OLYMPIADES INTERNATIONALES MATHÉMATIQUES

HISTORIQUE

Chaque année, une centaine de pays envoient une équipe de six élèves de moins de 20 ans n'ayant pas entamé leurs études supérieures. Les épreuves consistent en deux séances de 4 heures et demie comportant chacune trois problèmes notés sur 7 points. Les énoncés sont courts, sans indications ni questions intermédiaires, dans l'un des thèmes parmi algèbre, arithmétique, combinatoire, géométrie (à noter l'absence de l'analyse et des probabilités). La solution demande surtout de l'ingéniosité, et non d'avoir assimilé des techniques standard.

À l'issue de la compétition, 1/12 des participants reçoivent une médaille d'or, 2/12 une médaille d'argent et 3/12 une médaille de bronze.

Mentionnons également qu'il existe de **nombreuses autres compétitions** du même type.
La France participe depuis quelques années :
aux Olympiades Européennes pour Filles (EGMO)
et aux Olympiades Balkaniques Juniors (réservées aux élèves de moins de 15,5 ans).

Préparation et mode de sélection des équipes :

Au sein de l'association Animath, l'Olympiade Française de Mathématiques (OFM) prépare et sélectionne les équipes de la manière suivante :

1) En début d'année scolaire, tout élève scolarisé entre la quatrième (exceptionnellement cinquième) et la terminale peut s'inscrire sur le site Animath (www.animath.fr) au test d'entrée de l'OFM qui se déroule début octobre. À l'issue de ce test, une centaine d'élèves sont sélectionnés (les sujets pour les collégiens diffèrent de ceux des sujets pour lycéens, et de plus les barres d'admission diffèrent selon que l'élève est scolarisé en seconde, première ou terminale).

2) Ces élèves sont alors invités à suivre une préparation par correspondance comportant des envois mensuels d'exercices et des tests.

3) En février, 30 à 40 élèves participent à un stage d'une semaine.

4) À l'issue de plusieurs tests de sélection, les équipes pour les diverses compétitions sont constituées.

En outre, indépendamment des sélections pour les Olympiades Internationales, Animath organise :

La Coupe Animath, compétition ouverte à tous les élèves entre la quatrième (exceptionnellement cinquième) et la première, qui se déroule début juin. Suite à cette compétition, 60 à 80 élèves sont invités à participer à un stage d'été de 10 jours fin août, pendant lequel ils sont initiés aux mathématiques olympiques.

Un stage junior à la Toussaint, ouvert aux élèves de collège ou de seconde. La sélection pour ce stage s'effectue sur dossier.

Public concerné.
Les derniers tests de sélection ont attiré de l'ordre de 500 candidatures, pour la plupart de très bon niveau. Les stages et la formation continue concernent plus de 150 élèves par an. De par leur nature, les exercices olympiques ne sont accessibles qu'à une petite élite, représentant au plus quelques élèves de chaque établissement. Soulignons cependant que des élèves exceptionnels proviennent régulièrement de tous les horizons, tant du point de vue géographique que social, et pas seulement des « grands lycées ».

Renseignements et contact

: **olymp@animath.fr**

Site Internet : **http://www.animath.fr**

EXEMPLE DE PROBLÈME DES OLYMPIADES INTERNATIONALES

Enoncé :

On dit qu'un ensemble fini S de points du plan est équilibré si, pour tous points A et B de S distincts, il existe un point C de S tel que $AC = BC$. On dit que S est excentrique si, pour tous points A, B et C de S distincts, il n'existe pas de point P de S tel que $PA = PB = PC$.

a) Prouver que pour tout entier $n \geq 3$, il existe un ensemble équilibré contenant exactement n points.

b) Déterminer tous les entiers $n \geq 3$ pour lesquels il existe un ensemble équilibré et excentrique contenant exactement n points.

- **Solution :**

a) Si n est impair, alors les sommets d'un polygone régulier à n côtés forment un ensemble équilibré et excentrique. Si n est pair, l'ensemble $\{O, A_0, A_1, \dots A_{n-2}\}$ avec $A_k = \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3(n-2)}\right), \sin\left(\frac{2k\pi}{3(n-2)}\right)\right)$ est équilibré mais non excentrique.

b) On montre qu'il existe un ensemble équilibré et excentrique de cardinal n si et seulement si n est impair. Le sens direct ayant été montré dans la partie a), il reste à voir que s'il existe un ensemble équilibré excentrique S de cardinal n alors n est impair.

Comme S est excentrique, un cercle centré en un point A de S passe par au plus 2 points de S.
Pour toute paire non ordonnée $\{A,B\}$ de points, choisissons un cercle $C_{A,B}$ centré en un point de S qui passe par A et B. De ce qui précède, on en déduit que si $\{A,B\}$ et $\{A',B'\}$ sont deux paires distinctes, alors $C_{A,B} \neq C_{A',B'}$. Par conséquent, il existe au moins $\frac{n(n-1)}{2}$ cercles centrés en un point de S et passant par deux points de S.

Si n était pair, alors pour tout point $A \in S$ il existerait au plus $\frac{n-2}{2}$ cercles centrés en A et passant par deux points de S, donc il y aurait au total au plus $\frac{n(n-2)}{2}$ cercles.

Commentaires :
Ce problème était le plus “facile” parmi les trois problèmes de la première journée d'épreuve, et nécessitait très peu de connaissances. Néanmoins, seuls 265 candidats sur les 577 (dont 4 français sur 6) ont obtenu la note maximale.

La partie a) est probablement abordable pour de très bons élèves peu entraînés, mais la partie b) nécessitait un peu d'habitude de la technique de “double comptage”'.

EXEMPLE DE PROBLÈME DE LA COUPE ANIMATH 2014

Enoncé :

Trouver tous les couples de chiffres (a,b) tels que l'entier dont les quatre chiffres sont $ab32$ soit divisible par 99.

- **Solution :**

Soit n l'entier formé par les deux chiffres ab. On cherche a et b de sorte que $100n + 32$ soit divisible par 99.

Or, $100n + 32 = n + 32 + 99n$, donc la condition équivaut au fait que $n + 32$ soit divisible par 99.

Or, $0 \leq n \leq 99$, donc $32 \leq n + 32 \leq 131$. L'unique entier entre 32 et 131 qui est divisible par 99 étant 99, la seule solution est $n = 99 - 32 = 67$, c'est-à-dire $a = 6$ et $b = 7$.

Commentaires :
Cet exercice est le deuxième parmi les quatre que devaient résoudre les collégiens en trois heures. On pouvait également le résoudre en utilisant les critères de divisibilité par 9 et par 11 : en effet, la condition de divisibilité par 11 donne que $b - (a+1)$ est divisible par 11, ce qui impose que $b = a + 1$ puisque b et $a + 1$ sont compris entre 0 et 10. Ensuite, la condition de divisibilité par 9 donne que $a + b + 3 + 2 = 2a + 6 = 2(a + 3)$ est divisible par 9, ce qui impose que $a = 6$ puis $b = 7$.

Dans tous les cas il nécessitait quelques compétences sur les manipulations algébriques. Sur les 79 copies rendues, la moyenne obtenue était de presque 5 points sur 7, ce qui montre le bon niveau des élèves s'étant présentés au concours.

EXEMPLE DE PROBLÈME DU TEST D'ENTRÉE DE L'OFM 2013

Enoncé :

Soit A, B, C et D quatre points distincts dans le plan. Il se trouve que tout cercle qui passe par A et B rencontre tout cercle qui passe par C et D.

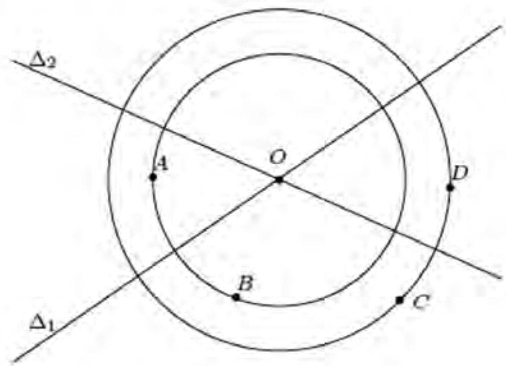
Prouver que A, B, C et D sont alignés ou qu'ils sont tous sur un même cercle.

- **Solution :**

Par l'absurde : supposons que les quatre points ne soient ni alignés ni cocycliques.

Soit Δ_1 la médiatrice de $[AB]$, et Δ_2 celle de $[CD]$.

S'il existe un point O commun à Δ_1 et Δ_2 : on note Γ_1 le cercle de centre O et de rayon OA, et Γ_2 le cercle de centre O et de rayon OC.



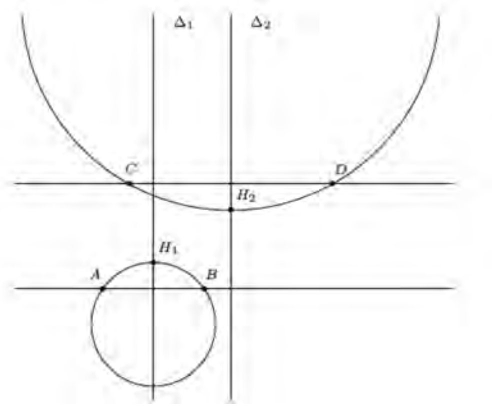
Bien entendu, on a $A, B \in \Gamma_1$ et $C, D \in \Gamma_2$

On ne peut avoir $OA = OC$ sans quoi les cercles Γ_1 et Γ_2 seraient confondus et les points A, B, C, D seraient cocycliques, en contradiction avec notre hypothèse.

Donc, les cercles Γ_1 et Γ_2 sont concentriques et de rayons différents. Mais alors, on a trouvé un cercle qui passe par A et B, et un cercle qui passe par C et D, qui ne se rencontrent pas. Cela contredit les données de l'énoncé.

On en déduit que les droites Δ_1 et Δ_2 n'ont pas de point commun, et sont donc parallèles. Par suite, les droites (AB) et (CD) sont parallèles (et distinctes, puisque les quatre points sont supposés non alignés).

Soit $d > 0$ la distance entre les droites (AB) et (CD). Soit H_1 le point de Δ_1 situé dans la bande délimitée par (AB) et (CD) et à une distance $\frac{d}{4}$ de (AB). Le point H_2 est défini de façon analogue vis-à-vis de (CD).



Alors, les cercles Γ'_1 et Γ'_2, qui passent respectivement par les points A, B, H_1, et par les points C, D, H_2 ne se rencontrent pas, ce qui contredit à nouveau les données de l'énoncé.

Et finalement, les points A, B, C, D sont alignés ou cocycliques.

Commentaires :

Ce problème est assez éloigné des types de problèmes de géométrie que l'on rencontre habituellement aux Olympiades Internationales, car il ne nécessite que très peu de connaissances et de techniques de géométrie synthétique. Néanmoins, il permettait de détecter les élèves ayant de bonnes facultés de raisonnement géométrique, qui seraient aptes par la suite à assimiler les notions nécessaires.

Cet exercice est le sixième parmi les huit exercices que devaient résoudre les candidats en quatre heures (plusieurs exercices étaient nettement plus abordables que celui-ci). Le score moyen obtenu à cet exercice était de 1 point sur 7, ce qui montre le peu d'aisance de la plupart des élèves avec la géométrie.

Le cas particulier où A, B, C sont supposés alignés est nettement plus abordable.

Voici une esquisse de solution : on peut supposer que (AB) est l'axe des abscisses. Si D appartient au demi-plan ouvert supérieur, considérer un cercle passant par D et tangent en C à (AB), et un cercle de grand rayon, passant par A et B, dont le centre est sur le demi-plan inférieur.

Le cas particulier implique en fait quasi-immédiatement l'exercice grâce à une inversion qui transforme le cercle ABC en une droite ; cependant les inversions sont quasiment inconnues des élèves français en dehors du monde olympique.