TOURNOI DES VILLES

PRÉSENTATION

Le Tournoi des Villes est un tournoi mathématique pour les élèves de la quatrième à la terminale. Ce tournoi a démarré en Russie en 1980 et est devenu réellement nternational depuis. Aujourd'hui, plus de 100 villes dans 20 pays différents en Europe de l'Est et de l'Ouest, en Amérique du Nord et du Sud, en Asie et en Australie y participent. Ce tournoi se déroule en deux temps (une version d'automne et une version de printemps) et le meilleur des deux résultats est conservé pour établir le classement. Évidemment, rien n'empêche un candidat de ne venir qu'à une seule des deux épreuves.

Les sujets sont les mêmes dans tous les pays où le tournoi est organisé. Pour chacune des deux catégories d'âge (de la quatrième à la seconde et de la première à la terminale), deux versions de l'épreuve sont proposées (la version normale qui dure 4 heures et la version difficile qui dure 5 heures). La difficulté des problèmes est assez variée et on ne conserve, pour chaque candidat, que les points des trois problèmes les mieux réussis ce qui permet à chacun de concourir à son niveau. Le score final est affecté d'un coefficient suivant la classe du participant. Les démonstrations sont demandées.

FICHE TECHNIQUE

Historique :

- 1980 : Première organisation du tournoi à Moscou, Leningrad et Riga.
- 1984 : Le tournoi est soutenu par l'académie des sciences d'URSS et devient international.
- 1988 : Première participation "occidentale" : Toronto.
- 1998 : Première participation de Paris.
- 2003 : Création d'une association en France.

Epreuves :

Individuelles

Catégories : 2 (quatrième, troisième, seconde et première, terminale)

Niveaux : 2 (normal et difficile, au choix du candidat)

Problèmes : 5 à 7 en quatre ou cinq heures (seuls les trois les mieux réussis comptent) dont les solutions doivent être rédigées.

Compétition :

Version d'automne : un dimanche matin en octobre ou en novembre.

Version de printemps : un dimanche matin en février ou en mars.

Contacts :

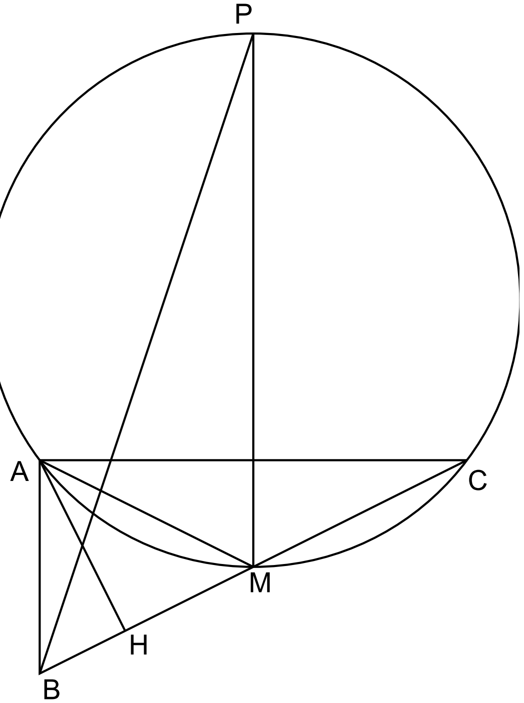
site web : *http://www.tournoidesvilles.fr*

e-mail : *infos@tournoidesvilles.fr*

Le milieu de la hauteur

Printemps 2008, première-terminale

Soient ABC un triangle rectangle en A et M, le milieu de [BC]. La droite issue de M perpendiculairement à (AC) coupe le cercle circonscrit au triangle AMC une deuxième fois au point P.



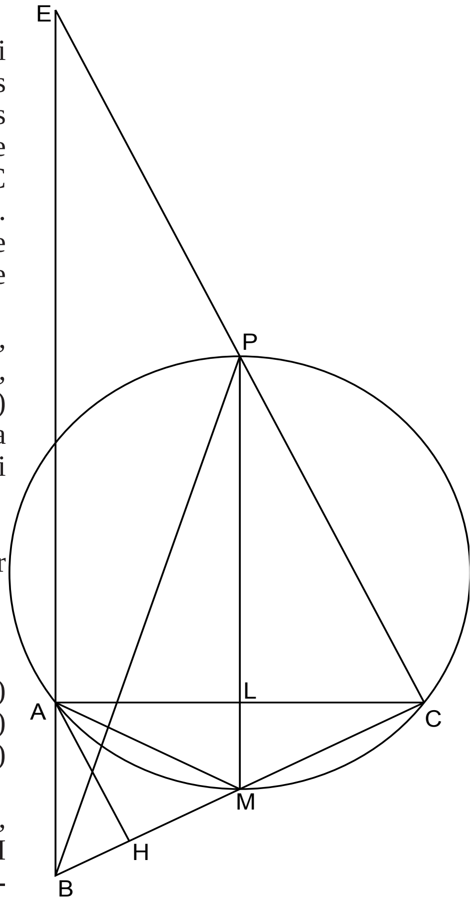
Montrer que le segment [BP] coupe la hauteur [AH] en son milieu.

Domaine de compètence :
Géométrie : homothéties, triangles rectangles, cercles circonscrits.

Analyse de la tâche :
(première-terminale)
Comme souvent, la difficulté de ce beau probléme de géométrie ne réside pas tant dans la technicité que dans une forme de créativité. En effet, une fois la construction complétée, la preuve devient étonnamment simple.

Ainsi, cet énoncé peut être posé plus tôt en donnant une indication.
Notons par ailleurs qu'une preuve analytique, plus technique et beaucoup moins créative est bien sûr possible.

Pistes de recherche :



La première piste de recherche qui vient à l'esprit est celle des triangles semblables. En effet, tous les triangles rectangles de la figure sont semblables au triangle ABC (AHC, AHB, PMC, PMA, ...). Cependant, cette idée est une fausse piste et ne permet pas seule de conclure.
De fait, ce sont deux homothéties, celle de centre C et de rapport 2, qui envoie la droite (PM) sur (AB) et celle de centre B qui envoie la droite (CP) sur la droite (AH) qui permettent de conclure.

Pour ce faire, il faut un peu compléter la figure.

Solution :
On note L l'intersection de (AC) et (PM) et E l'intersection de (CP) et (BA). Les droites (BE) et (MP) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (AC). Par conséquent, elles sont parallèles. De plus, M est le milieu de [BC]. Par conséquent, l'homothétie de centre C et de rapport 2 envoie M sur B, L sur A et P sur E. On en déduit que P est le milieu de [CE] et que L est le milieu de [AC].

La droite (MP) est perpendiculaire à [AC] et passe par son milieu : c'est donc sa médiatrice. Par conséquent, le centre du cercle circonscrit à ACM et sur la droite (MP). Ce cercle est aussi circonscrit au triangle MPC qui est donc rectangle en C. Finalement, (CE) et (AH) sont toutes les deux perpendiculaires à (BC) et sont donc parallèles.

L'homothétie de centre B qui envoie C sur H envoie donc le triangle BCE sur le triangle BHA. De plus, cette homothétie stabilise la médiane (BP) du triangle BCE. Par conséquent, (BP) est aussi la médiane issue de B de BHA et coupe donc [HA] en son milieu.

Les jolis rectangles de Julie

Printemps 2008, troisième-seconde

Les cases d'un échiquier 10×10 sont coloriées en blanc, gris et noir. Deux cases qui ont un côté commun sont toujours de deux couleurs différentes. On sait qu'il y a 20 cases grises. Julie trouve un rectangle 2×1 joli s'il est composé d'une case blanche et une case noire.
a) ***Montrer que Julie pourra toujours découper dans l'échiquier 30 jolis rectangles.***

b) ***Trouver un coloriage qui permet de découper 40 jolis rectangles (et expliquer pourquoi il convient).***

c) ***Trouver un coloriage qui ne permet pas de découper plus de 30 jolis rectangles (et expliquer pourquoi il convient).***

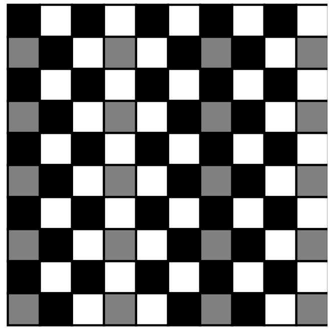
Domaine de compétence :
Un peu de dénombrement, beaucoup de recherche et de raisonnement.

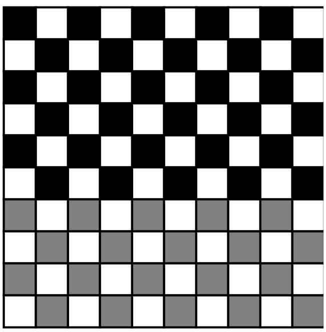
Analyse de la tâche :
Ce problème est à ce niveau assez dicile. L'ordre des questions n'est pas forcément le plus facile pour le résoudre. En effet, pour réussir la première question, il faut réfléchir sur un certain nombre d'exemples. Les deux autres questions demandent justement de trouver deux exemples qui sont extrémaux (en effet, la question **a** montre que l'exemple de la question **c** contient le minimum possible de jolis rectangles ; par ailleurs, comme il y a 80 cases blanches ou noires, il ne peut pas y avoir plus de 40 jolis rectangles donc l'exemple de **b** réalise l'autre extremum). Par conséquent, il pouvait être judicieux de commencer par chercher ces exemples extrêmaux.

En pratique, beaucoup de candidats ont résolu la question **b** (dont la preuve est immédiate une fois que l'exemple est donné), un peu moins la question **c.** La question **a** donne souvent lieu à des raisonnements approximatifs. En effet, la preuve la plus courte est astucieuse et on peut assez facilement se perdre dans des études de cas fastidieuses si l'on ne voit pas la bonne méthode.

Solution :

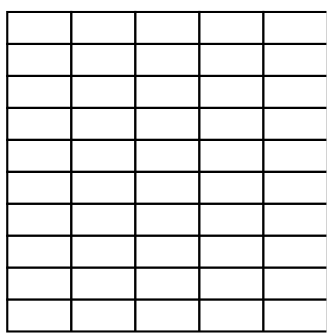
b) Le coloriage suivant permet facilement de découper 40 jolis rectangles (tous horizontaux) :





c) Le coloriage suivant permet facilement de découper 30 jolis rectangles (tous horizontaux), et pas plus, car il n'y a au total que 30 cases noires :

a) On remarque dans nos deux exemples que l'on peut se contenter de découper des rectangles horizontaux (bien entendu, on pourrait aussi en découper des verticaux, mais ce n'est jamais obligatoire). Cette observation simple donne l'idée de la preuve.Supposons que l'on a un échiquier colorié comme dans l'énoncé. On peut découper 50 rectangles 2×1 horizontaux (jolis ou pas, peu importe pour l'instant) :

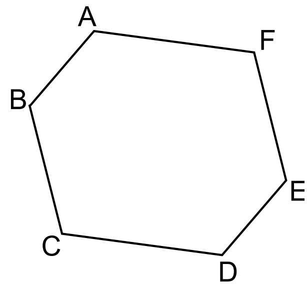


Comme deux cases voisines ne sont pas de la même couleur, chacun des 50 rectangles découpés a exactement deux couleurs. Parmi ceux-ci, 20 exactement ont une case grise puisqu'il y a 20 cases grises au total. Par conséquent, parmi les rectangles découpés, 30 sont jolis et ceci ne dépend pas du coloriage. Bien entendu, cette méthode ne permet pas de découper le nombre maximum possible de jolis rectangles.

Hexagone presque régulier

Printemps 2008, troisième-seconde

Les côtés opposés d'un hexagone convexe *ABCDEF* sont deux à deux parallèles :
(*AB*) // (*ED*), (*BC*) // (*FE*)
et (*CD*) // (*AF*). De plus on a *AB* = *ED*.



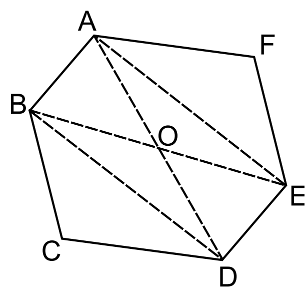
Montrer que, dans ce cas,
BC = FE et CD = AF.

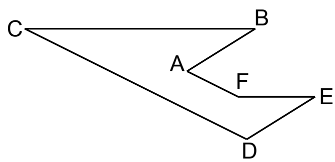
Un hexagone est *convexe* s'il est non croisé et n'a aucun angle rentrant ou plat.

Domaine de compétence :
Géométrie : symétrie centrale

Analyse de la tâche :
Ce problème est assez facile. Une figure bien faite permet de « voir » la symétrie et la preuve est ensuite élémentaire et tout à fait accessible en fin de collège. La seule subtilité réside dans l'utilisation correcte de la convexité. Ce point n'était pas trés important dans l'appréciation de la solution.

Solution :
Comme *ABCDEF* est convexe, le quadrilatère *ABDE* est aussi convexe. De plus, comme [*AB*] et [*ED*] sont parallèles et de même longueur, *ABDE* est un parallélogramme. Notons *O* le centre de ce parallélogramme. La symétrie centrale ***s*** de centre *O* échange *A* et *D* d'une part et *B* et *E* d'autre part. Comme les droites (*BC*) et (*EF*) sont parallèles et qu'elles passent respectivement par *B* et son image *E* par ***s***, la symétrie ***s*** échange (*BC*) et (*EF*). De même, la symétrie ***s*** échange (*AF*) et (*CD*). Finalement, ***s*** échange l'intersection *C* de (*BC*) et (C*D*) avec l'intersection *F* de (*EF*) et (*AF*). Finalement l'hexagone est symétrique par rapport à *O* et donc *BC* = *FE* et *CD* = *AF*.





Remarque :
Comme le montre l'exemple ci-contre, le résultat est faux si l'hexagone n'est pas convexe.