TOURNOI MATHEMATIQUE DU LIMOUSIN

PRÉSENTATION

Le Tournoi, qui s' adresse aux élèves de quatrième et aux lycéens, travaillant par équipe de deux, obtient la participation de tous les lycées et de plus de trois collèges. sur quatre dans les trois départements de la Région : Corrèze, Creuse et Haute-Vienne.

Développer le goût de la recherche scientifique, promouvoir l'image des mathématiques auprès des jeunes et du grand public, tels sont ses objectifs. La remise des prix, grande fête des mathématiques et des jeunes a lieu au printemps. Un grand nombre de jeunes de toutes sections y sont récompensés.

FICHE TECHNIQUE

Historique :

Le Tournoi mathématique du Limousin, association "loi 1901", a été créé en 1987 par la Régionale de Limoges de l'APMEP, le département de Mathématique de la Faculté des Sciences de Limoges, l'Inspection Pédagogique Régionale, l'IREM de Limoges. Chaque année, quatre mille élèves de quatrième et deux mille lycéens environ participent au Tournoi Mathématique du Limousin.

Partenaires :

Rectorat ;
Conseil Régional du Limousin ;
Conseils Généraux de Corrèze, Creuse et Haute-Vienne ;
CASDEN Banque populaire.

Compétition :

Épreuve 4^{e} en janvier (2 heures durant le temps scolaire).
Épreuve en lycée en janvier (3 heures durant le temps scolaire).
Remise des prix au printemps, dans le grand amphithéâtre de la Faculté de Droit à Limoges.

Épreuves :

Par équipe de 2. Catégories: 4^{e} et 2de/ 1re / terminales. Les textes proposés, sous forme ludique, donnent envie de chercher, nécessitent une solution rédigée et sont susceptibles de prolongement.

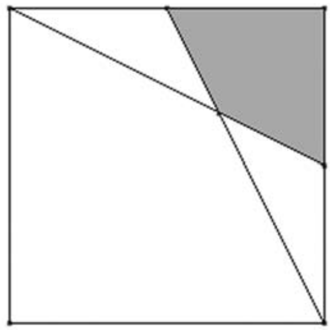
Il peut se faire que le même texte soit proposé en collège et en lycée. Les copies sont corrigées et récompensées selon les séries.

Contacts :

Tournoi Mathématique du Limousin:
IREM - 123, av. Albert Thomas
87060 Limoges CEDEX
Tél : 05 55 45 72 49

Jean Centaire

Les enfants de la famille Centaire doivent se partager équitablement, c'est-à-dire de façon que les parts aient toutes la même aire, un terrain carré de 100 m de côté.
Jean a dessiné sa parcelle (grisée sur le dessin) en prenant des milieux de côtés.



Combien y a-t-il d'enfants dans la famille Centaire ?

Quel est le périmètre de la parcelle de Jean ?

Terminez le partage de façon qu'il soit équitable.

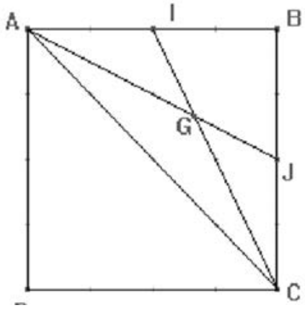
Niveau scolaire :
A partir de la classe de seconde des lycées

Domaine mathématique :
Géométrie plane : propriétés du triangle et de son centre de gravité

Analyse de la tache :
Plusieurs méthodes pour résoudre cet exercice.
Nous en présentons trois.
La première étant celle que les élèves nous ont le plus souvent proposée, souvent bien incomplètement. Elle est aussi la plus laborieuse.

Etudions le dessin

Les triangles BJG et BJA ont même hauteur issue de B et JG = JA / 3 car G est le centre de gravité du triangle BCA.
Donc, aire (BJG) = aire (BJA) / 3



Les triangles BJA et BCA ont même hauteur issue de A et BJ = BC / 2 .
Donc, aire (BJA) = aire (BAC) / 2.
Aire (BAC) = aire (ABCD) / 2.

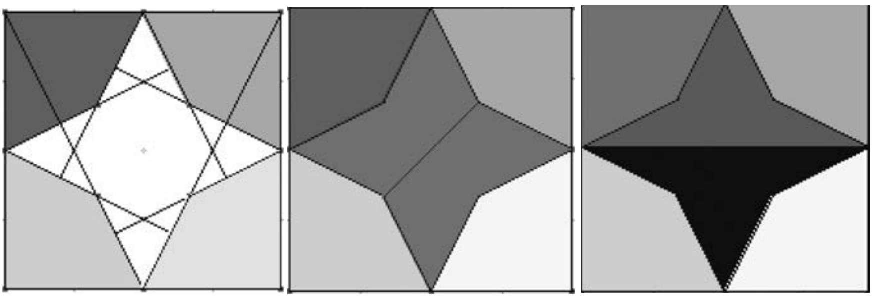
En conclusion, aire (BJG) = aire (ABCD) / 12.
La parcelle de Jean correspond au quadrilatère IBJG dont l'aire est le double de celle du triangle BJG.

La parcelle de Jean a pour aire : aire (ABCD) / 6 ; les enfants de la famille Centaire ayant des parcelles de même aire, il y a 6 enfants.

$$AC = AB \times \sqrt{2} \qquad AJ^2 = AB^2 + BJ^2 = 5 \times AB^2/4$$

$$AJ = AB \times \sqrt{5}/2 \qquad GJ = AB \times \sqrt{5}/6$$

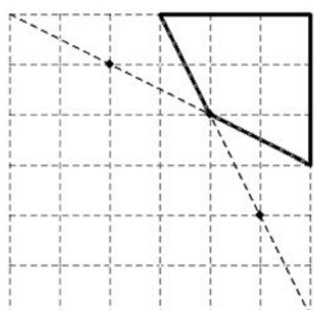
Périmètre de la parcelle de Jean : $AB \times \sqrt{5} / 3 + AB = AB (1 + \sqrt{5} / 3)$.
Pour terminer le partage, on peut constituer 3 autres parcelles analogues à celle de Jean et partager le terrain restant selon un de ses axes de symétrie, par exemple :



Une deuxième idée, bien plus simple mais les idées les plus simples ne sont pas toujours celles qui viennent spontanément !

Exploration de la feuille quadrillée

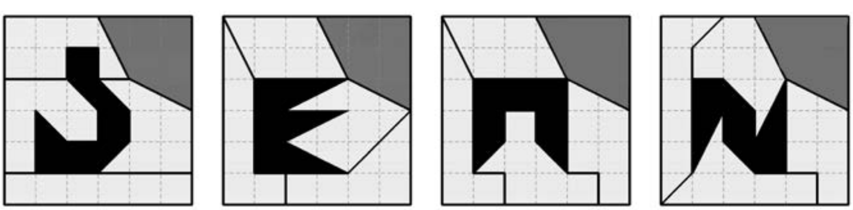
Considérons un carré de 6 carreaux de côté que nous tracerons sur une feuille quadrillée.



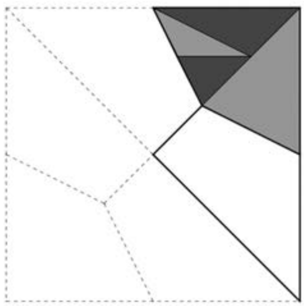
L'aire de la parcelle de Jean est de 6 carreaux, ce qui correspond à 1/6 de l'aire totale du carré.

On peut maintenant découper le carré en 6 parts de même aire en s'aidant du quadrillage.

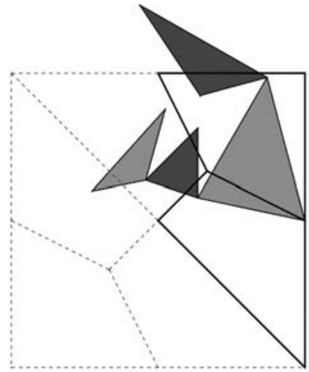
Ci-dessous quelques exemples.



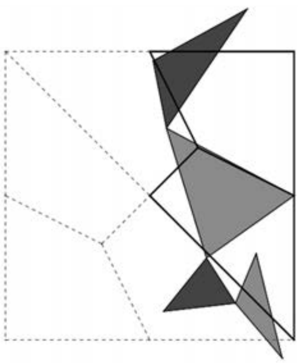
Une troisième méthode : à la façon d’un puzzle articulé



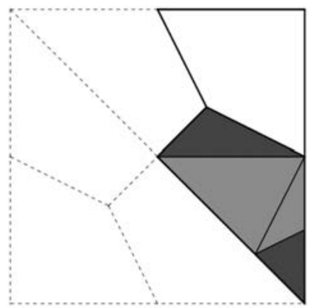
1



2



3



4

Commentaires

Ce texte nous semble un excellent sujet pour une épreuve de Tournoi. Son énoncé est ouvert et ne semble pas à priori imposer de méthode. Poser une question numérique sur un dessin est en soit un peu déroutant. Le nombre de façons de résoudre le problème peut conduire en classe à des discussions intéressantes sur des comparaisons de méthodologie et sur les méthodes de recherche.

Certains partages de ce carré sont à l'origine de très beaux puzzles que nous proposons ensuite en animation grand public.

On peut aussi essayer de dénombrer toutes les solutions ; l'ordinateur est alors un outil précieux. On peut alors imaginer un jeu de mémory et d'observation en les représentant toutes sur une grande planche et individuellement sur des cartes puis jouer à celui qui retrouvera la carte sur la grande planche.

Enfin pour les plus courageux on peut inciter à une recherche de partage encore plus équitable : la même aire mais aussi la même périmètre ! C'est plus compliqué et met en jeu des méthodes d'analyse (étude de fonctions) .

Il était deux fois ... 2001 Collège

Vous allez écrire un nombre à huit chiffres, le plus grand possible, répondant aux conditions suivantes :
Il y a deux fois le chiffre 4, deux fois le chiffre 3, deux fois le chiffre 2 et deux fois le chiffre 1 .
Entre les deux chiffres 4 il y a quatre chiffres, entre les deux chiffres 3 il y a trois chiffres, entre les deux chiffres 2 il y a deux chiffres et entre les deux chiffres 1 il y a un chiffre.
Racontez-nous comment vous faites.

Niveau scolaire :
Pour les élèves de 9 à 12 ans.

Domaines mathématiques :
Arithmétique : écriture décimale des nombres, ordre dans les entiers.

Analyse de la tâche :
Un très bel exercice !!
Les élèves ont cherché et souvent trouvé même si hélas ils n'ont pas toujours su nous dire comment ils cherchaient…
Remarquons qu'en demandant le plus grand nombre, nous donnions le point de départ de la recherche. En demandant le plus petit, les choses se seraient un peu compliquées puisque ce nombre commence par deux.
Peu d'élèves ont remarqué l'unicité de la disposition.

Commentaires et développements :
Cet exercice est souvent proposé en animation grand public et en milieu scolaire dès la fin du cycle 2. Il est intéressant d'observer les différences entre la recherche papier crayon et la recherche par manipulation des jetons. Enfin notons que les enfants aiment à lire le grand nombre obtenu, peuvent chercher le plus petit et découvrir l'unicité de la disposition.

C'est un cas particulier du problème publié par le mathématicien écossais C.D. Langford en 1958 qui, en observant des alignements de cubes de couleurs rouge, bleue et jaune réalisés par son jeune fils, avait noté qu'il y avait un seul cube entre deux cubes rouges, deux cubes entre deux cubes bleus et trois cubes entre trois cubes jaunes. En utilisant des nombres à la place de couleurs (1 pour le rouge , 2 pour le bleu et 3 pour le jaune on obtient la configuration suivante : 3 1 2 1 3 2.

Le problème général posé par C.D. Langford est : "*Existe-t-il pour tout n entier naturel au moins un arrangement des paires des nombres entiers de 1 à n tel que la paire de 1 encadre un seul nombre, la paire de 2 encadre deux nombres, …., la paire de n encadre n nombres ?*"
Le jeu avec les cubes donnent la solution pour $n = 3$, l'exercice du tournoi pour $n = 4$.

On montre qu'il n'y a pas de solution pour n égal à 5 ou 6. Par contre pour $n = 7$, il y a 26 solutions.
On sait que les valeurs de n qui donnent des arrangements de Langford sont de la forme $n = 4k + 3$ et $n = 4$. Il n'y a pas d'algorithme simple qui permette de trouver tous ces arrangements.

On peut rapprocher ce problème de celui des "Suites de Skolem"

Albert Thoralf Skolem est un mathématicien norvégien (1887- 1963), contemporain de Niels Abel. Ses contributions à la logique et à la combinatoire sont très importantes.

Les suites de Skolem vérifient la contrainte suivante :
"Existe-t-il pour tout n entier naturel au moins un arrangement des paires des nombres entiers de 1 à n tel que les deux 1 soient contigus, la paire de 2 encadre un seul nombre, …., la paire de n encadre n -1 nombres ?"
On peut montrer qu'il n'existe des suites de Skolem de longueur $2n$ que pour $n = 4k$ ou $n = 4k + 1$

Il y a 6 solutions pour $n = 4$, 504 solutions pour $n = 8$ et déjà 455 936 pour $n = 12$!!

Pour explorer les solutions de ce problème et en faire un jeu de manipulations concrètes, Jean Brette a imaginé de remplacer les nombres par des cavaliers. Chercher une suite de Skolem pour le nombre n est équivalent à positionner n cavaliers dont les jambes sont respectivement écartées de 1, 2, 3, …, n cases de manière à ne laisser aucun espace libre entre leurs pieds.

Il est intéressant de développer ce problème du *Jeu des cavaliers* avec des élèves et de trouver avec eux des situations où il y a plusieurs solutions et d'autres sans solution.

Un site pour jouer avec les Cavaliers de Jean Brette :
http://euler.ac-ersailles.fr/webMathematica/versailles/skolem/skolem.jsp

Une expérience pédagogique autour du problème des suites de Skolem a été développée sous la direction de Jean Brette et Jean Pierre Bourguignon dans plusieurs classes de CM1 et CM2 de Chilly Mazarin en 2000 et elle a conduit à l'élaboration d'une sculpture Skolem "*choc de blocs et chiffres au vent*" qui est aujourd'hui dans les jardins de l'IHES à Bures sur Yvette dans l'Essonne.

Cette aventure mathématique est longuement racontée dans un petit ouvrage "*Jeux mathématiques et vice versa*" publié dans la collection le Collège de la Cité chez Le Pommier. Vous y trouverez bien d'autres idées de généralisation de ce type de problèmes.

Un peu de bibliographie à propos de ces exercices :

1] Th. Skolem : On certain distributions of integers in pairs with given differences. Math. Scand 5 (1957).
[2] C.D. Langford : Problem. Math. Gaz. 42 . N°341 (Oct. 1958).
[3] J. Brette : Pair et impair : problèmes des drapeaux. Revue du Palais de la Découverte. Vol 7, n°63, Dec 1978.
[4] J. Brette : Jeu des 12 cavaliers, Bulletin de l'APMEP n°321, Dec 1979.
[5] M.Criton : A propos du problème des cavaliers, Bulletin de l'APMEP n°323, Avri1980.
[6] J.C.Bermond, A.E.Brouwer, A.Germa : Systèmes de triplets et différences associées. Problèmes combinatoires et théorie des graphes. Colloque CNRS. Orsay 1976, CNRS 1978.
[7] J.C.Bermond : Sur le jeu des cavaliers. Bulletin de l'APMEP n°328, Avril 198.