OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

PRESENTATION

Concours organisé par le Ministère de l'Education Nationale, destiné à développer le goût des mathématiques, de la recherche et de l'esprit d'initiative, à favoriser l'émergence d'une nouvelle culture scientifique et à permettre aux élèves d'aborder les problèmes mathématiques de manière ouverte, en autorisant des approches originales. Il s'adresse à tous les lycéens de première de toutes séries (plus de 20 000 candidats), y compris les lycées français à l'étranger.

Les candidats s'inscrivent en février par l'intermédiaire de leur établissement scolaire. Les connaissances nécessaires sont basées sur les programmes de collège et de seconde, complétées par les parties communes des programmes des différentes classes de première.

Dans chaque académie, une cellule établit un palmarès et organise une remise des prix. Les meilleures copies sont transmises à un jury national pour une remise de prix nationaux, début juin.

Dans certaines académies (Versailles, Rouen, Amiens, Corse, Lyon, Grenoble, Caen), d'autres Olympiades Académiques ont été créées à l'intention des élèves de quatrième. Il existe même, dans l'académie de Versailles, une Olympiade Académique par équipes à l'intention des élèves de troisième et seconde.

FICHE TECHNIQUE

- **Historique :**

Créées en novembre 2000, ouvertes à toutes les séries de première depuis 2005. Puis, l'académie de Versailles a eu l'initiative des Olympiades de Quatrième (2006) et des Olympiades de Troisième et Seconde par équipes (2014).

- **Epreuves :**

Olympiade de première : individuelle, durée quatre heures (mi mars). Quatre exercices dont deux communs à toutes les académies, deux autres choisis par la cellule académique.

Olympiade de quatrième : individuelle, durée deux heures (début avril). Quatre exercices.

Olympiade de seconde et troisième : par équipes de trois, durée deux heures (début avril). Trois ou quatre exercices.

- **Contact :**

Site Internet :
http://eduscol.education.fr/cid46901/olympiades-nationales-de-mathématiques.html

Annales (Olympiades de première) publiées par l'APMEP.

OLYMPIADE DE PREMIÈRE
EXERCICE NATIONAL, 2011

Enoncé : Essuie-glace (les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes)

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brise sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment $[OB]$. Soit A le point de $[OB]$ tel que $OA = 15$ cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment $[AB]$ (voir figure 1). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui-ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au cm² près.

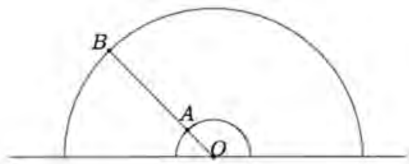


Figure 1

2. Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glace modélisés par deux segments $[OB]$ et $[O'B']$ de même longueur R, l'un tournant autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que $OO' = R$ (voir figure 2). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

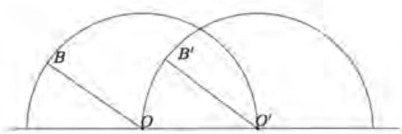


Figure 2

3. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3) : un segment $[AB]$, qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment $[OC]$ qui relie le centre de rotation O à un point C du segment $[AB]$ tels que $\widehat{OCA} = 30°$, $CB = 4 \times CA$ et $OC = \sqrt{3} \times CA$. On pose $CA = a$.

Figure 3

(a) Démontrer que le triangle AOC est isocèle.

(b) Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que $[MN]$ est horizontal (voir la figure 4 page suivante). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment $[OM']$ est horizontal.

Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de a l'aire de la surface essuyée par le balai.

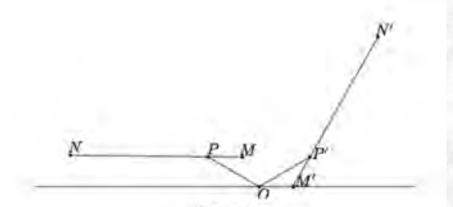


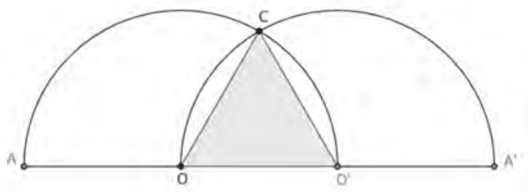
Figure 4

- **Solutions :**

1) L'aire cherchée est : $\frac{1}{2}\left(\pi \times 60^2 - \pi \times 15^2\right) = 3375 \times \frac{\pi}{2}$ cm², soit 5301 cm² (valeur arrondie au cm² près).

2) L'aire essuyée par les balais est la somme des aires des secteurs angulaires AOC et $CO'A'$ et du triangle équilatéral COO'. Or $\widehat{AOC} = 120°$, donc le secteur angulaire AOC a pour aire $\frac{\pi R^2}{3}$, tout comme le secteur angulaire CO'A'. Le triangle équilatéral COO' a pour base R et pour hauteur $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

En définitive, l'aire cherchée est : $\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$.



3)

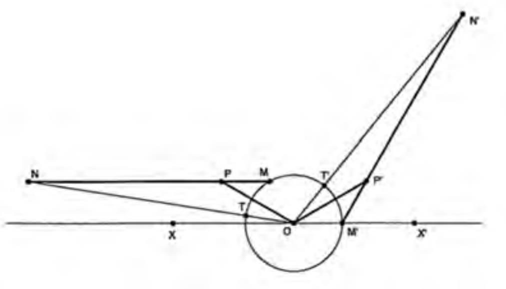
a) Soit H le pied de la hauteur AH du triangle AOC.

$CH = CA \times \cos 30° = a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}CO$, donc le triangle AOC, dont la hauteur est aussi médiane, est isocèle.

b) L'angle dont a tourné le dispositif est $\widehat{MOM} = 180° - \widehat{XOM}$. Or, $\widehat{MOP} = \widehat{MPO} = \widehat{XOP} = 30°$ donc $\widehat{MOM'} = 120°$.

La surface essuyée par les balais est délimitée par les segments [*MN*] et [M'N'] et les arcs de cercle *MM'* et *NN'*. Or la portion de plan délimitée par les segments [*TN*], [*NM*] et l'arc de cercle *TM* a la même aire que celle délimitée par les segments [*T'N'*], [*N'M'*] et l'arc de cercle *T'M'* : elles se déduisent l'une de l'autre par rotation. Donc l'aire cherchée est la même que celle délimitée par les segments [*TN*], [*T'N'*] et les arcs de cercle *NN'* et *TT'*, soit $\frac{\pi}{3}\left(ON^2 - OT^2\right)$. Or $OT^2 = a^2$ et si *K* est la projection orthogonale de *O* sur (*MN*), $OK = OP \times \mathbf{sin}\, 30° = a\frac{\sqrt{3}}{2}$
et $NK = NP + OP \times \mathbf{cos}\, 30° = 4a + \frac{3}{2}a$,
donc $ON^2 = OK^2 + NK^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{121}{4}a^2 = 31a^2$.
En définitive, l'aire cherchée est $10\pi a^2$.

On peut aussi dire que si l'essuie-glace décrivait un tour complet, il essuierait toute la surface comprise entre les cercles de rayon *ON* et de rayon *OM*, soit : $\pi\left(ON^2 - OM^2\right) = 30\pi a^2$.
Puisqu'il tourne d'un tiers de tour, il essuie le tiers de cette surface.



Commentaire et développement
A la différence des problèmes d'Olympiades Internationales, ceux-ci ont des énoncés longs et progressifs. Ils s'adressent à un public plus vaste et doivent donc comporter des premières questions aisément abordables. On remarquera par ailleurs que les aires calculées aux questions 1), 2) et 3) peuvent difficilement être comparées l'une à l'autre.

OLYMPIADE DE PREMIÈRE
Exercice 4 – Lyon 2012

Enoncé : duels tétraédriques

Un dé tétraédrique comporte quatre faces comme le dé représenté ci-contre. Lorsqu'on jette un tel dé, le résultat est le nombre inscrit au plus près de la base du tétraèdre. Dans notre exemple, le dé tétraédrique est tombé sur la face 4.

Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jouent avec quatre dés tétraédriques réguliers et équilibrés mais qui ne sont pas numérotés de façon habituelle. Ainsi, le dé d'Antoine compte quatre faces numérotées 1, 6, 6 et 6. Avec ce dé, le nombre 1 est obtenu avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et le nombre 6 avec la probabilité $\frac{3}{4}$.
Le dé de Baptiste est numéroté 4, 4, 5 et 5, celui de Cyril, 3, 3, 3 et 8, et enfin, celui de Diane, 2, 2, 7 et 7.

1. Chaque joueur jette son dé tétraédrique une fois. Qui a le plus de chances d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 6 ?

2. Les joueurs commencent une série de duels : Antoine joue contre Baptiste, Baptiste joue contre Cyril, Cyril joue contre Diane, Diane joue contre Antoine. Le gagnant de chaque duel est le joueur qui a obtenu le résultat le plus élevé.

(a) Montrer que dans le premier duel Antoine gagne contre Baptiste avec une probabilité de $\frac{3}{4}$.

(b) Donner les probabilités de gain des joueurs dans les trois autres duels.

3. Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jettent simultanément leur dé. Celui des quatre joueurs qui obtient le plus grand nombre gagne.

(a) Montrer que la probabilité que Baptiste gagne est égale à $\frac{3}{32}$.

(b) Qui a le plus de chances de gagner ce jeu ?

4. Antoine, Baptiste, Cyril et Diane utilisent maintenant d'autres dés, numérotés avec des entiers naturels, de sorte que celui d'Antoine a des faces numérotées a_1, a_2, a_3, a_4 avec $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, celui de Baptiste a des faces numérotées b_1, b_2, b_3, b_4 avec $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4$, celui de Cyril a des faces numérotées c_1, c_2, c_3, c_4 avec $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4$, celui de Diane a des faces numérotées d_1, d_2, d_3, d_4 avec $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq d_4$.

Nous savons de plus qu'aucun des numéros d'un dé tétraédrique ne se retrouve sur un autre dé tétraédrique. Par conséquent, dans chaque duel, il y a toujours un gagnant et un perdant.

(a) Montrer que, si $a_2 \leq b_2$, la probabilité qu'Antoine gagne contre Baptiste est inférieure ou égale à $\frac{5}{8}$.

(b) Existe-t-il des dés tétraédriques tels qu'Antoine gagne contre Baptiste, Baptiste gagne contre Cyril, Cyril gagne contre Diane et Diane gagne contre Antoine, chacun avec une probabilité strictement supérieure à $\frac{5}{8}$?

(c) Existe-t-il des dés tétraédriques tels qu'Antoine gagne contre Baptiste, Baptiste gagne contre Cyril, Cyril gagne contre Diane et Diane gagne contre Antoine, chacun avec une probabilité égale à $\frac{5}{8}$?

- **Solution :**

1) Antoine (probabilité $\frac{3}{4}$), alors que Diane, Cyril et Baptiste ont pour pro babilités $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$ et 0 respectivement.

2)

a) Antoine gagne contre Baptiste si et seulement si il obtient 6, ce qui a pour probabilité $\frac{3}{4}$.

b) Baptiste gagne contre Cyril si et seulement si Cyril obtient 3 (probabi lité $\frac{3}{4}$). Cyril gagne contre Diane si et seulement si : soit il obtient 8 (pro babilité $\frac{1}{4}$), soit il obtient 3 et Diane 2 (probabilité $\frac{3}{8}$), donc la probabi lité totale est $\frac{5}{8}$. Et Diane gagne contre Antoine si et seulement si : soit Antoine obtient 1 soit Antoine obtient 6 et Diane 7 (même probabilité $\frac{5}{8}$).

On remarquera que chacune de ces quatre probabilités est supérieure à $\frac{1}{2}$.

3)

a) Baptiste gagne si et seulement si Antoine obtient 1, Cyril 3 et Diane 2, ce qui a pour probabilité : $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{32}$.

b) Antoine gagne si et seulement si il obtient 6, Cyril 3 et Diane 2 (probabilité $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{9}{32}$). Diane gagne si et seulement si elle obtient 7 et Cyril 3 (probabilité $\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$). Cyril gagne si et seulement si il obtient 8 (probabilité $\frac{1}{4}$). On a bien la somme des probabilités $\frac{3}{32}+\frac{9}{32}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=1$ et c'est Diane qui a le plus de chances de gagner ce jeu.

4)

a) Puisque $a_2 < b_2$ (ils ne peuvent pas être égaux), il suffit pour que Baptiste gagne qu'il obtienne b_2, b_3 ou b_4 alors qu'Antoine obtient a_1 ou a_2 : probabilité $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{9}{32}$.

La probabilité qu'Antoine gagne est donc inférieure ou égale à $\frac{5}{8}$.

b) D'après la question précédente, une telle situation nécessiterait que $a_2 > b_2$, $b_2 > c_2$, $c_2 > d_2$, $d_2 > a_2$, donc $a_2 > a_2$, ce qui est impossible. De tels dés ne peuvent donc pas exister.

c) D'après la question (2), les dés du départ conviennent presque (les probabilités sont d'ailleurs toutes quatre supérieures ou égales à $\frac{5}{8}$). Il suffit de changer le dé de Baptiste pour que la probabilité qu'Antoine gagne contre Baptiste et Baptiste contre Cyril soient chacune égale à $\frac{5}{8}$ et non $\frac{3}{4}$. Antoine doit pouvoir perdre contre Baptiste quand il obtient 6, donc $b_4 > 6$. La probabilité qu'il obtienne 6 et gagne contre Baptiste n'est plus alors qu'au maximum $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}<\frac{5}{8}$. Il doit donc pouvoir gagner contre Baptiste quand il obtient 1, donc $b_1 < 1$. On vérifie aisément que si le dé de Baptiste a pour faces 0, 4, 5, 9 par exemple, Antoine a une probabilité $\frac{9}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{8}$ de gagner contre Baptiste, et Baptiste a la même probabilité de gagner contre Cyril. Donc les dés (1, 6, 6, 6), (0, 4, 5, 9), (3, 3, 3, 8), (2, 2, 7, 7) répondent à la question.

Commentaires :
Les calculs sont plus ou moins pénibles selon la manière de traduire numériquement les questions posées. On peut par exemple envisager des arbres à 256 branches, ou des arbres à 16 branches quand chaque dé ne prend que deux valeurs distinctes.

La quatrième question semble déroutante de prime abord, elle nécessite des raisonnements ingénieux et conduit à un résultat intéressant.

OLYMPIADE DE QUATRIÈME
EXERCICE 4 – LYON 2014

Enoncé : Nul en Maths

Madame Mathix a une classe de 30 collégiens vraiment exceptionnels.

Elle affirme qu'en maths, la moyenne de ses élèves est supérieure à 13 (c'est-à-dire la somme des trente notes divisée par 30). Un journaliste vient visiter le collège et constate que chaque élève de cette classe aime faire du ski ou jouer au foot.

Certains élèves aiment même les deux sports, mais aucun élève n'aime ni l'un ni l'autre.

Le journaliste s'intéresse surtout aux notes des élèves en maths et remarque que la moyenne des amateurs de foot est inférieure ou égale à 10. Il calcule alors la moyenne des amateurs de ski et obtient de nouveau un résultat inférieur ou égal à 10.

Il affirme donc que Madame Mathix lui a menti : la moyenne de la classe ne peut pas être supérieure à 13.

Décider si l'on peut être sûr que Madame Mathix a menti.
Si oui, donner une justification.
Si non, trouver pour chaque élève de la classe une note en maths (entre 0 et 20) et un ou deux sports favoris (parmi ski et foot) qui montrent que Madame Mathix peut tout à fait avoir raison.

- **Solution :**

Supposons que dix élèves n'aimant que le foot ont tous 20 en maths, dix élèves n'aimant que le ski ont également tous 20 en maths, tandis que dix élèves aimant à la fois le ski et le foot ont tous 0 en maths (si l'on fait trop de sport, on n'a plus de temps pour les maths).

Dans ce cas, la moyenne des amateurs de foot vaut :

$$(20+20+20+20+20+20+20+20+20+20+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0)/20 = (20\times10)/20 = 10$$

et la moyenne des amateurs de ski vaut également 10. La moyenne de toute la classe, cependant, vaut :

$$(20+\ldots+20+0+\ldots+0)\,/\,30=(20\times 20)\,/\,30=13{,}333\ldots$$

et Madame Mathix peut tout à fait avoir raison.

Commentaires :

Les méthodes de résolution d'un tel problème sont très différentes selon que la réponse est « oui » ou « non ». Il importe donc aussi vite que possible de « deviner » la bonne réponse car on perd beaucoup de temps si l'on part dans la mauvaise direction.