OLYMPIADE MATHEMATIQUE BELGE

1 Historique et présentation

L'Olympiade Mathématique Belge (OMB) est née en 1976 et est organisée annuellement par la Société Belge des Professeurs de Mathématiques d'expression française (SBPMef). Depuis 2004, elle compte entre 26000 et 28000 participants provenant d'environ 350 écoles de l'enseignement secondaire belge francophone et luxembourgeois. En 2015, pour sa quarantième édition, la barre des 700000 participations a été franchie. Au regard d'une population de cinq millions d'habitants, il ne fait aucun doute que l'OMB rencontre un très grand succès.

Depuis 1996, trois catégories de participants existent : la catégorie miNi pour le premier degré de l'enseignement secondaire (12-14 ans), la catégorie miDi pour le second degré (14-16 ans) et la catégorie maXi pour le troisième degré (16-18 ans).

L'organisation de la compétition nécessite un énorme bénévolat. On estime à plus d'un millier le nombre de professeurs de mathématiques participant à la surveillance et à la correction de l'épreuve. Cette épreuve a lieu le mercredi après-midi ; demi-jour de congé dans l'enseignement belge.

La première partie, les éliminatoires, se déroulent le second mercredi de janvier suivant les congés de Noël et Nouvel An. Ils se déroulent dans les écoles des participants et sont corrigés par les professeurs de ces écoles. Ils sont constitués de 30 questions parmi lesquelles 22 sont à choix multiple (une bonne réponse parmi cinq) et 8 possèdent pour réponse un entier compris entre 0 et 999.

Dans chacune des dix zones géographiques où la compétition a lieu, 12% des participants environ ont accès à la demi-finale. Celle-ci est organisée par les secrétaires régionaux dans dix universités ou écoles de ces régions au mois de mars, peu après le congé de Carnaval. Les questionnaires sont constitués de 30 questions parmi lesquelles 15 sont à choix multiple (une bonne réponse parmi cinq) et 15 possèdent pour réponse un entier compris entre 0 et 999. Les secrétaires régionaux envoient les résultats des participants au secrétaire national en vue de la sélection pour l'épreuve finale.

La finale a lieu peu après le congé de Pâques à l'université de Namur et regroupe entre 110 et 115 participants. Elle est surveillée et corrigée par les membres du jury national. Elle est constituée de quatre questions ouvertes dont les réponses sont à justifier en détail.

Enfin, au mois de mai, a lieu alternativement, dans les universités de Bruxelles, Liège, Louvain-la-Neuve, Mons et Namur, la proclamation des résultats des trois catégories et la remise des prix offerts par la SBPMef ainsi que divers mécènes. Le prix Willy Vanhamme pour la réponse la plus élégante à un des problèmes de la finale y est offert. Les identités des participants francophones de l'équipe belge pour l'olympiade internationale y sont aussi annoncées.

Le jury national est constitué d'une vingtaine de membres. Ils sont enseignants, inspecteurs et conseillers pédagogiques de tous les réseaux de l'enseignement secondaire ou des Hautes Écoles ou Universités belges et luxembourgeoises. Ce jury compose les questionnaires de toutes les étapes de la compétition. Les membres du jury effectuent, chaque année, bénévolement, plusieurs dizaines d'heures de travail pour le bon déroulement de la compétition.

2 Motivation et coordonnées

L'OMB poursuit le triple but d'intéresser les élèves aux mathématiques par le biais d'une compétition passionnante, de mettre l'accent sur l'importance des problèmes dans la formation scolaire et de fournir aux professeurs un choix d'exercices peu routiniers.

Les exercices de l'OMB sont libres de droits à condition de mentionner qu'ils proviennent de cette compétition. Plusieurs manuels belges de mathématiques puisent d'ailleurs dans cette réserve d'exercices.

Tous les quatre ans, la SBPMef publie un recueil des questions de quatre olympiades. Le dernier (2011-2014) constitué par Pascal Dupont et Michel Sebille est disponible auprès de la SBPMef aux coordonnées suivantes :

SBPMef
24 rue du onze novembre
7000 Mons
Belgique

`http://www.sbpm.be` (SBPMef)
`http://omb.sbpm.be` (OMB)

3 Problème 1 (finale maXi 2014)

3.1 L'énoncé

Les Babeleirs[1] parlent la babelangue, qui s'écrit au moyen d'un alphabet de deux lettres, A et B. Les mots de leur lexique sont tous ceux qui découlent des règles suivantes, et uniquement ceux-là :

R1. Le mot d'une seule lettre B appartient au lexique.

1. Ceci ne fait absolument pas référence à la tour de Babel. En bruxellois, babeleir désigne une personne qui parle vraiment beaucoup voire beaucoup trop.

R2. Si un mot du lexique contient un B, le mot obtenu en remplaçant ce B par ABA appartient aussi au lexique.

R3. Si un mot du lexique contient deux A successifs, alors le mot obtenu en les remplaçant par un B appartient aussi au lexique.

R4. Si un mot du lexique contient deux B successifs, alors le mot obtenu en les supprimant appartient aussi au lexique.

1. Le mot AA appartient-il au lexique de la babelangue ?
2. Le mot AAA appartient-il au lexique ?
3. Le mot vide (formé de zéro lettre) appartient-il au lexique ?
4. Le mot $BABA$ appartient-il au lexique ?
5. Décrire l'ensemble des mots du lexique comportant exactement deux B.
6. Combien y a-t-il de mots de n lettres dans le lexique de la babelangue ?

3.2 Une solution

Cette solution est due au participant Pablo Bustillo Vazquez.

1. $B \xrightarrow{R2} ABA \xrightarrow{R2} AABAA \xrightarrow{R3} AABB \xrightarrow{R4} AA$.
2. Montrons qu'un mot de babelangue contient toujours un nombre pair de A. On commence avec le mot B qui en contient 0, c'est-à-dire un nombre pair. Mais la règle $R2$ ajoute 2 lettres A, $R3$ en enlève 2 et $R4$ n'en modifie pas le nombre. Aucune règle ne permet donc de modifier la parité du nombre de A. Le mot AAA ne peut ainsi appartenir au lexique.
3. $B \xrightarrow{R2} ABA \xrightarrow{R2} AABAA \xrightarrow{R2} AAABAAA \xrightarrow{R3} BABAAA \xrightarrow{R3} BABBA \xrightarrow{R4} BAA \xrightarrow{R3} BB \xrightarrow{R4} \phi$.
4. Le point (3) nous a montré que le mot $BABBA$ appartient au lexique. $BABBA \xrightarrow{R2} BABABAA \xrightarrow{R3} BABABB \xrightarrow{R4} BABA$
5. Commençons par démontrer la réciproque de $R3$. Partons d'un mot contenant un B.
   $\ldots B \ldots \xrightarrow{R2} \ldots ABA \ldots \xrightarrow{R2} \ldots AABAA \ldots \xrightarrow{R3} AABB \xrightarrow{R4} \ldots AA \ldots$
   Ainsi, en appliquant un certain nombre de fois $R2$ puis la réciproque de $R3$, on peut obtenir tout mot composé exclusivement d'un nombre pair de A.
   On peut choisir toute paire de A consécutifs et les remplacer par un B en vertu de $R3$. Dès lors, les mots recherchés sont tous les mots composés de deux B et d'un nombre pair de A. Au point (2), on a bien vu qu'il n'y en a pas d'autre.
6. On a vu au point précédent que les mots de n lettres du lexique sont ceux composés d'un nombre pair de A. Il y a 2^{n-1} manières de choisir les $n-1$ premières lettres du mot La dernière est alors A ou B selon que les $n-1$ premières contiennent un nombre impair ou pair de A. Le lexique contient donc 2^{n-1} mots de n lettres.

3.3 Analyse du problème

Lors de la sélection de ce problème, une discussion plus longue qu'à l'habitude a eu lieu entre les membres du jury. Ce problème est-il plutôt simple ou plutôt compliqué ? Il n'est en effet pas nécessaire de connaître beaucoup de mathématiques pour trouver la solution. Si, au premier abord, cela indiquerait qu'il est « facile », il peut aussi apparaitre plus difficile pour ceux qui préfèrent des problèmes plus « classiques ».

Au final, et bien mal lui en a pris, le jury a placé le problème en première position ; considérant ainsi qu'il était le moins difficile des quatre proposés. Après correction, il s'est avéré que ce problème à recueilli à la fois le plus grand nombre de réponses à la cote maximale et la moyenne la plus faible des quatre questions de la finale. Plus encore, certains des participants terminant parmi les premiers de la finale ont obtenu de mauvais résultats sur cette question.

Le fait que le problème ne fasse pas explicitement référence à une matière mathématique a pleinement joué un rôle d'élévation de la difficulté. Il n'est ici pas possible de faire référence directement à des résultats bien connus pour avancer dans la résolution. Ce « saut dans l'inconnu » a été préjudiciable à un quart des participants qui n'ont parfois même pas répondu complètement aux premières sous-questions pourtant faciles à première vue.

Une autre caractéristique est que les élèves de 5ème année (16-17ans) ont mieux réussi ce problème que les élèves de 6ème année (17-18 ans). En Belgique, la combinatoire se voit en sixième année. Pour un élève de cette année d'étude, il est dès lors tentant de répondre à la sous-question (6) en utilisant la (5) et les coefficients binomiaux. Le nombre de mots de n lettres est alors, selon la parité de n,

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n}$$

ou

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n-1}.$$

Ils ont clairement vu que ce ne pouvait être la réponse finale et que ces expressions devaient être simplifiables. Elles le sont effectivement en 2^{n-1}. Ils avaient donc assez de connaissances en combinatoire pour obtenir une expression à l'aide des coefficients binomiaux, mais pas assez pour obtenir la réponse finale. Les élèves de cinquième année, n'ayant pas connaissance des coefficients binomiaux, ont plus naturellement trouvé une solution plus simple.

À ce titre, la réflexion intuitive la plus simple consiste à se dire que puisqu'un mot de n lettres contient un nombre impair ou pair de B, ils se répartissent peut-être selon une proportion moitié-moitié. Les petits cas faisables à la main convainquent alors définitivement de la justesse de cette intuition.

4 Problème 1 (finale miNi 2014)

4.1 L'énoncé

Nicole a effectué une division écrite au crayon. Pour l'ennuyer, Jules gomme grossièrement quelques chiffres et les remplace par des lettres. Ci-dessous se trouve l'opération ainsi maltraitée.

1. Le chiffre des unités peut-il être 3 ? 6 ?
2. Quel aurait pu être le calcul de Nicole ? Justifier chaque remplacement de lettre par un chiffre. S'il y a plusieurs solutions, envisager toutes les solutions.

$$\begin{array}{ccccc|c}
A & B & C & 9 & 4 & 2\,3\,D\,E \\ \cline{6-6}
F & G & H & I & & 1\,2 \\ \cline{1-4}
 & J & K & L & M & \\
 & N & O & P & Q & \\ \cline{2-5}
 & & & 3 & 0 &
\end{array}$$

4.2 Une solution

Cette solution est inspirée de celles des participants Nicolas BEYNE, Quentin CLAUS et Vincent THIELENS. Pour sa solution, Nicolas BEYNE a reçu le prix Willy VANHAMME récompensant la solution la plus élégante de la compétition toutes catégories confondues.

1. Dans une division euclidienne,

$$\text{dividende} = \text{diviseur} \times \text{quotient} + \text{reste}.$$

   Ici, dividende−reste $= ABC94 - 30 = ABC64$. Donc le produit diviseur× quotient, c'est-à-dire $23DE \times 12$, vaut $ABC64$. Son chiffre des unités est 4. Or le chiffre des unités de $23DE \times 12$ ne dépend que du chiffre des unités de $E \times 2$. Si E, le chiffre des unités du diviseur, valait 3, le chiffre des unités de $23DE \times 12$ serait $3 \times 2 = 6$ et pas 4. Si E valait 6, $E \times 2$ vaudrait 12 donc le chiffre des unités de $23DE \times 12$ serait 2 et pas 4. Par conséquent, le chiffre des unités du diviseur ne peut pas être 3 ni 6.

2. Rappelons que $23DE \times 12 = ABC64$. Si D et E étaient chacun 0 (le plus petit chiffre), le produit $23DE \times 12$ vaudrait 27600. Si D et E étaient chacun 9 (le plus grand chiffre), le produit $23DE \times 12$ vaudrait 28788. Le produit $23DE \times 12$ est donc compris entre ces deux nombres. Nous cherchons les multiples de 12 compris entre 27600 et 28788 et qui s'écrivent $ABC64$. Ils commencent soit par $AB = 27$, soit par $AB = 28$. De plus, les multiples de 12 sont toujours des multiples de 3. En utilisant le critère de divisibilité par 3, nous trouvons que si $AB = 27$, C doit être 8 et que si $AB = 28$, C doit être 1, 4 ou 7.

   Nous avons donc trouvé les quatre seules valeurs possibles pour le dividende $ABC94$: 27894, 28194, 28494 et 28794. Il suffit alors de leur soustraire le reste 30 et de diviser chaque résultat par le quotient 12 pour trouver les quatre valeurs possibles pour le diviseur : 2322, 2347, 2372, 2397. Les autres remplacements de lettres par des chiffres s'obtiennent à partir du dividende et du diviseur en effectuant la division écrite :

$$\begin{array}{r|l} 27894 & 2322 \\ \cline{2-2} 2322 & 12 \\ \hline 4674 & \\ 4644 & \\ \hline 30 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 28194 & 2347 \\ \cline{2-2} 2347 & 12 \\ \hline 4724 & \\ 4694 & \\ \hline 30 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 28494 & 2372 \\ \cline{2-2} 2372 & 12 \\ \hline 4774 & \\ 4744 & \\ \hline 30 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 28794 & 2397 \\ \cline{2-2} 2397 & 12 \\ \hline 4824 & \\ 4794 & \\ \hline 30 & \end{array}$$

4.3 Analyse du problème

Comme souvent, produire des questions pour la catégorie d'âge la moins élevée n'est pas aisé. Les participants de première année commencent seulement l'apprentissage des justifications. Ils ne maîtrisent donc pas tous ce domaine qui les mènera au concept de démonstration. Plus encore, l'école primaire peut parfois formater les mathématiques d'une manière qui ne convient pas à l'enseignement secondaire. Certains participants ne se sont parfois pas encore défait de ce formatage.

L'un de ces formatage malheureux est que l'élève peut sortir de l'école primaire en étant convaincu qu'un problème mathématique ne possède qu'une seule et unique solution. Conscient de ce travers, le jury a décidé de rédiger la question en précisant qu'il était possible d'en avoir plusieurs. Cela n'a malheureusement pas suffit et la moitié des participants n'en a donné qu'une seule. Si cela ne signifie pas nécessairement qu'il n'ont pas envisagé l'existence d'autres solutions, il est clair que c'est là un problème qui n'est pas anodin.

L'OMB remet chaque année un prix d'élégance. Il est rare qu'il soit attribué en catégorie miNi pour la simple raison que des élèves peu habitués aux démonstrations ont du mal à en rédiger une et donc, a fortiori, encore plus à en rédiger une élégante. La raison pour laquelle Nicolas Beyne l'a reçu est qu'il s'est aperçu (et il était le seul) que ce problème à 17 inconnues (de A à Q) était en réalité un problème à 5 inconnues (de A à E) et l'a résolu en utilisant ces cinq variables seulement et en plus sans recourir à la structure du calcul écrit, mais uniquement à celle de la division euclidienne.

Les autres participants ont en effet résolu cette question en remplaçant les chiffres les uns après les autres en commençant évidemment par le fait que $M = 4$ et en continuant lettre après lettre en respectant la structure d'un calcul écrit.

La preuve ultime, s'il en est besoin, que des élèves de cet âge-là ne sont pas du tout au fait des standards de la démonstration est que sept participants sur les quarante ont justifié les remplacements des lettres par des chiffres correctement, mais par ordre alphabétique ; la correction des copies étant rendue ainsi assez pénible.