RALLYE DE MAHDIA

PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Le Rallye de Mahdia est destiné aux élèves de l'école de base (9e, 8e, 7e , 6e) et de lycée (1re, 2nd, 3e et 4e de l'enseignement secondaire). Il est organisé chaque année, par le bureau régional de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques de Mahdia.

Plusieurs régionales de l'ATSM y participent :
Monastir, Sousse, Gafsa, Nabeul, Ben Arous et Sfax.
Le Rallye se déroule par équipe et par niveau (enseignement de base et enseignement secondaire), chaque équipe est représentée par un membre de chaque bureau. Les élèves sont regroupés par groupes de 4 de niveaux différents. Ils ont trois heures pour faire le tour de la ville de Mahdia et dans chaque endroit visité, ils seront invités à résoudre un problème, dans lequel l'humour et le jeu ne sont pas oubliés.La solution sera rédigée soigneusement et présentée, avant de passer au jeu suivant, au responsable membre du jury.

L'objectif de ce rallye est de :

* Développer chez les élèves, la curiosité, le goût de la recherche et du travail en équipe et de les aider à construire une image positive de la culture mathématique.

* Faire des mathématiques en résolvant des problèmes, dans un contexte sans doute inhabituel mais plaisant.

* Faire voyager les visiteurs, jeunes et moins jeunes, dans l'univers mathématique, de sorte que cette science, si souvent considérée comme abstraite, austère, voire rébarbative pour certains, devienne un véritable terrain de jeux et une source intarissable de créations artistiques.

Nous espérons, à partir de ce rallye, valoriser, auprès des élèves une orientation vers les enseignements scientifiques et techniques.

FICHE TECHNIQUE

Historique :
Création du rallye en 2003 pour les élèves de l'enseignement secondaire.
Extension en 2010 pour les élèves de l'école de base.

Compétition :
Epreuve au mois de Mars
(Le dimanche le plus proche du 20 Mars)
Animation et entrainement le soir, un jour avant.

Epreuves :
Par groupe de 4 élèves, de différents niveaux et de différentes régionales.
Epreuve de dix problèmes à résoudre en trois heures.
Les élèves se déplacent d'un point à un autre pour résoudre un problème.

Partenaires :
Des bureaux régionaux de l'ATSM, en particulier celui de Monastir.
Le gouvernement de Mahdia.

Contacts :
Le bureau régional de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques de Mahdia - CREFOC de Mahdia - Tunisie.

Site : www.atsm-mahdia.net

E-mail : raoufh.thabet@laposte.net

moh1951limame@yahoo.fr

Problème 1

Compléter le tableau ci- dessous par les nombres de **1** à **6** , de façon que chaque nombre écrit dans l'une des cases divise la somme des nombres (éventuellement le nombre) écrits à gauche.

7						

Niveau scolaire :
pour les élèves de 12 à 14 ans.

Domaine mathématique :
arithmétique, divisibilité.

Analyse de la tache :

7	1	*b*			*c*	*a*

Remarquons que **7** est un nombre premier donc il faut placer **1** dans la 2e case.
On note *a*, *b* et *c* les nombres dans les cases comme indiqué dans le tableau ci-dessus.
a divise 28 – *a* donc divise 28 d'où a = 2 ou 4 .
Supposons que $a = 2$
Alors c divise 26 – c donc c divise 26, impossible.
Donc $a = 4$
Or b divise 8 donc $b = 2$. Car d'après ce qui précède b ne peut être ni 1 ni 4.
Immédiatement l'unique solution est :

7	1	2	5	3	6	4

Les élèves en général n'arrivent pas à faire ce raisonnement, mais le problème est accessible, avec un peu de modélisation, expérimentation, et une mise en jeu de mathématiques simples, parfois remplaçables par des essais.

Commentaire et développement :
Une autre version de ce problème est :
Remplir les 7 cases vides dans le tableau ci-dessous par les nombres de 1 à 7, de façon que chaque nombre écrit dans l'une des cases (sauf la 1re) divise la somme des nombres (éventuellement le nombre) écrits à gauche.

Une discussion portée sur le nombre de la première case et un raisonnement analogue au précédent donne 7 solutions :

4	1	5	2	6	3	7

4	2	6	3	5	1	7

5	1	2	4	6	3	7

5	1	6	2	7	3	4

5	1	6	4	2	3	7

6	2	4	3	5	1	7

7	1	2	5	3	6	4

Le problème général:
soit *n* un entier supérieur ou égal à .
Compléter le tableau ci-dessous de *n* cases par les nombres de 1 à $n-1$, de façon que chaque nombre écrit dans l'une des cases divise la somme des nombres (éventuellement le nombre) écrits à gauche.

n			....			

Pour *n* = 11
Le problème admet 2 solutions

11	1	2	7	3	8	4	9	5	10	6

11	1	4	8	6	10	5	9	2	7	3

Pour n = 13
Le problème admet 4 solutions

13	1	2	8	3	9	4	10	5	11	6	12	7

13	1	2	8	6	10	4	11	5	3	9	12	7

13	1	2	8	6	10	4	11	5	12	9	3	7

13	1	2	8	12	4	10	5	11	6	9	3	7

Pour *n* assez grand, le problème devient de plus en plus compliqué et a besoin d'un programme et d'un ordinateur.

Chose étrange, 2011 est un nombre premier et $4021 = 2 \times 2011 - 1$ est aussi un nombre premier.

D'où le problème suivant :
Pour $n = 4021$ déterminer le nombre qui doit être dans la 3e case du tableau.
Notons *x* le nombre de la 3e case et *a* le nombre de la dernière case.

4021	1	x	....			a

x divise 4022, donc *x* = 2 ou 2011

a divise $1 + 2 + 3 + \cdots + 4021 - a$

Donc *a* divise $4021 - 2011 - a$

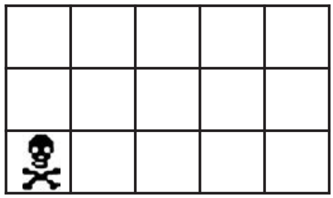
d'où *a* divise 4021 x 2011

Immédiatement $a = 2011$

Par suite *x* = 2

Problème 2

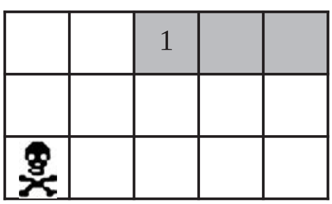
On considère un rectangle divisé en carrés, comme, par exemple, le rectangle 3 x 5 de la figure ci-jointe.

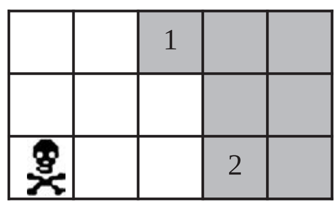


Le ***croque*** est un jeu à deux joueurs qui se joue de la façon suivante .

Le premier joueur choisit l'un des carrés, disons celui marqué " **1** " sur la figure ci-dessous et l'enlève ainsi que tous les carrés situés au-dessus et à sa droite.

Le deuxième joueur choisit alors l'un des carrés qui n'ont pas été enlevés, disons le carré marqué " **2** " sur la deuxième figure ci-dessous, et l'enlève ainsi que tous les carrés situés au-dessus et à sa droite. Le jeu continue de cette manière jusqu'à ce qu'il s'arrête, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'un joueur enlève le carré inférieur gauche et, ce faisant, perde la partie.
Le premier joueur peut-il gagner à coup sûr et comment?

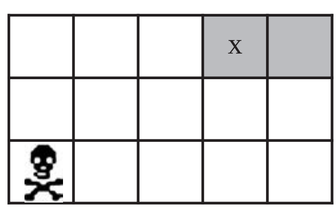




Niveau scolaire :
Pour les élèves de 12 à 17 ans.

Domaine mathématique :
Pavages, Jeux stratégiques.

Analyse de la tache :
Le problème est ouvert, on y entre assez facilement dès lors que l'on veut bien expérimenter. Toute la difficulté vient peut-être d'un balayage organisé de tous les cas possibles.



Le premier joueur gagne à coup sûr en jouant seulement comme suit :

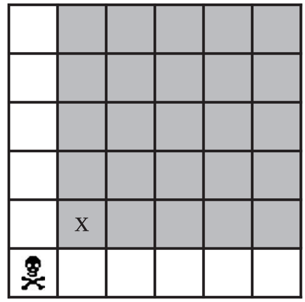
Commentaire et développement :
L'algorithme répondant à la question concernant le cas général d'un rectangle $n \times m$ quelconque (avec la convention usuelle, *n* le nombre de lignes et *n* le nombre de colonnes) reste encore un mystère pour les mathématiciens. Cependant, une démonstration surprenante prouve que le premier joueur peut forcer la victoire, mais elle ne donne pas la moindre indication sur la façon de procéder.

C'est une démonstration logique, pas une démonstration qui donne un algorithme ; elle établit l'existence d'une stratégie gagnante, mais pas sa construction. Les preuves d'existence de ce type sont appelées non constructive, et ce sont habituellement des démonstrations par l'absurde. Ce ne semble pas être le cas de celle-ci (c'est la démonstration non constructive la plus constructive qu'on puisse imaginer !)

La chose la plus évidente à propos du jeu de ***croque*** est qu'il s'agit d'un jeu dans lequel la partie nulle est impossible - après au plus un nombre fini prévisible de coups, l'un ou l'autre joueur sera obligé de prendre le dernier carré et de perdre.
Un autre fait, à peine moins évident, est l'existence d'un coup du premier joueur qui, quelle que soit la façon du second joueur d'y répondre, produira une situation que le premier joueur pourrait aussi avoir produite. Cela signifie la chose suivante : si le premier joueur enlève le carré supérieur droit, alors le carré que le second joueur choisira d'enlever était aussi disponible pour le premier joueur au début de la partie.

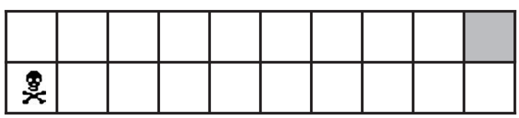
Ces deux remarques fournissent une solution du problème.
On peut prouver que le premier joueur a une stratégie gagnante par un argument du type "ou bien, ou bien". Ou bien le choix du carré supérieur droit pour le premier joueur lui permet de forcer la victoire ou bien il ne le fait pas. Dans le premier cas, il n'y a rien de plus à dire.
Considérons donc le second cas. Cela signifie que si le second joueur est face à un échiquier privé du carré supérieur droit, alors le second joueur n'est pas condamné à perdre, c'est-à-dire qu'en jouant intelligemment, il peut forcer la victoire. Que signifie "forcer la victoire" ? Cela signifie que le second joueur peut faire un coup auquel il n'y a aucune réponse gagnante. Mais, quel que soit ce coup, il était possible pour le premier joueur de le faire au début. Ou bien le choix du carré supérieur droit était un coup gagnant pour le premier joueur, ou bien il ne l'était pas- et s'il ne l'était pas la réponse à ce coup était disponible pour le premier joueur et lui permettait de gagner.
Notons deux situations où il y a un algorithme qui indique la façon par laquelle le premier joueur peut forcer la victoire.

Première situation :
L'échiquier du jeu de ***croque*** est un carré de $n \times n$
Si le premier joueur choisit le carré situé dans la deuxième ligne et la deuxième colonne, alors après enlèvement de ce carré de tous ceux situés au-dessus et à droite, il reste une figure en forme de L, comme la partie non ombrée de la figure ci-dessous.



A partir de là, le mot magique est la symétrie, quoi que le second joueur joue, le premier joueur joue le carré symétrique pour symétriser la figure, ou, plus précisément, pour produire une configuration en L avec des côtés égaux. De proche en proche, il est clair que le second joueur est condamné à perdre.

Deuxième situation :
L'échiquier du jeu de ***croque*** est un rectangle de $2 \times m$.
Si le premier joueur enlève le carré en haut à droite, laissant une configuration à deux rangées dont la rangée supérieure est plus courte d'une case que la rangée inférieure, alors, quoi que le second joueur joue, le premier joueur peut toujours reproduire la même configuration.
En effet, si le second joueur choisit un carré de la rangée du bas, il reste encore un rectangle mince ; s'il choisit un carré de la rangée du haut, le premier joueur peut enlever 1 carré de la rangée du bas qui se trouve une place à droite de celui que le joueur a enlevé et il arrive encore à la configuration *rangée inférieure = rangée supérieure plus un*. La configuration limite est celle de la figure ci-jointe. Une fois encore, le joueur est condamné à perdre.



Quelle est la réponse pour les rectangles à 2 colonnes, c'est-à-dire les rectangles $n \times 2$? Une seconde de réflexion suffit pour répondre : rien ne se passe, le même raisonnement donne la même conclusion.

Bibliographie :
Problèmes pour mathématiciens, petits et grands. Paul Hamos