la distance parcourue soit un entier).

A titre de premier exemple, les élèves d'un groupe cherchent alors les diviseurs de 120, ils en font la liste et trouvent la solution en remarquant que simultanément N et $N+1$ doivent être des diviseurs de 120.

La liste des diviseurs les conduit à examiner un nombre de cas limité : 1 et 2, 2 et 3, 3 et 4, 4 et 5, 5 et 6, et ils trouvent ainsi la solution et prouvent qu'elle est unique.
Un autre groupe examine les décompositions de 120 tout d'abord comme produit de deux entiers[1] , puis s'autorise que la distance parcourue ne soit pas entière tout en imposant que le nombre de jours reste entier.

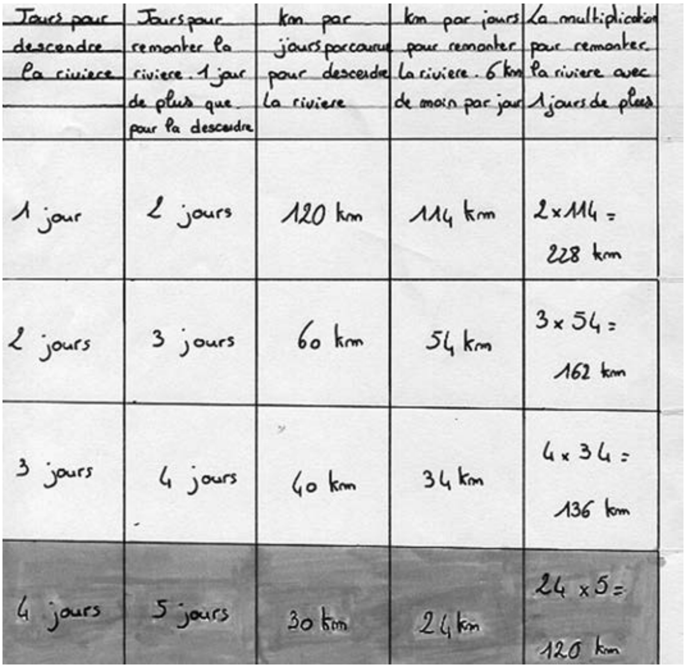
$$N \times Y$$
$$1 \times 120$$
$$2 \times 60$$
$$3 \times 40$$
$$4 \times 30$$
$$5 \times 24$$
$$6 \times 20$$
$$8 \times 15$$
$$16 \times 7,5$$

et remarquent que c'est uniquement pour la valeur $N = 4$ que l'on obtient avec l'entier suivant, en l'occurrence 5, une différence de 6 pour Y, la distance parcourue.

En conclusion, on peut dire qu'en situation de résolution de problèmes dans le cadre d'un rallye, les élèves savent faire preuve d'initiatives, de surcroît souvent heureuses, puisque cela les conduit à une réponse exacte même si celle-ci n'est pas toujours complètement argumentée

1 Cette liste est une copie d'une solution fournie par les élèves et témoigne d'essais ne se limitant pas aux entiers. La décomposition en entiers n'est pas non plus complète …

Annexe : une copie d'une classe de LEP, une seconde BEP.



Jours pour descendre la riviere	Jours pour remonter la riviere. 1 jour de plus que pour la descendre	km par jours parcourus pour descendre la riviere	km par jours pour remonter la riviere. 6 km de moin par jour	La multiplication pour remonter la riviere avec 1 jours de plus
1 jour	2 jours	120 km	114 km	2 × 114 = 228 km
2 jours	3 jours	60 km	54 km	3 × 54 = 162 km
3 jours	4 jours	40 km	34 km	4 × 34 = 136 km
4 jours	5 jours	30 km	24 km	24 × 5 = 120 km