RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU-CHARENTES

PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Le Rallye Mathématique Poitou-Charentes est une compétition de classes complètes. Les élèves s'organisent en groupes de recherche et se répartissent les problèmes à résoudre. Un même groupe peut prendre en charge, sur toute la durée de l'épreuve une question spécifique, en particulier pour les questions concernant la recherche documentaire. Depuis 2004 un sujet de recherche (CDI- Internet) est proposé avec l'envoi de l'épreuve d'entraînement : questions historiques et mathématiques concernant le sujet. Les élèves doivent donc, avant l'épreuve, réunir une documentation qui leur servira à répondre aux questions lors de l'épreuve. Depuis 2004, les recherches ont porté successivement sur Sophie Germain, Marie Agnesi, Eratosthène, Alicia Boole-Stott, le nombre PI, Le nombre d'or, et en 2010 sur les numérations et machines à calculer.

La classe doit fournir un dossier avec une feuille par problème. On demande des explications et on apprécie l'esprit des "copies" : propreté, dessins, humour. Les problèmes sont variés pour que chacun puisse participer avec son niveau de compétences. Le palmarès, les corrigés et les commentaires sont envoyés aux classes participantes après l'épreuve. Toutes les épreuves du rallye se trouvent sur le site de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes :

http://apmep.poitiers.free.fr/

FICHE TECHNIQUE

Historique :

1991 : création du rallye de Charente-Maritime et des Deux-Sèvres

1992 : Deuxième édition étendue aux quatre départements de l'académie.

1993 : Rallye annulé en raison de l'organisation des Journées nationales de l'APMEP à Poitiers.

1994 : Reprise du rallye

2007 : Extension du rallye aux classes de sixième, cinquième et quatrième.

2008 : Réduction de la durée de l'épreuve à une heure pour les classes de collège.

Épreuve :
Collective
Classes de secondes : 2 heures avec 8 ou 9 problèmes.
Classes de collèges : une épreuve par niveau de 1 heure avec 4 ou 5 problèmes.

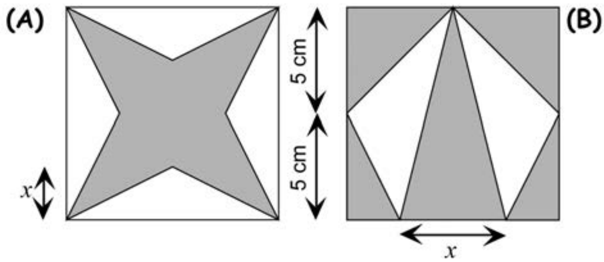
Compétition :
Épreuve d'entraînement envoyée à tous les collèges, lycées et LP, publics et privés de l'académie.
Épreuve finale concernant uniquement les classes inscrites où tous les documents sont permis.

Partenaires :
Régionale APMEP de Poitou-Charentes
IREM de Poitiers
IA-IPR, Rectorat

Contact :
APMEP, IREM de Poitiers, Faculté des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau,
86022 POITIERS Cedex

Jean Fromentin,
17 rue de la Roussille,
79000 NIORT.

Classes de seconde



Aires louches
Pour chacune des figures carrées suivantes A et B,

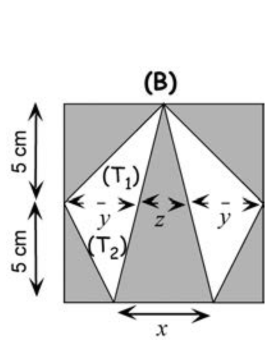
Calculez la valeur de x (si c'est possible) de façon que l'aire grisée soit égale à 80 cm².

Niveau scolaire :
Cet exercice est accessible dès la classe de quatrième puisqu'il met éventuellement en œuvre des résolutions d'équations.

Domaines mathématiques :
Les aires, la résolution de problèmes par l'arithmétique ou par l'algèbre.

Analyse de la tâche :
Pour le carré (A), les données ne permettent pas de calculer directement l'aire de la partie grisée. D'où le calcul préalable de l'aire des quatre triangles blancs
- par l'arithmétique : Les quatre triangles ont une aire de 20 cm² ; chaque triangle a une aire de 5 cm². Connaissant la longueur de la base, on en déduit la hauteur.
- par l'algèbre : résolution de l'équation $4(5x) = 20$.

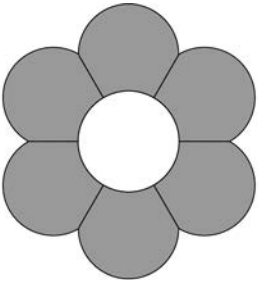
Pour le carré (B), deux méthodes possibles :
- le calcul direct de l'aire grisée en fonction de x
- le calcul de l'aire de la partie blanche en faisant intervenir de nouvelles inconnues : y et z comme le montre le dessin. Les quatre triangles T1 ou T2 ont même hauteur (5 cm) et même base y. Leur aire totale étant de 20 cm², chacun a une aire de 5 cm². D'où $2{,}5\,y = 5$, soit $y = 2$ cm. On en déduit que $z = 6$ cm et donc que $x = 12$ cm. Le problème n'a donc pas de solution.



Commentaires
La situation du carré (B) est donc très intéressante : bien que la résolution de l'équation aboutisse à une solution algébrique, il faut revenir à la situation du problème pour se rendre compte que cette solution n'est pas acceptable.

Si la première question [le carré (A)] a en général été bien résolue, beaucoup d'élèves ont été surpris par l'impossibilité à la deuxième question (lorsqu'ils s'en sont rendu compte !) et ont eu des difficultés à l'expliquer.

On vous fait une fleur



Le cœur de la fleur est un disque de rayon 1. Les contours extérieurs des pétales en gris sont des demi-cercles dont les centres sont les milieux des côtés d'un hexagone inscrit dans un cercle de rayon 2.
Quelle est l'aire totale des pétales ?

Niveau scolaire :
Compte tenu des calculs à effectuer (calcul avec des racines carrées), cet exercice est accessible seulement à partir de la classe de troisième.

Domaines mathématiques :
Les aires et le calcul numérique exact.

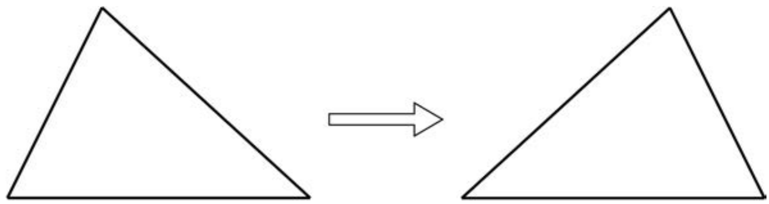
Analyse de la tâche :
Il s'agit de décomposer la figure en figures élémentaires dont on sait calculer les aires.
L'aire des pétales est égale à celle de l'hexagone (six triangles équilatéraux de côtés 2) augmentée des six demi-disques de rayon 1 et diminuée du disque central de rayon 1.

L'aire A est donc : $A = 6\sqrt{3} + 2\pi \approx 16,67$

Commentaires :
Les auteurs pensaient vraiment faire une fleur à des élèves de seconde avec un tel problème. Il n'en a rien été : 37 % des classes seulement ont réussi ce problème.
Cette question a été l'occasion d'observer des erreurs classiques [utilisation de la formule du périmètre pour le calcul de l'aire du disque], mais aussi inattendues [l'aire du triangle est égale au cube de son côté] !

Le triangle symétrique

Comment transformer un triangle en carton, qui n'est pas isocèle et dont tous les angles sont aigus, en son symétrique ? Il suffit bien sûr de le retourner !



Mais si les deux faces sont de couleurs différentes, on obtient un triangle d'une autre couleur. Il reste alors la solution de le couper en quelques morceaux bien choisis qui, réarrangés, formeront un triangle symétrique de la même couleur que l'original.

Sauriez-vous trouver un tel découpage en trois morceaux (les coupes doivent être rectilignes) ?

Niveau scolaire :
Quatrième - troisième. Les outils mathématiques mis en œuvre dans ce problème sont du niveau de la classe de sixième. Mais le traitement du problème apparaît tout de même difficile à ce niveau.

Domaines mathématiques :
La symétrie orthogonale, la médiatrice et ses propriétés dans le triangle.

Analyse de la tâche :
Les couleurs, au recto et au verso, étant différentes, on ne peut pas retourner les pièces du triangle qui seront découpées. L'idée de pièces ayant un axe de symétrie doit venir à l'esprit et amener à la propriété des médiatrices dans un triangle.

Il suffit donc de découper le triangle en trois morceaux suivant ses médiatrices : OA = OB = OC. Les pièces (1) et (2) pivotent autour de O en sens inverse l'une de l'autre pour prendre leur place indiquée dans la figure 2, la pièce (3) restant en place.

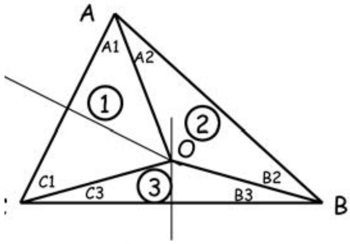


Figure 1

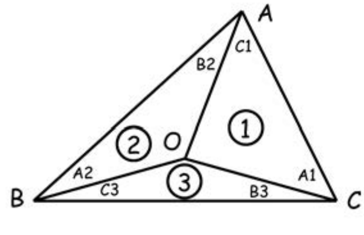


Figure 2

Commentaires :
Aucune classe n'a résolu ce problème qui met en évidence l'écart important qui peut exister entre la connaissance des outils mathématiques et leur utilisation dans la résolution d'un problème : " Il faut penser à… " ! Deux classes ont tout de même donné des éléments de solutions, mais n'ont pas abouti.

Classes de quatrième

Grivèlerie

Un restaurateur s'adresse à sa femme qui tient la caisse :

- Non mais tu te rends compte, ma caille, c'est incroyable ! Ce midi il y avait exactement autant de clients que de menus* possibles avec notre carte. Eh bien pas un seul client n'a commandé le même menu ! Pas un seul !
À croire qu'ils s'étaient passés le mot !

- Mon petit lapin, au lieu de t'émerveiller pour des coïncidences sans intérêt, tu ferais mieux de regarder le montant de la recette de ce midi. Oui, tu lis bien 380 € ! Il y a un client qui est parti sans payer ! Et si je compte bien c'est celui qui a choisi …

Pourriez-vous retrouver le menu choisi par le client indélicat ?

*Un menu comprend une entrée, un plat et un dessert.

Niveau scolaire :
Cinquième - quatrième. Les opérations à effectuer sont largement du niveau sixième. Mais le traitement de la situation le rend difficile à ce niveau.

Domaines mathématiques :
Dénombrement, calcul numérique.

Analyse de la tâche :
C'est tout d'abord une lecture attentive du texte qui amène à déterminer le nombre de menus possibles. Une fois ce travail effectué, les calculs sont relativement simples.
Puisque tous les menus possibles ont été choisis, il y a eu 2 x 3 x 4 = 24 clients.
Ainsi, chaque entrée a été choisie 12 fois, pour un coût de
(4 + 3,50) x 12 = 90 €.
Chaque plat a été choisi 8 fois pour un coût de
(6,50 + 8 + 12) x 8 = 212 €.
Chaque dessert a été choisi 6 fois pour un coût de
(4 + 3 + 5 + 4,50) x 6 = 99 €.
Le montant de la recette devrait donc être 90 + 212 + 99 = 401 €.
Le client qui n'a pas payé son repas a donc pris un menu à 21 €, ce qui est le seul menu le plus cher.
Il a donc choisi en entrée : l'assiette de charcuterie (4 €), en plat l'entrecôte garnie : (12 €) et en dessert : la tarte Tatin (5 €).

Commentaires :
Comme tout bon problème, ce n'est pas le contenu mathématique lui-même qui est en jeu ici mais l'analyse et le traitement de la situation. Les dénombrements ne font pas partie explicitement des programmes de mathématiques et pourtant c'est une activité très formatrice qui développe des qualités d'organisation et de méthode. Aussi, si 85 % des classes ont résolu ce problème, elles ont dépensé beaucoup d'énergie pour une telle réussite. En effet, la plupart des classes a détaillé tous les menus possibles et leur coût. Une classe a construit un arbre des possibilités et une autre classe a calculé le coût global des menus en précisant qu'il y avait "une répartition équitable".

Les situations de dénombrement sont à développer dans les classes.

Classes de cinquième

Année multiple

On dit que 2010 est une année multiple du fait que le nombre 20 formé par les deux premiers chiffres est un multiple du nombre 10 formé par les deux derniers chiffres. 2001 était une année multiple.

Combien y a-t-il d'années multiples dans ce troisième millénaire (de 2001 à 3000) et quelles sont-elles ?

Niveau scolaire :

Sixième - cinquième.

Domaines mathématiques :

Multiples et diviseurs.

Analyse de la tâche :

La définition d'une année multiple à partir de l'année 2010 et l'exemple avec l'année 2001 donnait tous les éléments pour répondre à la question posée. Il s'agissait donc de rechercher successivement tous les diviseurs de 20, 21, 22 jusqu'à 29. On ne les énumère pas ici, mais on en trouve 43.

Commentaires :

Si la notion de multiple et de diviseur est rencontrée dès le CM, la recherche systématique de l'ensemble des diviseurs d'un nombre n'est pas une tâche aisée et la réussite totale à ce problème a été très faible (10 %) ; sinon, ce sont 45 % des classes qui ont donné les bonnes années sur au moins six siècles. La principale difficulté rencontrée est l'absence de méthode dans la recherche des diviseurs. Une erreur assez souvent rencontrée aussi est et diviseurs dans le numéro de l'année : 2040, 2060, 2080, par exemple, étaient pour eux des “années multiples” !

Pavage
Tous les motifs du carreau ci-contre sont des carrés ou des triangles rectangles isocèles. Ils sont aussi de trois teintes : blanc, gris et noir.
On choisi l'aire du carré central gris comme unité d'aire.

1°) Quelle est l'aire totale de chacune des zones : l'ensemble des motifs blancs, l'ensemble des motifs gris et l'ensemble des motifs noirs ?

2°) Quelle est alors l'aire du carreau ?

3°) En découpant ce carreau en un nombre minimum de pièces, faites deux carreaux carrés de mêmes dimensions. Dessinez ces deux carreaux.

Niveau scolaire :
Sixième - cinquième.

Domaines mathématiques :
Géométrie : dénombrement d'unités d'aire

Analyse de la tâche :
Le carré - unité étant bien repéré, il s'agit, pour chacune des trois zones, de dénombrer les unités, les moitiés ou les doubles d'unités d'aires.

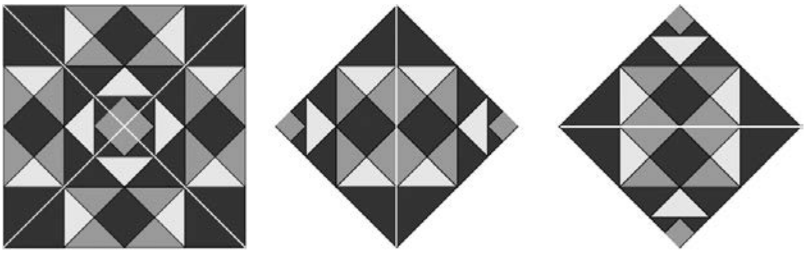
1°) Tous les triangles rectangles gris et blancs ont comme aire la moitié du carré - unité. La zone grise comporte 16 triangles et le carré central.
Son aire est donc **9**.

La zone blanche comporte 12 triangles. Son aire est donc **6**.

La zone noire comporte des triangles et des carrés de deux dimensions. L'aire du grand carré est égale au double de l'aire unité comme le montrent les pointillés au centre du dessin. Il y a 4 grands carrés, 4 grands triangles, 4 petits carrés et 4 petits triangles, et donc une aire de 17.

2°) L'aire du carreau est donc 9 + 6 + 17 = **32.**

3°) Le découpage attendu, en quatre parties, donne deux carrés aux motifs identiques.



Commentaires :
Déterminer des aires par dénombrement d'unités, sans faire appel aux centimètres carrés, est primordial pour de jeunes élèves, en particulier au CM et en 6e. Cette situation n'était pas excessivement difficile et pourtant 50 % seulement des classes ont déterminé correctement les aires des zones blanches et grises. C'est en effet au niveau de la zone noire que résidait vraiment le problème puisqu'elle avait des carrés et des triangles rectangles isocèles de deux tailles ce qui compliquait le dénombrement.

Certaines classes n'ont pas pu s'empêcher de mesurer le côté du carré - unité pour obtenir des aires en cm² !