RALLYE MATHEMATIQUE de la SARTHE

PRÉSENTATION

Ce rallye est ouvert à toutes les classes de tous les collèges sarthois.
C'est la classe entière qui travaille et doit s'organiser pour résoudre les énigmes mathématiques : la réponse est collective.

FICHE TECHNIQUE

Calendrier et contenu des épreuves :

- Deux épreuves de qualification se déroulent dans les collèges. Elles comportent généralement, dix petits problèmes et deux travaux géométriques.
- Une finale qui a lieu début juin sur un site de plein air, réunit les dix-huit classes issues des qualifications. Dix ateliers posent des problèmes dont la résolution fait appel à la logique, au calcul et à l'organisation.

Les objectifs :

- faire pratiquer des mathématiques ;
- aider à acquérir une méthode de travail en groupe ;
- entraîner au débat : argumenter, discuter de preuves, trouver des exemples et contre-exemples, vérifier…
- proposer un projet stimulant où s'impliquent tous les élèves d'une classe et qui permet des rencontres entre enseignants.

Organisation :

L'organisation est prise en charge par une équipe de professeurs (6 à 8 selon les années), avec le soutien de l'Inspection Académique de la Sarthe et des IPR.

Historique :

Le Rallye se déroule depuis 1990, avec des effectifs qui augmentent chaque année : 440 classes de 45 collèges en 2010, soit environ 11 000 élèves pour ce seul département.

Contacts :

Centre de ressources : Collège Kennedy - ALLONNES (Sarthe)
Professeur responsable : Gilles Ravigné
gilles.ravigne@ac-nantes.fr

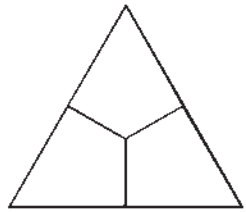
Tous les renseignements, sujets, réponses etc, figurent sur le site :
http://sarthe.cijm.org

MOSAïQUE

Conditions de travail.
Cet exercice était proposé aux élèves de 6e et 5e (11/13 ans) dans l'un des 10 ateliers de la finale 2009 du Rallye mathématique de la Sarthe (voir "Pliages et géométrie").

Enoncé
Allez au stand N° 2. où vous recevrez le matériel suivant :
- une feuille de pièces à découper. Ce sont des petites pièces triangulaires comme celle-ci ; chaque pièce est blanche et partagée en trois surfaces,
- quatre crayons de couleur : un bleu, un rouge, un jaune et un vert.

Vous allez colorier les trois surfaces de chaque pièce en utilisant une ou plusieurs couleurs mais seulement une couleur par petite surface.

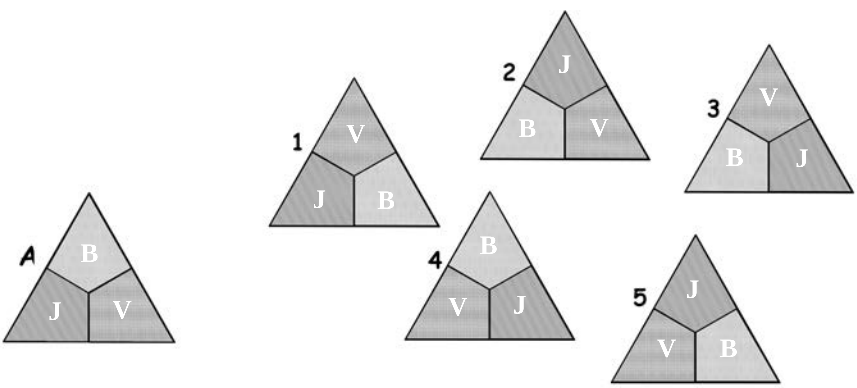


Attention, ici :

jaune = J bleu = B vert = V et rouge = R

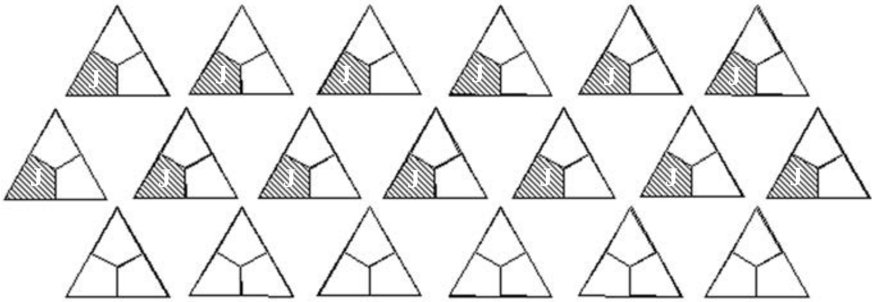
Partie 1 :

Question 1
Parmi les pièces 1, 2, 3, 4, et 5 il y a peut-être une (ou plusieurs) pièce(s) identique(s) à la pièce A. Laquelle (ou lesquelles) ?



La pièce A est identique à : …………

Question 2
Coloriez ici toutes les pièces (différentes) qui ont au moins une partie jaune.



Question 3 : ***Complétez ce tableau qui vous permettra de trouver le nombre total de pièces différentes qu'on peut obtenir. Construisez et coloriez toutes ces pièces.***
Il peut vous rester des pièces inutilisées et si vous n'en avez pas assez, vous pouvez en fabriquer (même forme, mêmes mesures).

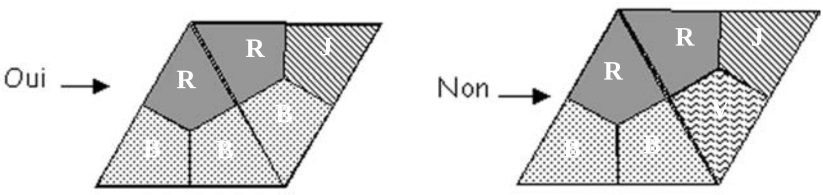
	Avec **1** couleur	Avec **2** couleurs	Avec **3** couleurs	TOTAL :
Nombre de pièces différentes				

Partie 2 :

Vous allez juxtaposer sans vide ni recouvrement (comme un puzzle ou une mosaïque) toutes vos pièces différentes coloriées, en respectant les conditions suivantes :

1) deux pièces ne peuvent se toucher que si les **deux** surfaces mises en contact sont de même couleur.

Exemple :

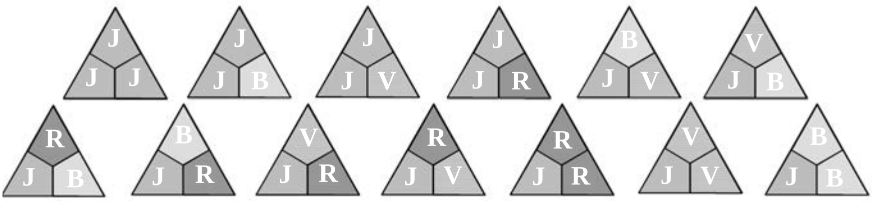


2) le polygone obtenu doit avoir le plus petit périmètre possible. L'unité de longueur est le côté d'une pièce (côté du triangle).

Question 4 : ***Quel est le périmètre de votre polygone ?***
Collez votre polygone en mosaïque sur la feuille réponse.

Solution question 1 :
La pièce A est identique à : 3 et 5

Solution question 2 :



Solution question 3 : Complétez le tableau :

	Avec **1** couleur	Avec **2** couleurs	Avec **3** couleurs	TOTAL :
Nombre de pièces différentes	**4**	**12**	**8**	**24**

Solution question 4 : Le plus petit périmètre qui a été obtenu est de 20 unités de longueur.

Commentaires :

Domaines mathématiques :
Dénombrement. Aire et périmètre : optimisation d'un périmètre avec une aire constante.

Analyse de la tâche :
Cet exercice demandait une bonne lecture de l'énoncé, une analyse "tranquille" des exemples. Beaucoup des erreurs étaient dues à un passage trop rapide sur ces guides pour aller trop vite au coloriage. Cet atelier a été peu réussi car assez difficile pour des groupes d'élèves travaillant en autonomie.
L'épreuve a été préparée à partir des travaux du plasticien Philippe Rips et avec son aide. Privilégiant l'aspect esthétique et la couleur des figures mises en place, il permettait aux élèves de construire un polygone polychrome qui pouvait être très réussi lorsque la méthode de fabrication était comprise.
Quant à l'apport mathématique, au collège il y a souvent confusion entre aire et périmètre ; on a ici une situation où, travaillant à aire constante, il faut minimiser le périmètre.

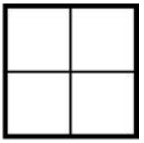
Prolongements éventuels :
Cet exercice méritait d'être repris en TP en classe. Eventuellement comme collaboration entre les cours d'arts plastiques et de maths.

D'autres figures géométriques, en particulier des carrés et des cubes, ont été conçues par Philippe Rips à partir des couleurs de base et assemblées avec différentes contraintes. En faisant varier ces contraintes un travail plus ou moins complexe de dénombrement est nécessaire qui fait souvent appel au raisonnement mathématique. Notons que la façon de procéder à ce comptage est différente de celle du plasticien et il est intéressant de confronter les deux méthodes.

Dans cette même finale 2009, un atelier analogue était proposé aux élèves de 4^{e} et de 3^{e}, avec des pièces carrées. Ce problème a été posé aussi aux concurrents du 10^{e} Rallye Mathématique de Paris, sous une forme un peu différente.

Il s'agissait de colorier les quatre carrés de chaque pièce en utilisant une ou plusieurs couleurs (rouge, jaune, vert, bleu) mais seulement une couleur par petit carré.

Partie 1 :
Combien de pièces différentes peut-on ainsi obtenir ? Coloriez toutes ces pièces différentes sur la feuille réponse 1.
Ne faites pas cela au hasard, réfléchissez d'abord. Pour vous aider, complétez le tableau.



Pour vous aider à organiser votre raisonnement, quelques pièces ont déjà été coloriées. Observez bien comment elles sont coloriées ; cela vous aidera.

	1C	2C	3C	4C	Total
Nombre de pièces différentes					

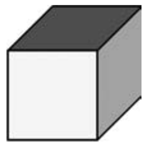
Partie 2 : ***Découpez vos pièces.***
Vous allez les juxtaposer comme une mosaïque (ou un puzzle) avec les règles suivantes :
1) Deux pièces ne peuvent se toucher que si les deux carrés mis en contact sont de même couleur.
Le but est de juxtaposer, sans vide ni recouvrement, toutes vos pièces coloriées.
2) Le polygone obtenu doit avoir le plus petit périmètre possible. L'unité de longueur est le côté d'une pièce.
Collez vos pièces sur la feuille réponse et indiquez le périmètre du polygone que vous venez d'obtenir.

Des réponses et d'autres commentaires sont disponibles sur le site
http://sarthe.cijm.org.

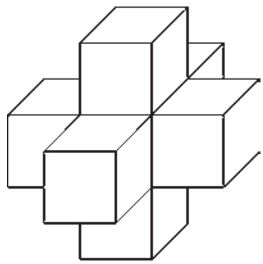
Cubes et polyèdres

Pendant l'année scolaire 2006/2007, le problème de géométrie constituait une sorte de fil rouge pour insister sur l'intérêt de corriger en classe les étapes au fur et à mesure de leur déroulement. Nous allons suivre ici les travaux de géométrie proposés aux élèves de troisième ; un travail analogue était donné dans les autres classes, adapté au programme de chaque niveau (cf. le site www.sarthe.cijm.org).

Énoncés

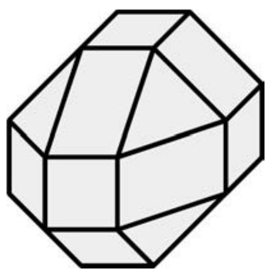


Jeudi 30 novembre 2006 - Niveau 3e
Première étape de qualification, problème de géométrie.
Les faces opposées de ce cube sont deux à deux de même couleur.
Dessus et dessous en bleu
Devant et derrière en jaune.
Droite et gauche en vert.
Sa surface a une aire totale de 96 cm².
Sur chaque face de ce cube, on colle un petit cube identique, sans retournement.
On obtient ce solide.



1) Colorier ses faces.
2) Calculer son volume.
3) Calculer l'aire totale de sa surface.
(Indiquer rapidement la méthode utilisée pour faire ces calculs ; n'oubliez pas les unités)

Mardi 6 février 2007- Niveau 3e
Deuxième étape de qualification, problème de géométrie.
Dans l'étape 1 vous avez travaillé sur ce solide, formé de 7 petits cubes dont l'arête mesure 6 cm. On veut maintenant fabriquer un étui pour ce solide. Le but de ce problème est de trouver la surface totale et le volume de cette boîte.



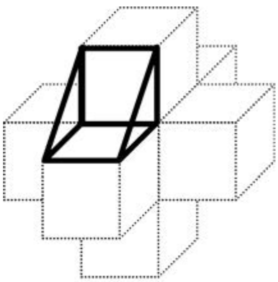
1) Analyse de la surface de cet étui pour calculer son aire.
Trois formes différentes composent cette surface.

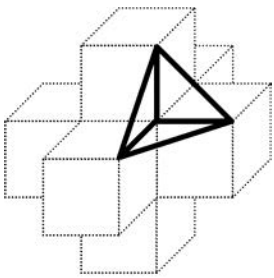
Quelles sont-elles et quelles sont leurs dimensions ?

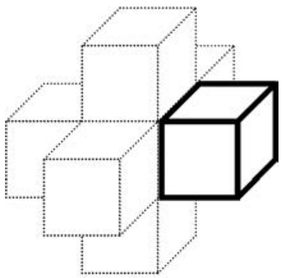
Compléter le tableau sur la feuille réponse.

Calculer l'aire totale A.

2) Analyse du solide pour connaître le volume de l'étui.
Trois sortes de solides le composent.
Pour chacun, indiquer sa nature (son nom), le nombre et son volume.
Calculer le volume de cet étui.

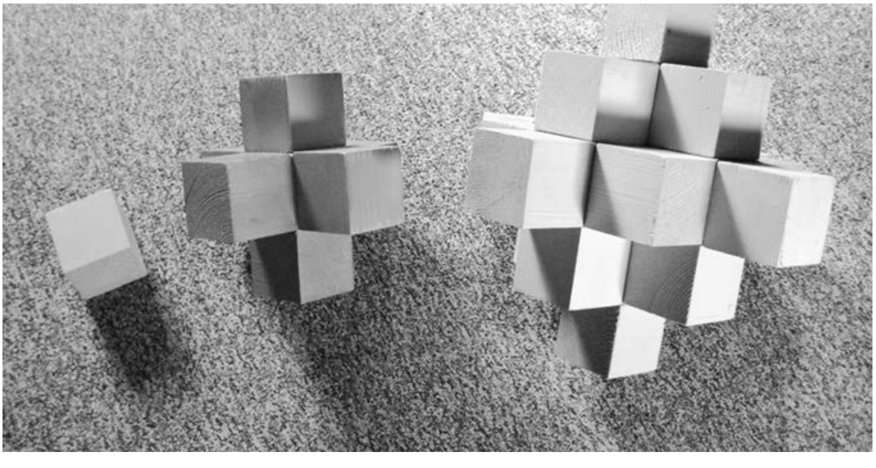

Solide 1


Solide 2


Solide 3

Jeudi 31 mai 2007- Niveau 3e
Finale. Atelier 6

1) Observez les objets placés sur la table de l'atelier 6. Ils doivent vous rappeler les questions des étapes précédentes.
2) Calculez le nombre de cubes utilisés pour fabriquer l'objet 3. Combien de rouges ? Combien de jaunes ? Expliquez rapidement vos calculs.
3) Calculez l'aire de la surface de l'objet 3.
Vous pouvez demander un cube à l'atelier 6 pour le mesurer.
4) On pourrait poursuivre les constructions : un objet 4, puis un objet 5, etc.
- De combien de cubes serait composé l'objet 4 ?
- De combien de cubes serait composé l'objet 5 ?



Commentaires

Domaines mathématiques :
Géométrie dans l'espace, cubes et solides composés de cubes. Polyèdres. Aires, volumes. Analyse d'un objet non classique. Notion de suite. Notion de dénombrement.

Analyse de la tâche :
Ces problèmes ne présentaient pas difficultés particulières et peuvent même être considérés, pris question par question, comme des exercices très scolaires. La tâche devient différente quand il faut enchaîner les recherches et faire preuve d'endurance jusqu'aux questions finales. Les élèves et professeurs étaient avertis que les questions allaient s'enchainer d'étape en étape ; cependant l'étape 2 pouvait être faite sans avoir corrigé la première étape mais elle perd alors une part de sa pertinence.

La présence des élèves sur le site de la finale permettait une présentation visuelle de la suite de polyèdres constitués de cubes collés. La question devient alors plus concrète et permet de laisser les élèves découvrir la règle qui régit l'évolution du polyèdre.

Prolongements éventuels.
D'autres exercices basés sur des empilements de cubes ont été proposés dans le cadre du Rallye Mathématique de la Sarthe. Il s'agissait déjà de faire évoluer un polyèdre constitué de cubes assemblés selon une règle à déterminer.
D'autres assemblages sont à imaginer.

Solutions :

ETAPE 1
Calculer son volume.
96 : 6 = 16 = 4 donc l'arête mesure 4 cm. Volume : 7×43 = **448 cm3**
Calculer l'aire de sa surface totale.
6×5×16 = **480 cm^2**

ETAPE 2

	C'est un ...	Nbre	Ses dimensions	Calcul de son aire	Son aire (arrondie à 1 mm²)
1e forme	**rectangle**	12	Largeur : 6 cm Longueur : $6\sqrt{2}$ cm	$6 \times 6\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$ cm²	50,91 cm²
			Largeur : 6 cm Longueur ? 8,5 cm	6 x 8,5 = 51 cm²	51 cm²
2e forme	**Triangle équilatéral**	8	Côté : 6 $\sqrt{2}$ cm Hauteur : $3\sqrt{6}$ cm	$6\sqrt{2}.3\sqrt{6}/2 = 18\sqrt{3}$ cm²	31,18 cm²
			Côté : 8,5 cm Hauteur : 7,35 cm	8,5x7,35/2= 31,24 cm²	31,24 cm²
3e forme	**Carré**	6	Côté : 6 cm	6²	36 cm²

On déduit l'aire totale :

$$A = 12 \times 36\sqrt{2} + 8 \times 18\sqrt{3} + 36 = 432\sqrt{2} + 144\sqrt{3} + 36 \times 6 \approx 1076,36\,\mathbf{cm}^2$$

$$A = 12 \times 51 + 8 \times 31,24 + 36 = 612 + 249,92 + 36 \times 6 \approx 1077,92\,\mathbf{cm}^2$$

FINALE
Nombre de cubes pour faire l'objet 3 : **25**
Nombre de cubes jaunes : 19 Nombre de cubes rouges : 6

Explications :
Pour compter les cubes, le plus simple est d'analyser l'objet par couches de cubes.

La couche *i* est la couche centrale (la plus grande) de l'objet de rang *i* et n_i est le nombre de cubes dans cette couche centrale. On appelle N_i le nombre de cubes de l'objet de rang *i*.

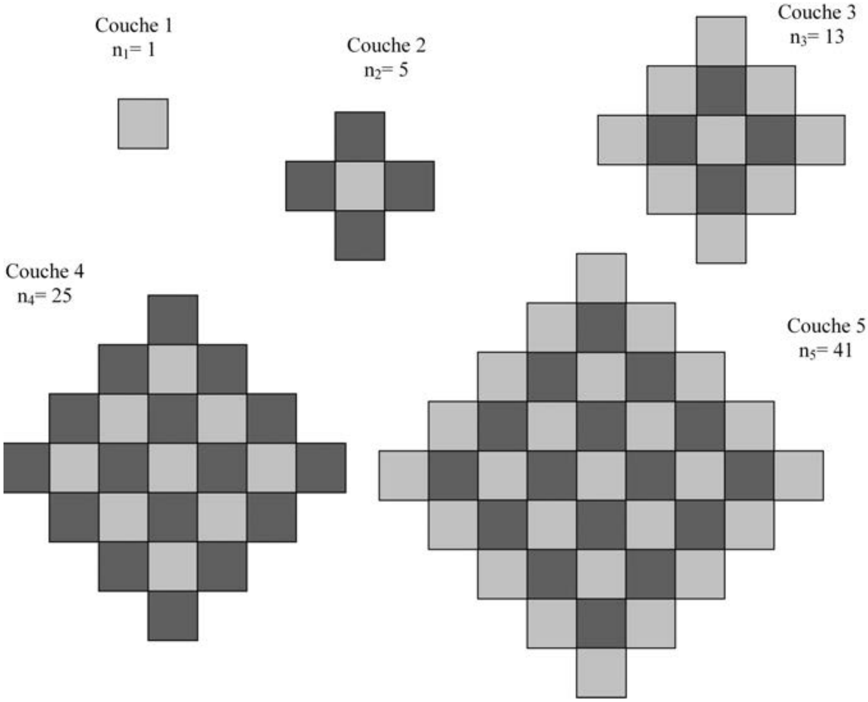
$$N_i = n_i + 2n_{i-1} + 2n_{i-2} + \cdots + 2n_3 + 2n_2 + 2n_1$$

Par exemple :

$$N_4 = n_4 + 2n_3 + 2n_2 + 2n_1$$

$$N_3 = n_3 + 2n_2 + 2n_1$$

$$N_2 = n_2 + 2n_1$$



Objet n°1 : **1 cube**

Objet n°2 : Une couche 2 et deux couches 1 : 5 + 2x1 = **7 cubes**

Objet n°3 : Une couche 3 et deux couches 2 et deux couches 1 :
13 + 2x5 + 2x1 = **25 cubes**

Objet n°4 : Une couche 4 et deux couches 3 et deux couches 2 et deux couches 1 :
25 + 2x13 + 2x5 + 2x1 = **63 cubes**

Objet n°5 : Une couche 5 et deux couches 4 et deux couches 3 et deux couches 2 et deux couches 1 :
41 + 2x25 + 2x13 + 2x5 + 2x1 = 1**29 cubes**

Aire de la surface totale de l'objet 3 : **2808 cm²**

Détail des calculs : La couche extérieure est faite de 18 cubes jaunes 12 cubes montrent 4 faces et 6 cubes montrent 5 faces. La surface est donc faite de 78 carrés de 36 cm². L'aire est égale à 78x36 = 2808 cm².

Pour l'objet 4 il faudrait **63 cubes.**

Pour l'objet 5 il faudrait **129 cubes.**

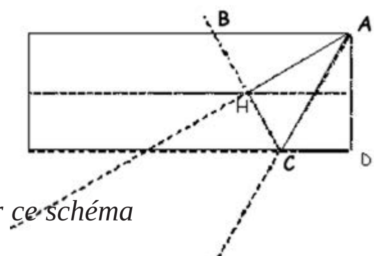
Pliages et géométrie

Conditions de travail :
Cet exercice était proposé aux élèves de 4^e et 3^e (13/15 ans) dans l'un des 10 ateliers de la finale 2008 du Rallye mathématique de la Sarthe.
La finale annuelle est l'une des particularités du Rallye en Sarthe. Elle se déroule sur un site de plein air, près du Mans et réunit les 18 classes qui se sont le mieux comportées lors des deux étapes de qualification : cinq classes en 6^e et cinq en 5^e, quatre en 4^e et quatre en 3^e. Les deux premières étapes se passent dans les établissements, avec le moins de matériel possible ; au contraire, la finale est l'occasion de proposer des exercices qui nécessitent du matériel et des manipulations plus complexes et contrôlables.

Dans le cas de cet exercice, les élèves recevaient des feuilles de papier cartonné ; ils pouvaient observer - sans toucher- les étapes successives des pliages.
Des réponses et commentaires sont également disponibles sur le site internet du Rallye de la Sarthe ***http://sarthe.cijm.org***

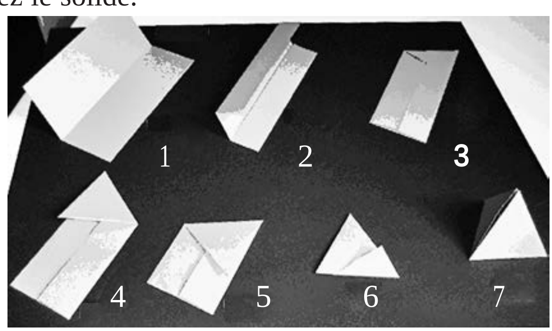
Enoncé :
A l'atelier 6 vous allez observer les étapes qui vous permettront de réaliser deux solides, sans aucun collage. Attention, n'allez pas trop vite, vous devez répondre à des questions au cours de ces réalisations.

Premier solide
Observez les plis effectués pour aller à l'étape 3.
Quelle est la nature du triangle ABC ? Démontrez.



Aide : on pourra, par exemple, utiliser ce schéma

Terminez le pliage et formez le solide.
Quel est le nom précis de ce solide ?
Justifiez



On note
V_1 son volume ;
mais on ne demande pas de le calculer.

Second solide.

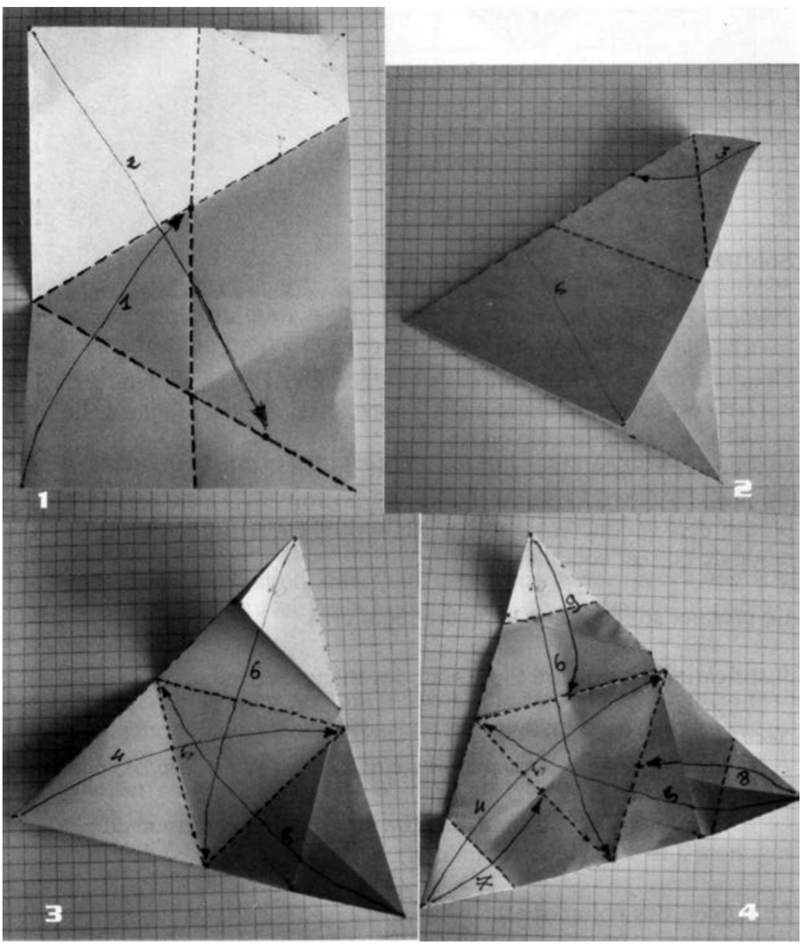
En observant vos plis pour aller jusqu'à l'étape 2, comparez avec l'étape 3 du pliage précédent : c'est le même pliage mais à une échelle différente ; laquelle ?

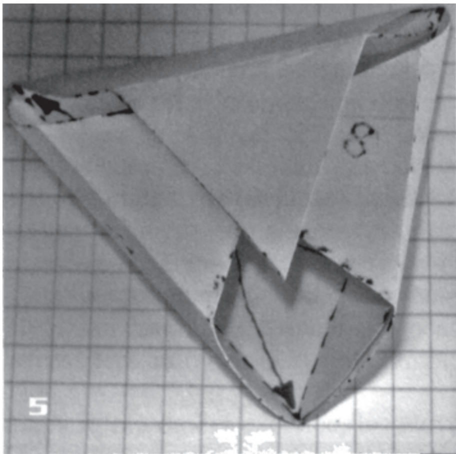
Terminez le pliage et formez le solide.

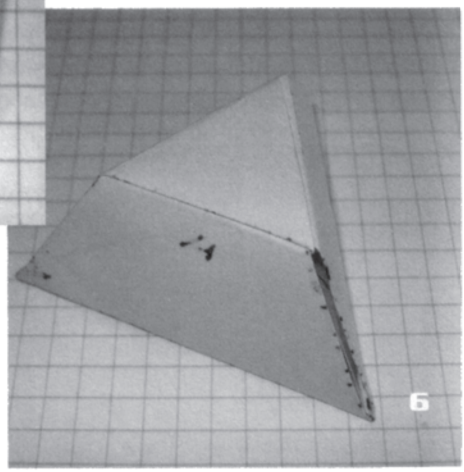
Quel nom peut-on donner à ce solide ?

On note V_2 le volume de ce second solide ; mais on ne demande pas de le calculer.

Quel est le rapport $\frac{V_1}{V_2}$? Expliquez comment on obtient ce résultat







Solution :

Premier solide

Le triangle ABC est équilatéral

Démonstration : H est le milieu de [BC] donc (AH) est médiane dans ABC et (AH) est perpendiculaire à (BC) donc (AH) est aussi hauteur. Le triangle ABC est donc isocèle en A.

(AH) est donc aussi bissectrice de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BAH} = \widehat{HAC}$

De plus, $\widehat{DAC} = \widehat{CAH}$ (on a plié). L'angle droit $\widehat{BAD}$ a été partagé en trois parties égales donc $\widehat{BAC} = 2 \times 30° = 60°$. Un triangle isocèle qui a un angle de 60° est équilatéral.

Ce premier solide est un tétraèdre régulier

Justification : les quatre faces sont des triangles équilatéraux.

Second solide

A l'étape 2 on réalise le même pliage que dans l'étape 3 du premier solide mais à l'échelle 2.

Le solide obtenu est un tronc de tétraèdre régulier (ou tronc de pyramide régulière à base triangle équilatéral)

Le rapport des volumes est : $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{8}{7}$

Justification : avant le dernier pliage on avait le même patron que pour le premier solide. Puis on a plié les trois faces latérales en leurs milieux. Le résultat est la suppression d'un petit tétraèdre régulier, réduction du grand à l'échelle ½.

Le volume de ce petit tétraèdre est $\frac{V_1}{8}$;

le tronc de tétraèdre a donc un volume $V_2 = V_1 - \frac{V_1}{8} = \frac{7V_1}{8}$

et donc $\frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{7}$

Domaines mathématiques.

Géométrie plane : triangle équilatéral ; géométrie dans l'espace : pyramide et tronc de pyramide. Calculs et proportionnalité, échelle, coefficient d'agrandissement/réduction.

Analyse de la tâche.

Cet exercice demandait une observation attentive du modèle puisqu'aucune consigne écrite ou orale n'était donnée, et aussi des qualités de soins pour une réalisation propre des objets. L'analyse de l'évolution du modèle permettait une mise en œuvre du raisonnement géométrique non sur un dessin mais sur des plis.

Dans la première partie du premier pliage, une démonstration était demandée. Celle proposée dans la solution n'est qu'une démonstration possible. Ce fut pour les correcteurs l'occasion -une fois de plus- de s'interroger sur les exigences à avoir devant la rédaction d'une démonstration. Ils ont été très larges dans l'évaluation, cherchant plutôt les bonnes idées même si elles étaient exprimées avec maladresse.
Prolongements éventuels.

Des travaux de pliages et origami avaient déjà fait l'objet d'ateliers pendant les finales précédentes. Ils rencontrent toujours beaucoup de succès auprès de certains élèves qui peuvent ainsi manifester des compétences sous-estimées en math ; les pliages, s'ils sont bien faits, sont esthétiques et leur réalisation demande une bonne compréhension des consignes.
Celui-ci permettait, en plus, un questionnement géométrique.