RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN

PRÉSENTATION

Le Rallye mathématique transalpin (RMT) est une compétition entre classes du primaire et du secondaire, d'élèves de 8 à 16 ans. Il se déroule actuellement dans une douzaine de provinces ou régions d'Italie, en France dans le département de l'Ain, à Lyon et en Franche-Comté, au Luxembourg, en Belgique francophone et en Suisse romande, dont il est originaire, et au Tessin.

Ses objectifs sont :

- pour les élèves, la résolution de problèmes, le travail en équipes, le débat scientifique et la justification des solutions ;

- pour les maîtres, l'observation des élèves en activité de résolution de problèmes, l'exploitation des sujets dans leur enseignement, l'analyse des résultats, la constitution d'une collection de problèmes expérimentés dont les stratégies et procédures de résolution ont été systématiquement relevées ;

- pour les chercheurs en didactique, pour les formateurs et pour les animateurs, l'enrichissement de leurs connaissances sur les phénomènes liés à la résolution de problèmes dans les apprentissages en mathématiques.

Les épreuves sont constituées de 5 à 7 problèmes, de difficultés variées, afin que chaque élève puisse être actif et que l'ensemble de la tâche soit trop lourd pour un seul individu, aussi doué soit-il. En l'absence de leur enseignant, les élèves disposent de 50 minutes pour s'organiser, résoudre les problèmes, adopter une seule réponse pour la classe et la rédiger de manière très explicite, avec les justifications nécessaires, en décrivant leurs démarches et solutions.

Des journées d'études internationales permettent aux animateurs des différents pays participants de travailler ensemble à l'élaboration des sujets, aux analyses des résultats et aux exploitations didactiques des problèmes du RMT.

Des groupes permanents de réflexion travaillent tout au long de l'année sur les analyses a priori et a posteriori des problèmes, sur le recueil des résultats et sur leur exploitation en vue de la formation des maîtres et de la pratique de classe.

Une « banque de problèmes » regroupe tous les problèmes, leurs analyses *a priori*, les résultats obtenus, les analyses a posteriori des copies d'élèves.

Cette *Banque de problèmes du RMT* a été récement ouverte au public.

FICHE TECHNIQUE

Historique :

1993 : création du Rallye mathématique romand ouvert aux classes des degrés 3 à 5 de l'école primaire (8 - 11 ans), 20 classes y participent.
1996 : le Rallye mathématique romand devient Rallye mathématique transalpin (RMT) avec la participation de classes italiennes. Depuis cette année, tous les problèmes font l'objet d'une analyse *a priori*.
1998 : Le Rallye mathématique transalpin (RMT) s'est ouvert aux classes des degrés 6 à 8 (11 - 14 ans) et s'est étendu à d'autres régions d'Italie, en France, au Luxembourg avec une participation totale de 500 à 600 classes. Les deux premières rencontres internationales se sont tenues à Brigue (CH) sur le thème de l'apport du RMT à la recherche en didactique. Le RMT se présente dans Panoramath 96.
2001 : participation de 1000 classes, 4^{e} rencontre internationale, fondation de l'Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT). Les résultats des épreuves commencent à être recueillis et analysés au niveau international. Des « finales de finales » virtuelles permettent de comparer régulièrement les copies des classes finalistes de chaque section et de travailler sur les critères communs d'attribution des points, leur harmonisation et leur interprétation.
2004 : plus de 2000 classes participent au 12^{e} RMT dans une vingtaine de sections. Les 8^{e} journées d'étude internationales se tiennent à Bourg-en-Bresse sur le thème « *Qu'est-ce qu'un bon problème pour le RMT ?* » Publication du quatrième volume des actes des rencontres. Ouverture aux classes des degrés 9 et 10 (15- 16 ans).
2005 : Lors de la 9^{e} rencontre internationale à Arco di Trento (I), constitution de groupes permanents, qui se réunissent lors des rencontres annuelles et poursuivent leur travail au cours de l'année, en vue d'une exploitation didactique des problèmes du RMT. Les thèmes retenus concernent la construction de concepts dans les domaines de la proportionnalité, de la géométrie plane et dans l'espace, de la numération, de l'approche des équations, des fonctions.
2008 : près de 3000 classes participent au 16^{e} RMT. Une première finale internationale réunit 12 classes de France, Belgique, Italie, Luxembourg et Suisse à Brigue (CH) à l'occasion des 12^{e} journées d'étude.
2010 : près de 4000 classes sont inscrites au 18^{e} RMT et 24 sections réparties en Italie, France, Belgique, Luxembourg, Suisse et Argentine. La 14^{e} rencontre internationale se tient à Besançon (F), sur le thème « *RMT, un regard constructif sur les erreurs* » déjà abordé lors de la rencontre précédente de Nivelles (BE). Les groupes de travail permanents présentent leurs travaux et leurs conclusions. L'idée d'une banque de problèmes est lancée. Le numéro 0 de la Gazette de Transalpie est présenté. Il s'agit d'une revue, nouvelle, de l'ARMT, publiée « *on line* » sur le site Internet, destinée à tous les animateurs et participants du RMT et, plus largement, à toutes les personnes intéressées par la didactique et l'enseignement des mathématiques.

2012 : Près de 4200 classes participent au 20e RMT. La 16e rencontre internationale a lieu à Villars-les-Dombes. Le thème est : « *RMT : 20 ans de pratique et de recherches* » et les travaux s'organisent autour de la Banque de problèmes du RMT.
2015 : Le seuil des 5000 classes participantes de 22 sections est franchi. La 19e rencontre se déroule à Sedilo, en Sardaigne (I) sur le thème « *RMT, apprendre ensemble en résolution de problèmes* ».

Épreuves :
Collectives, par classes.
8 catégories, des degrés 3 à 10 (8 à 16 ans).
Problèmes : 5 à 7, à résoudre en 50 minutes, de difficultés échelonnées, sans aide extérieure. Beaucoup de problèmes sont communs à plusieurs catégories.
Les solutions sont à rédiger avec explications détaillées, prises en compte pour l'attribution des points. La préparation des problèmes est faite en coopération par les différentes équipes régionales et nationales, avec analyses a priori. Les traductions (en français, italien, allemand) sont rigoureusement comparées. Les évaluations a posteriori des copies d'élèves sont conduites par des groupes de travail.

Compétition :
1. Épreuve d'entraînement en décembre, sous la responsabilité du maître. La classe s'inscrit en cas d'intérêt.
2. Épreuves I et II, de janvier à avril. Sur la base d'un barème unique, les corrections et les classements sont organisés au plan régional.
3. Finales régionales, en mai ou juin. Les classes qualifiées sont réunies dans un même établissement scolaire et disputent l'épreuve finale.
4. Une analyse comparée des solutions des meilleures classes finalistes de chaque région permet d'attribuer un titre de classe "championne" de chaque catégorie au plan international. Une finale internationale regroupant une douzaine de classes gagnantes des différentes sections a été organisée en 2008, la suivante aura lieu en 2016.

Partenaires :
Divers instituts de formation des maîtres et départements de mathématiques universitaires, selon les régions.

Contacts :
ARMT, coordinateurs internationaux :
Lucia Grugnetti, (Italie) : **lucia.grugnetti@unipr.it**
Philippe Persico, (France) : **philippe.persico@laposte.net**
Président d'honneur : François Jaquet, (Suisse) : **frajaquet@bluewin.ch**

Site Internet : **www.armtint.org**

PROBLEMES

Les quatre problèmes ci-dessous figurent, dans la Banque de problèmes du RMT, en compagnie de 300 autres (en l'état de sa construction en 2015). Pour chacun d'eux, les pages suivantes présentent des extraits des différentes rubriques des fiches de la banque de problèmes : énoncé, identification, tâche de résolution et savoirs mobilisés, procédures et obstacles relevés, exploitations didactiques.

Il faut rappeler ici que tous ces problèmes ont été résolus par groupes dans le cadre de la confrontation, sans aucune intervention extérieure (en l'absence de l'enseignant de mathématiques).

Problème 1 :

Les confitures

C'est la récolte des cerises. Grand-mère prépare des confitures dans son énorme chaudron, pour sa famille et ses voisins.

Lundi, elle cuit 8 kg de cerises avec 5 kg de sucre.

Mardi, elle cuit 10 kg de cerises avec 7 kg de sucre.

Jeudi, jour de la plus grande récolte, elle cuit 16 kg de cerises avec 10 kg de sucre.

Samedi, fin de la récolte, elle cuit 5 kg de cerises avec 3 kg de sucre.

Quel est le jour où elle a fait la confiture qui a le goût le plus sucré ?

Y a-t-il des jours où les confitures ont le « même goût » en sucre ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

- **Identification**

Ce problème a été proposé dans une épreuve du 15^{e} RMT en 2008 à des classes de 6^{e}, 5^{e} et 4^{e} année du Collège et de très nombreuses expérimentations ont été étendues à des classes de CM2.

Il est classé dans la banque sous le thème de la proportionnalité dans la famille des suites proportionnelles avec comparaisons de rapports.

Dans cette famille, la tâche essentielle est de déterminer les grandeurs qui pourraient être proportionnelles (en général deux) et extraire du contexte les suites de nombres pour chaque grandeur.

On le trouve sous les mots-clés : proportionnalité, conflit entre écarts et rapports, nombres décimaux, fractions.

Dans ce contexte de recette, la tâche mathématique consiste à trouver parmi les quatre couples de nombres (8 ; 5), (10 ; 7), (16 ; 10) et (5 ; 3) ceux qui sont proportionnels.

- **Tâche de résolution et savoirs mobilisés**

Observer les quatre couples donnés et chercher des propriétés communes permettant de reconnaître celui qui correspond au jour où le « *goût est le plus sucré* » ou ceux correspondant à un « *même goût* ».

Établir des critères de choix : éliminer ceux qui ne tiennent compte que d'une des deux grandeurs (le sucre, par exemple) et retenir ceux qui tiennent compte simultanément des deux nombres du couple.

Le plus immédiat de ces critères est la différence entre les masses de cerises et de sucre : lundi 3, mardi 3, mercredi 6 et samedi 2 conduisant au « *même goût* » le lundi et le mardi (3 kg de différence) et à la plus sucrée le samedi (différence la plus petite).

Procéder à une validation de ce critère et penser que la définition de « *goût sucré* » doit se baser sur la quantité de sucre pour une même quantité de fruit ou de confiture ; imaginer alors que le critère pourrait reposer sur la masse du sucre pour 1 kg de fruit ou confiture.

Mobiliser la division ou le concept de quotient (rapport) des deux nombres de chaque couple, les calculer et les comparer ; ce qui oblige à passer à des nombres non entiers, exprimés sous forme décimale ou fractionnaire.

Par exemple en quantité de fruits pour un kg de sucre :
lundi 8 : 5 = 8/5 = 1,6 ; mardi 10 : 7 = 10/7 = 1,42... ≈ 1,42 ; mercredi 16 : 10 = 1,6 et samedi 5 : 3 = 5/3 = 1,666... ≈ 1,67, conduisant au « *même goût* » le lundi et le mercredi (1,6) et à la plus sucrée le samedi (rapport le plus grand).

Se convaincre que ce dernier critère est adéquat et qu'il faut renoncer à l'autre.

- **Procédures, obstacles et erreurs relevés**

Le problème *Les confitures* est révélateur du conflit entre les écarts et les rapports pour déterminer une relation de proportionnalité.

A quelques exceptions près qui ne tiennent compte que de la quantité de sucre, il n'y a que deux procédures relevées :
- la première, très majoritaire aux degrés CM2 et 6^{e}, repose sur l'observation des écarts, du genre : c'est le lundi et le mardi que les confitures ont le même goût parce qu'il y a 3 kg de différence, c'est le jeudi qu'elle est la plus sucrée parce que la différence est la plus petite ou parce qu'il y a presque autant de sucre que de fruit

- la seconde repose sur le calcul des rapports, qui apparaissent dès la 5^{e}, soit sucre / fruit, sucre / confiture ou parfois fruit / sucre ou fruit / confiture en tenant compte que le plus petit rapport donne la confiture la plus sucrée. Les rapports sont donnés sous forme décimale dans la grande majorité des cas, avec une répétition de décimales lorsque le nombre n'est pas décimal.

Exploitations didactiques

D'après nos expérimentations, il semble que les élèves de degré CM2 et 6^{e} (11-12 ans) rencontrent un obstacle qu'ils ne peuvent pas encore franchir à cet âge devant un problème de « recette » culinaire où ce sont les rapports des ingrédients qui déterminent le goût. On pourrait certes les aider en leur « enseignant » le critère à prendre en compte dans ces situations, comme souvent lorsque les programmes abordent la proportionnalité vers 10-11 ans. On justifierait alors la recette par des raisonnements du genre : « Lorsque on double une quantité, il faut aussi doubler l'autre ».

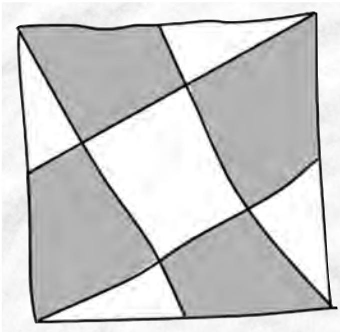
Mais il est évident que cette aide « extérieure » que tous les élèves ont déjà reçue les années précédentes n'est d'aucune efficacité à long terme, comme le montrent toutes les expérimentations.

Pour que le rapport s'impose face à l'écart, il faut des échanges, des confrontations au cours desquelles les élèves doivent conclure à l'inadéquation du modèle additif. Par exemple en faisant varier les deux quantités tout en conservant la différence de 3 kg, on doit pouvoir faire comprendre que pour les grands nombres (par exemple 1003 et 1000) on a « presque la même quantité de cerises que de sucre » contrairement au lundi (8 et 5) et au mardi 10 et 7). Mais la contradiction est plus évidente en allant vers les nombres plus petits : 7 et 4 ; 6 et 3 ; 5 et 2 ; 4 et 1 ; 3 et 0 !! 2 et ???.

Le rôle du maître est ici plus délicat, il « n'explique » pas mais il engage les élèves dans un chemin qui devrait aboutir à une impasse dont il faudra tirer les conséquences.

Problème 2 :

La terrasse de Joseph
Joseph a une terrasse carrée de 10 m de côté. Il désire peindre le sol en blanc et en gris.
Il fait un croquis pour son projet en traçant un carré qui représente la terrasse puis, à l'intérieur, quatre segments de droites qui vont de chacun des quatre sommets au milieu d'un côté opposé. Il colorie en gris quatre parties et laisse les cinq autres en blanc.



Joseph observe son croquis fait à main levée. Il se demande de quelle forme seront ses différentes parties et si l'aire des parties blanches sera égale à celle des parties grises.

Calculez l'aire totale des parties blanches et celle des parties grises, en donnant le détail de votre démarche et de vos calculs.

- **Identification**

Ce problème est tiré d'une épreuve du 22e RMT de 2014 proposé en 6e, 5e et 4e.

Il est classé dans la banque sous le thème de la *géométrie plane* avec tous les problèmes qui font appel aux aires, longueurs et relations métriques. La tâche mathématique est de déterminer l'aire des parties de chaque couleur, après en avoir perçu la forme, dans un carré de 10 m de côté partagé par quatre segments joignant l'un des quatre sommets à l'un des quatre milieux d'un côté opposé.

Mots-clés : géométrie, carré, trapèze, triangle, quadrilatère, aire, homothétie, isométrie, rotation, symétrie centrale, côté, sommet, points milieux, pavage, similitude, hypoténuse, Pythagore, algèbre, équation, croquis.

- **Tâche de résolution et savoirs mobilisés**

- Observer le dessin, constater que la figure se décompose en neuf parties et se rendre compte qu'il faut déterminer la forme de chacune des parties avant d'entrer dans la phase du calcul des aires.

Cette détermination peut se faire visuellement mais doit être confirmée par un dessin précis (avec des instruments de dessin géométrique ou sur un papier quadrillé) ou faire l'objet d'une argumentation, déduite des propriétés du carré et de ses côtés partagés en deux parties égales par les points milieux.

Reconnaître que les neuf parties sont un carré central, quatre trapèzes rectangles égaux et quatre triangles rectangles égaux (*figure 1*). On peut distinguer aussi quatre « grands » triangles (composés d'un trapèze et de deux « petits » triangles, *figure 2*), quatre triangles « moyens » (composés d'un trapèze et d'un « petit » triangle, *figure 3*) puis observer par exemple que les« grands » triangles sont des quarts du grand carré, (mesure des côtés de l'angle droit 5 et 10 cm, aire 25 cm², hypoténuse $\sqrt{125}$ ou $5\sqrt{5}$ cm) ou que tous les triangles de la figure sont semblables (mêmes angles, et rapport 2 entre les mesures des côtés de l'angle droit) …

figure 1

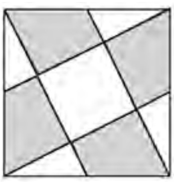


figure 2

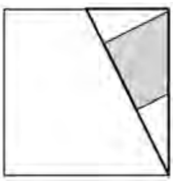


figure 3

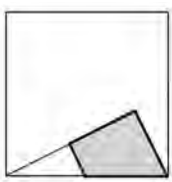
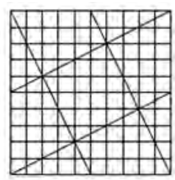


figure 4



Engager finalement le calcul des aires, pour lequel il y a de très nombreuses procédures possibles :

- par mesure des longueurs et calcul des aires sur un dessin précis à l'échelle, par exemple sur un carré de 10 cm de côté ;
  - par « quadrillage » (*figure 4*) (construction précise sur papier quadrillé d'un carré de 10 unités de côté et comptage des carrés ;
  - par « pavage » du carré en petits triangles ;
  - par décomposition et recomposition, …
- algébriquement avec x et $2x$ pour mesures des côtés de l'angle droit des petits triangles dont l'hypoténuse mesure 5 (en m), par Pythagore : $x^2 + 4x^2 = 25$, puis $5x^2 = 25$ et enfin $x^2 = 5$ (en m²), qui est aussi l'aire du petit triangle : $(x \times 2x)/2 = x^2$.

Les savoirs mobilisés, selon les procédures utilisées recouvrent l'ensemble des programmes de géométrie du Collège (polygones et le calcul de leurs aires, isométries, similitudes, relations métriques (Pythagore, Thalès), puissances et racines carrées, éléments d'algèbre.

- **Procédures, obstacles et erreurs relevés**

La réussite a été très moyenne. Sur plus de 1200 classes de 5^e, 4^e, 3^e, il n'y a que 30 % environ de réponses correctes (aire des parties grises : 60 m² et blanches : 40 m²), il faut attendre la seconde pour atteindre 50 % de réussite.

Observations tirées d'une analyse a posteriori d'environ 200 copies :
- La moitié des copies environ montrent une incapacité à entrer dans une résolution « réfléchie » : les aires grises et blanches sont déclarées égales ; la somme des deux aires est loin de correspondre à celle du carré d'origine (100) ; des calculs apparaissent sans lien avec les mesures prises ; des « gribouillages » font état de découpages et reports incohérents ; les formes des neuf figures ne sont pas reconnues... ;

- Les « débuts de raisonnement correct » témoignent d'une « entrée » dans le problème, avec reconnaissance du carré central, calculs d'aires de triangles dont un des côtés mesure 5 cm,... ;

- Parmi les procédures faisant preuve d'une compréhension du problème, une majorité repose sur un dessin précis du partage du carré (en général de 10 cm de côté) et les mesures de ses différents segments. Elles peuvent conduire à des réponses éloignées de la solution « 40 et 60 » à la suite d'erreurs de calcul, ou à des réponses proches de la solution dues aux mesures approximatives (par exemple 38,72 et 58,96 lorsque la mesure du carré central est considérée comme 4,4) sans contrôle de la somme qui devrait être 100 ou encore à une première aire calculée à partir de mesures approximatives et la seconde calculée comme complément à 100.

L'obstacle est, dans ce cas, dû à une croyance que la mesure prise sur la règle est la mesure réelle ou à une élaboration insuffisante du concept d'approximation.

- Les procédures par pavages, découpages, compensations reposent sur l'observation que le carré central équivaut à quatre triangles et qu'un trapèze équivaut à trois triangles, ce qui conduit à répartir le carré d'origine en cinq carrés : deux blancs et trois gris. Ces procédures ne sont cependant pas accompagnées de justifications ou de démonstrations ; les pavages ou découpages sont évidents et reposent sur une appréciation visuelle.

- On relève aussi de fréquents calculs de la longueur d'un des quatre segments par Pythagore, qui conduit à l'approximation « 11,8 », mais on ne voit pas apparaître l'écriture $5\sqrt{5}$ ou $\sqrt{125}$ dans les calculs qui suivent. Il s'agit ici de l'obstacle des écritures de nombres irrationnels.

- ***Exploitations didactiques***

Premières remarques tirées de premières observations des copies : La terrasse de Joseph est un problème « consistant » pour la construction des connaissances géométriques, mais évidemment, au vu des résultats obtenus, « assez difficile » pour des élèves de 13 à 16 ans dans les conditions de passation des épreuves du RMT.

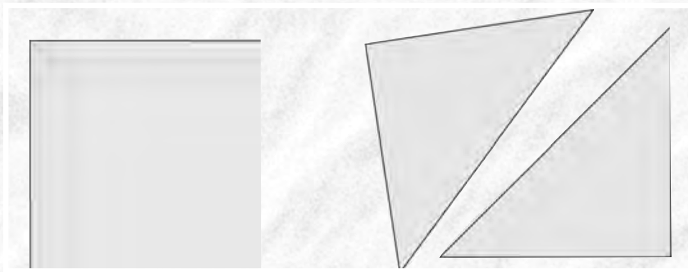
La variété des procédures de résolution observées assure l'intérêt de leur confrontation entre élèves, puis de leur institutionnalisation par le maître.

On peut en particulier profiter de comparer les procédures reposant sur les mesures prises sur un dessin, forcément approximatives même si la construction est très précise, aux procédures par pavage ou décomposition ou encore aux procédures algébriques.

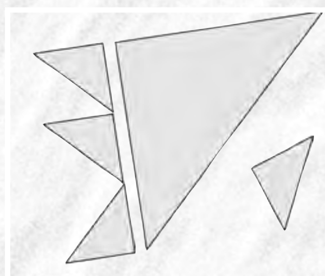
On peut aussi aborder, selon l'âge des élèves, le problème des justifications par raisonnement déductif.

Problème 3

Triangles envolés
Albert avait un carré de carton gris. Il l'a découpé en deux triangles égaux:



Puis Albert a découpé un des deux triangles en petits triangles tous égaux.
Mais le vent a emporté quelques-uns des petits triangles. Il n'en reste plus que quatre :



Sur la figure ci-contre, on voit que l'on peut aligner exactement trois des petits triangles égaux sur un côté du grand triangle.

Dessinez sur le carré d'Albert le grand triangle restant et tous les petits triangles.

Combien de petits triangles se sont-ils envolés ?

- **Identification**

Dans ce problème du 22e RMT (2014) proposé à des classes du CE2 à la 6e, il s'agit de décomposer un triangle rectangle isocèle en triangles égaux qui lui sont semblables, dans le rapport 1/3 et en déterminer le nombre. On le retrouve à partir des mots-clés : triangle, triangle rectangle isocèle, équivalence, décomposition, similitude, rapport.

Il se situe dans le thème général de la géométrie plane de la banque de problèmes, dans plusieurs familles qui traitent des alignements, de l'approche de l'aire et des pavages.

- **Tâche de résolution et savoirs mobilisés**

- Percevoir les caractéristiques des triangles d'après les figures et du texte de l'énoncé : ce sont tous des triangles rectangles isocèles, les longueurs des côtés des grands triangles valent trois fois celles des côtés des petits triangles.

- Se rendre compte que la tâche revient à décomposer le grand triangle en petits, et qu'il faut trouver combien on peut placer de petits triangles dans le grand, afin de déterminer le nombre de ceux qui se sont envolés.

- Il y a de nombreuses manières de procéder. On peut par exemple découper des petits triangles pour recouvrir le grand triangle, par décalque ou par dessin de proche en proche et découvrir qu'il contient 9 petits triangles ; ou bien on peut dessiner une trame triangulaire sur le grand triangle et compter les unités.

Le dessin de proche en proche ou par décalque exige de la précision, le respect des angles droits et du parallélisme d'un triangle à l'autre, la perception des rotations et translations nécessaires. Le dessin d'une trame exige une perception d'ensemble du pavage.

- **Procédures, obstacles et erreurs relevés**

Le problème s'est révélé difficile, voire trop difficile en CE2 où seulement un tiers des classes ont trouvé que 5 triangles se sont envolés. La réussite augmente au CM1 et se stabilise en CM2 et 6^{e} avec un taux de 55% de réponses correctes et explications. (Les résultats portent sur 2500 classes.)

Une analyse plus détaillée de 150 copies permet les observations suivantes :
- Environ 80% des copies font apparaître les petits triangles, sur un demi carré, ou sur le carré entier.

Parfois (environ 10% des copies) il s'agit d'un collage de petits triangles découpés ou du report du contour d'un petit triangle découpé puis déplacé dans des positions successives.

Dans la majorité des cas, on se rend compte que les figures ont été dessinées, à la règle, après les mesures ou reports nécessaires pour assurer l'isométrie des petits triangles. On relève une progression, de la catégorie 3 à la catégorie 6, dans la précision des dessins et le respect des directions (parallélisme et perpendicularité).

- Les figures obtenues par dessin font apparaître deux procédures :
  - la première par « trame triangulaire » (dans 15 % des cas), conduisant au réseau de la figure 1.

- la deuxième et la plus fréquente par « juxtapositions successives » (dans 35 % des copies) amenant à des pavages comme ceux des figures 2 et 3. Dans ce cas on constate parfois un report progressif des imprécisions pouvant entraîner des décomptes erronés.

- Pour accéder à la solution correcte, il faut évidemment observer la correspondance des côtés des petits et du grand triangle : les côtés des angles droits doivent coïncider ou être parallèles entre eux, les hypoténuses doivent aussi coïncider ou être parallèles entre eux.

Si les élèves n'observent pas cette correspondance et placent des hypoténuses de petits triangles sur des côtés de l'angle droit du grand, ils n'arrivent à placer que 8 petits triangles dans le grand.

Cette erreur apparaît dans 14% des copies. Figure 4.

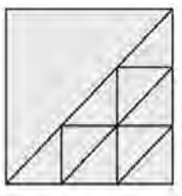


figure 1

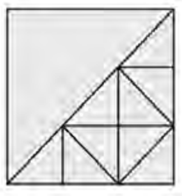


figure 2

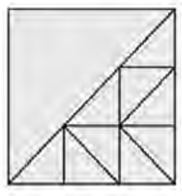


figure 3

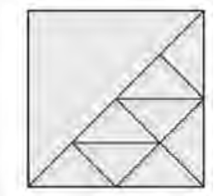


figure 4

L'erreur n'est pas très visible : l'hypoténuse d'un petit triangle est $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ proche du demi-côté du carré qui mesure 1,5.

- Sur les 150 copies examinées, on ne relève aucune trace explicite de réflexion sur l'aire des triangles, ni sur le rapport 3, ou sur la relation multiplicative $3 \times 3 = 9$.

- ***Exploitations didactiques***

Le problème est potentiellement intéressant pour la confrontation entre les figures pavées de 9 triangles et celles de 8 triangles. Le dessin, ou même le découpage, ne permet pas de décider entre ces deux pavages. Un débat est indispensable pour se convaincre qu'on est en présence de triangles de grandeurs différentes occupant le même espace, (avec 8 triangles ou avec 9 triangles, évidemment plus petits) puis pour constater que ce sont trois côtés des angles droits des petits qui correspondent à un côté de l'angle droit du grand. (Selon l'âge des élèves, on peut aussi faire intervenir les aires et les diagonales dans l'observation des figures où apparaissent des petits carrés (9 et 8) dans le grand triangle. Les aires des petits carrés seront alors respectivement 1 et 1,125, les côtés 1 et ≈ 1,12) ; avec 4 petits carrés on peut former un autre carré d'aire 2, de côté ≈ 1,4 ou un carré d'aire 4,5 de côté ≈ 2,1, etc.)

L'exploitation va donc s'étendre aux réflexions sur la précision des mesures.

Une autre connaissance à introduire est le lien entre le rapport des côtés 1 ou 1/3 et le rapport des aires 9 ou 1/9.

D'autres exploitations sont aussi possibles sur les différents pavages et la trame triangulaire réalisée par celui de la figure 1.

Problème 4

Le temps des vendanges
Dans les vignes de M. Brunello, un jour de vendanges, avec le raisin recueilli on a rempli 18 grandes cuves et 13 cuves moyennes. Pour les transporter à la cave, M. Brunello dispose de trois tracteurs :

- le tracteur A peut transporter, à pleine charge, 3 grandes cuves et 2 moyennes ;
- le tracteur B peut transporter, à pleine charge, 2 grandes cuves et 1 moyenne ;
- le tracteur C peut transporter, à pleine charge, 1 grande cuve et 1 moyenne ;

Ce jour-là, M Brunello a utilisé au moins une fois tous ses tracteurs et toujours à pleine charge.

Combien de voyages peut avoir fait M. Brunello avec chacun de ses tracteurs pour transporter toutes les cuves à la cave ?

Décrivez tous les voyages possibles et expliquez comment vous les avez trouvés.

- **Identification**

Il s'agit d'un « ancien » problème de la deuxième épreuve du 14^{e} RMT (2006) destiné aux classes de la 5^{e} à la seconde.

On se situe dans les domaines conceptuels des fonctions, mise en équations, étude d'un système d'équations linéaires, où l'on demande de trouver les différentes manières d'obtenir le couple (18 ; 13) par addition de trois types de couples (3 ; 2), (2 ; 1) et (1 ; 1) dans un contexte de transports de deux types de récipients par trois transporteurs (système linéaire de deux équations à 3 inconnues entières et strictement positives). Mots-clés : fonctions, relations algébriques, relations fonctionnelles, proportionnalité, systèmes d'équations linéaires

- **Tâche de résolution et savoirs mobilisés**

Pour les catégories considérées on peut envisager différents types de procédures. Dans tous les cas l'utilisation de la proportionnalité pour le calcul du nombre de cuves convoyées par un tracteur lors de plusieurs allers et retours est un prérequis. La prise en compte des nombreuses contraintes est également incontournable.

- Une procédure possible : identification d'un problème relevant d'une mise en équation algébrique dont une méthode de résolution peut être anticipée. Identification des inconnues du problème (par exemple a, b et c les nombres respectifs de voyages des tracteurs A, B et C), des contraintes sur ces inconnues (entiers strictement positifs) et des relations qui les lient ($3a + 2b + c = 18$ et $2a + b + c = 13$). Mise en œuvre d'une méthode de résolution adaptée, par exemple obtenir par différence $a + b = 5$ et retenir les solutions en nombres entiers naturels différents de 0 : (1 ; 4), (2 ; 3), (3 ; 2) (4 ; 1).

Chaque couple permet de déterminer la valeur correspondante de c (respectivement 7, 6, 5, 4). On obtient ainsi quatre possibilités.

Remarque : il est possible de réduire la recherche :
- en s'appuyant sur le sens et en prenant en compte que les tracteurs font au moins un voyage. On est amené à faire un travail équivalent à la résolution de $3a' + 2b' + c' = 12$ et $2a' + b' + c' = 9$ ce qui limite le nombre de cas à étudier.

- en travaillant sur l'aspect syntaxique et en déduisant des équations que $a + b$ doit être égal à 5. On peut difficilement envisager que cette déduction survienne sans recours au cadre algébrique.

Autre procédure possible : procéder dans le champ multiplicatif et additif, avec des entiers, de manière organisée (éventuellement avec un tableau) en tenant compte des caractéristiques de chaque tracteur et du nombre de cuves transportées augmentant avec le nombre de voyages.
Commencer par exemple en choisissant le nombre maximum de voyages du tracteur A, s'assurer que 6 voyages ne peuvent convenir, que 5 peuvent permettre de transporter les 18 grandes cuves mais alors pas les 13 moyennes (on aurait transporté 18 grandes cuves et 12 moyennes, ce qui ne suffit pas).

Puis supposer que le tracteur A fait 4 voyages (12 GC ; 8 MC) et il faut alors tester toutes les possibilités pour les tracteurs B et C. On obtient ainsi une première solution : 4 voyages pour A, 1 pour B et 4 pour C.

Et ainsi de suite jusqu'à obtenir les trois autres solutions : 3 voyages pour A, 2 pour B et 5 pour C, puis 2 voyages pour A, 3 pour B, 6 pour C et 1 voyage pour A, 4 pour B et 7 pour C.

Ainsi on peut essayer de distinguer deux types de savoirs mobilisables :
- d'une part ceux liés au cadre des équations linéaires,
- d'autre part ceux liés à l'aspect fonctionnel.
Pour ces derniers on peut distinguer deux aspects :
- la nécessaire mise en œuvre d'un raisonnement relevant de la proportionnalité pour le calcul du nombre de cuves convoyées par un tracteur lors de plusieurs allers et retours.
- l'utilisation en actes d'une ou deux fonctions de plusieurs variables. Le calcul des images se faisant dans le champ additif et multiplicatif sur des entiers.

- **Procédures, obstacles et erreurs relevés**

Parmi les copies où l'échec est total, on peut percevoir que la compréhension de l'énoncé et son appropriation s'avèrent très difficiles. La multiplicité des contraintes à prendre en compte et certaines formes syntaxiques semblent s'ériger en obstacles. On identifie ainsi des classes qui ont séparé le problème en trois : combien de trajets avec le tracteur A pour transporter la totalité des cuves, puis avec le tracteur B puis avec le C. D'autres classes n'ont pas envisagé que les tracteurs étaient toujours à pleine charge, d'autres encore n'ont pas tenu compte du fait que chaque tracteur faisait au moins un trajet. On reconnaît ici à la fois des difficultés de traitement de l'énoncé et aussi une difficulté à gérer un ensemble trop important de contraintes.

Les procédures utilisées par les classes s'étant engagées dans la recherche sont globalement des procédures par essais assez peu souvent organisés et relevant de démarches arithmétiques. Les rares démarches organisées sont peu productives, on ne voit ni tableau bien structuré, ni liste pertinente (sauf en seconde). On observe par ailleurs des procédures figuratives, où les élèves représentent les cuves par des barres de différentes tailles (y compris en classes de 3^{e}). La plupart de ces copies donnent des solutions correctes en organisant des groupements. On reconnaît ainsi des procédures souvent utilisées dans les niveaux inférieurs et à contrario, même en fin de Collège ou au Lycée, n'apparaît aucune procédure algébrique.
Il est à noter que pour les niveaux observés et pour les copies qui permettent l'analyse, la question de la proportionnalité ne pose pas de difficulté.

- ***Exploitations didactiques***

L'utilisation de ce problème en classe peut se faire avec des objectifs variés.

On peut tout d'abord le mettre en œuvre comme un problème de recherche sans objectifs notionnels mais en travaillant de façon principale les compétences métamathématiques . On cherche alors à développer autant des savoir-faire en résolution de problème qu'une attitude et un rapport aux mathématiques favorables à ces résolutions de problèmes.

On peut aussi viser des objectifs notionnels.

Deux semblent possibles :

- La mise en évidence d'un aspect fonctionnel, au sens où le nombre de cuves transportées dépend de trois variables (le nombre de trajet de chacun des tracteurs). On peut alors, lors de la synthèse après une recherche minimale, étudier l'ensemble des valeurs prises par la fonction (les variables sont ici entières et bornées) en organisant convenablement la recherche des images.

- Une introduction (ou réintroduction) de l'outil algébrique pour résoudre des problèmes de ce type. Compte tenu des résultats obtenus ici, l'outil algébrique n'est clairement pas disponible pour les élèves considérés, et il peut alors intervenir, après élaboration de solutions erronées ou partielles ou laborieuses, comme nouvel outil qui permet l'obtention de toutes les solutions plus efficacement.

Dans tous les cas, quel que soit l'objectif, il est nécessaire que les élèves puissent réellement s'engager dans la résolution du problème et envisager ce qui en est une solution.

Pour cela, et puisque le cadre d'une situation de classe avec l'enseignant le permet, il s'avère nécessaire de faire un travail sur l'énoncé et son appropriation. Le vocabulaire et les formulations doivent être explicitées si nécessaire, les ambiguïtés levées, l'ensemble des contraintes mises en évidence et ceci afin que l'ensemble de la communauté de recherche soit d'accord sur le problème à résoudre. Ceci étant réalisé, les productions déjà recueillies montrent que les élèves doivent pouvoir s'engager dans la recherche et produire des raisonnements qui pourront être exposés puis débattus. La diversité des pistes observées permet d'envisager la possibilité de synthèses diverses suivant les objectifs poursuivis.