RALLYE MATHÉMATIQUE APMEP DE POITOU-CHARENTE

PRÉSENTATION :

Le Rallye Mathématiques de Poitou-Charentes est une compétition en classes complètes. Depuis 2004 un thème (recherche documentaire) est proposé avec l'envoi de l'épreuve d'entraînement : questions historiques et mathématiques concernant le thème. Les élèves doivent donc réunir une documentation qui leur servira à répondre aux questions de l'épreuve finale. Voici, depuis 2004, les thèmes choisis : Sophie Germain, Marie Agnesi, Eratosthène, Alicia Boole-Stott, π, le nombre d'or, les numérations, la magie des maths, des outils pour tracer, les codes secrets, les puzzles et, en 2015, le temps.
La classe doit fournir un dossier sur le thème et le bulletin-réponse de la partie « problèmes ». Ceux-ci sont variés pour que chaque élève puisse participer. Toutes les épreuves du rallye se trouvent sur le site de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes :

http://apmep.poitiers.free.fr/spip.php?rubrique8

FICHE TECHNIQUE

- **Historique**

1991 : Création du Rallye pour les 3^{e} et les 2nde.
2007 : Extension aux classes de 6^{e}, 5^{e} et 4^{e}.
2008 : Réduction de la durée de l'épreuve à une heure pour les classes de collège.
2013 : Passation des épreuves pendant la Semaine des Mathématiques.
2014 : Extension aux classes de 2nde Pro et proposition d'épreuves pour les CM.

- **Epreuves :**

- Classes de secondes : 2 heures avec 8 ou 9 problèmes.
- Classes de collèges et 2nde pro : une épreuve par niveau de 1 heure avec 4 ou 5 problèmes.

- **Compétition :**

IREM de Poitiers
IA-IPR, Rectorat

Contact

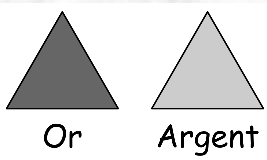
APMEP
IREM de Poitiers, Téléport 2 – BP 30179
Bd Marie et Pierre Curie – 86962 CHASSENEUIL Cedex

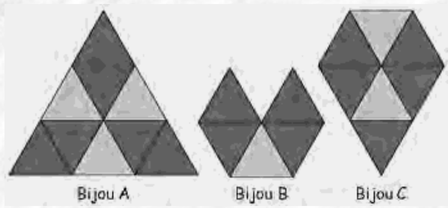
☎ : **05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)**
: **apmep.poitiers@free.fr**

ORFÈVRE EN MATHÉMATIQUES !

Enoncé :

Un orfèvre réalise des bijoux avec des triangles équilatéraux, tous de mêmes dimensions, les uns en or, les autres en argent. Le prix de chaque bijou est obtenu en ajoutant le prix de la partie en or et celui de la partie en argent, le prix de chaque partie étant proportionnel au nombre de triangles utilisés.





Le bijou A coûte 186 € et le bijou B coûte 122 €.

Combien coûte le bijou C ?

Niveau scolaire :
4e

- **Domaine mathématique :**

Numérique

- **Solution :**

À la lecture de ce problème, on pense tout de suite à la solution experte : résolution d'un système de deux équations à deux inconnues. C'est pour cette raison que ce problème a été donné en quatrième où on ne dispose pas de cette méthode. Une autre méthode était en effet possible et s'imposait donc à ce niveau.

Les bijoux A et B comportent en tout 10 triangles en or et 4 triangles en argent. Le bijou C comporte 5 triangles en or et 2 triangles en argent, c'est-à-dire la moitié des bijoux A et B réunis. Le prix du bijou C est donc la demi - somme des prix des bijoux A et B, soit (186 € + 122 €)/2 = 154 €.

92 % des élèves ont réussi ce problème de cette manière et 40 % ont bien justifié leur réponse.

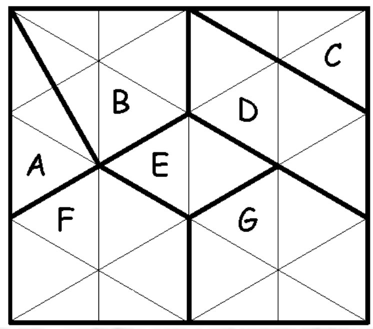
- **Prolongements :**

Toujours sans résoudre des systèmes d'équations, on peut trouver le prix d'un triangle en or (T_o) et celui d'un triangle en argent (T_a) une fois connu le prix du bijou C. En effet, le bijou C comporte une paire « or et argent » de plus que le bijou B. Donc $T_o + T_a = 154 - 122 = 32$ €. Le bijou A est composé de 3 paires « or et argent » et de 3 triangles or. On en déduit donc le prix d'un triangle or puis celui d'un triangle argent.
On observe ici combien le choix des données numériques est important. D'autres choix n'auraient pas permis une telle stratégie et auraient nécessité un système d'équations.

LE PARATONNERRE

Enoncé :

Voici un puzzle qui a la particularité d'être construit sur un réseau triangulaire. Les triangles du réseau sont équilatéraux sauf ceux des bords en haut et en bas.



1°) Glissez dans votre dossier l'hexagone que vous avez réalisé depuis l'épreuve d'entraînement.
2°) Regroupez par leur nom les pièces qui ont la même aire. Quelles sont ces aires si on choisit le triangle du réseau comme unité d'aire ?
3°) Classez, par leur nom, les pièces du plus petit périmètre au plus grand.
4°) Trouvez deux pièces de même aire mais de périmètres différents.
5°) Existe-t-il deux pièces dont l'une a un périmètre plus petit mais une aire plus grande que l'autre ?

- **Niveau scolaire :**

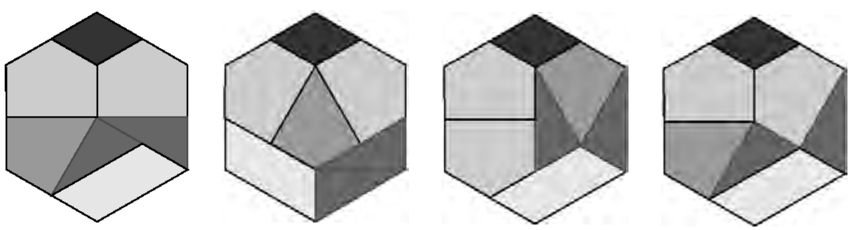
Thème sur les puzzles 6e-5e

- **Domaine mathématique :**

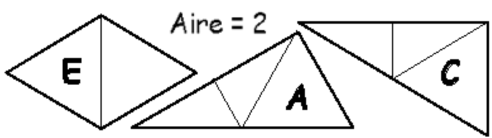
Géométrie – Aires et périmètres

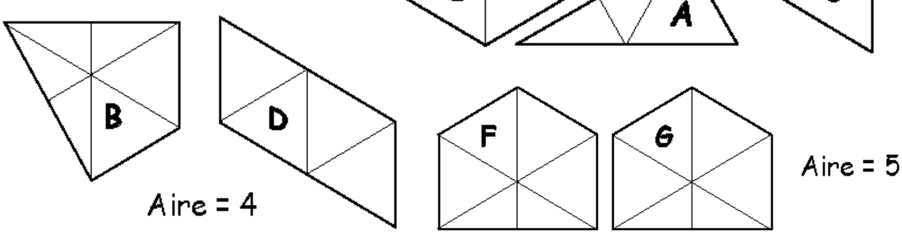
- **Solution :**

1°) Voici des solutions différentes de l'hexagone trouvées dans les dossiers.



2°) Pièces qui ont la même aire :





3°) Si on nomme c la longueur du côté du triangle équilatéral et h la hauteur du triangle équilatéral, les pièces A et C ont pour périmètre 3c + 2h et h < c. On a donc dans l'ordre des périmètres : E, A et C, B, F et G, D.
4°) Deux pièces de même aire mais de périmètres différents : E et A, ou E et C, ou B et D.
5°) Deux pièces dont l'une a un périmètre plus petit mais une aire plus grande que l'autre : F et D ou G et D.
En effet, P(F) = 4c + 2h, P(D) = 6c, mais A(F) = 5 et A(D) = 4.

> ***Commentaires***
> *Comme pour le Curvica (Brochure JEUX 5 - n° 119 de l'APMEP) ce puzzle permet de faire fonctionner les concepts d'aire et de périmètre sans formules et d'aller à l'encontre du théorème « élève » : plus l'aire est grande, plus le périmètre est grand. C'est pourquoi il a été proposé aux niveaux des 6ème et 5ème.*
>
> *Les pourcentages de réussites moyens (6^e et 5^e) sont décroissants dans l'ordre des questions : 75 %, 50 %, 40 % pour les trois premières questions. La 5^e question n'a recueilli que 17 % de réussite, ce qui n'est pas étonnant ; il faut donc bien poursuivre le travail dans ce sens.*

DEUX PAR DEUX

Enoncé :

Anaïs, Baptiste, Camille, David et Émilien ont vendu en tout 50 carnets de tombola ; Anaïs et Baptiste en ont vendu 18 à eux deux, Baptiste et Camille 15, Camille et David 20, David et Émilien 25. Combien chacun en a-t-il vendu ?

- **Niveau scolaire :**

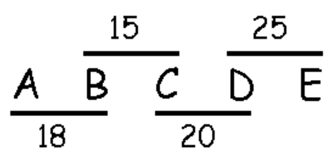
4^e

- **Domaine mathématique :**

Numérique

- **Solution :**

En faisant un schéma du style de celui ci-contre, la solution devient évidente :
A + B + C + D = 38 ; donc E = 12 puisqu'ils ont 50 carnets à eux cinq ;
ou B + C + D + E = 40 ; donc A = 10. Et on trouve ensuite facilement les autres quantités.



Commentaires

Changement de cadre ! C'est un bien grand (gros ?) mot ! Et pourtant transcrire, comme ici, une situation par un schéma, un graphique aide énormément à la résolution d'un problème. C'est ce que tente de démontrer ce problème.

74 % des classes l'ont réussi. Mais la plupart a trouvé par essais corrections. Nous espérons donc que la solution présentée dans le bilan de l'épreuve leur aura été utile.

Ce problème est une copie presque conforme d'un problème du Rallye Mathématique Transalpin en Suisse Romande. Il semble, a priori, étonnant de donner un tel problème à ce niveau car on pense tout de suite à un système d'équations ! Mais les élèves de 10 à 12 ans n'ont pas de telles idées et font preuve d'initiatives et d'inventivité.

DES BOÎTES

Enoncé :

Les calculatrices TRUCHTOCH sont envoyées aux dépositaires pour la vente dans des boîtes de différentes tailles. Chaque calculatrice est dans une boîte de type B1. Quatre boîtes B1 sont envoyées dans une boîte de type B2. Quatre boîtes B2 sont envoyées dans une boîte de type B3...

1°) Pour l'envoi de 23 machines, il faut 29 boîtes de différentes tailles. Expliquez pourquoi.

2°) Combien faut-il de boîtes pour l'envoi de 64 calculatrices ?

3°) Léa Broutille, toujours à l'affût d'un exercice pour le rallye a calculé qu'un autre envoi a nécessité 32 boîtes. Combien de calculatrices étaient dans ces boîtes ?

4°) Elle pense qu'aucun envoi ne peut exister avec 35 boîtes. Est-ce vrai ou faux ?

- **Niveau scolaire :**

2^{nde}

- **Domaine mathématique :**

Numérique

1°) Pour 23 machines, il faut 23 B1.
$23 = 5 \times 4 + 3$; il faut donc 5 B2
$5 = 1 \times 4 + 1$; il faut 1 B3
Il faut donc en tout 29 boîtes.

Autre méthode :
une boîte ***B3*** contient 16 calculatrices et se compose de **21 boîtes** :
une B3, quatre B2 et seize B1.
Une boîte **B2** contient 4 calculatrices et se compose de **5 boîtes** :
une B2 et quatre B1.
En faisant le lien avec la base quatre, on a : $23 = 1 \times 42 + 1 \times 4 + 3$; il faut donc une boîte B3, une B2 et trois B1, soit en tout $21 + 5 + 3 = 29$.

2°) Pour l'envoi de 64 calculatrices, il faut une boîte B4, contenant quatre boîtes B3, soit $4 \times 21 + 1 =$ **85 boîtes** (ou encore 64 boîtes B1 contenus dans 16 boîtes B2, elles-mêmes contenues dans 4 boîtes B3, le tout contenu dans une boîte B4).

3°) Par un raisonnement analogue, pour avoir 32 boîtes ($32 = 21 + 2 \times 5 + 1$), il faut une boîte B3, deux boîtes B2 et une boîte B1, soit $16 + 2 \times 4 + 1$.
L'envoi avec 32 boîtes contenait donc **25 calculatrices**.

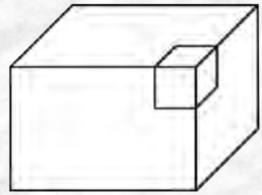
4°) S'il existe un envoi avec 35 boîtes, cela ne peut être que pour un nombre de boîtes supérieur à 25, d'après la question précédente.
Pour 26 calculatrices, il faut 26 boîtes B1, 6 boîtes B2, 1 boîte B3, soit 33 boîtes.
Pour 27 calculatrices, il faut 27 boîtes B1, 6 boîtes B2, 1 boîte B3, soit 34 boîtes.
Pour 28 calculatrices, il faut 28 boîtes B1, 7 boîtes B2, 1 boîte B3, soit 36 boîtes.
Il n'y a donc pas d'envoi avec 35 boîtes.

> ***Commentaires***
> *Si ce problème a été choisi pour l'épreuve de seconde, il peut être donné dès le collège car sa résolution ne fait pas appel à des connaissances mathématiques spécifiques. Elle nécessite seulement une bonne compréhension des données et de la méthode. C'est pour cet aspect que ce problème a été proposé. Cependant, au niveau de l'exploitation en classe, on peut faire le lien avec la numération : ici la base quatre.*
> *Ce problème n'a pas eu la réussite attendue. Seulement 53 % des classes ont répondu correctement à au moins une question.*
> *Beaucoup ont oublié la boîte B4 à la 2^e question.*

CINQ COULEURS POUR UNE BOÎTE

Enoncé :

Le prof. Ila Ransor a fabriqué un parallélépipède rectangle représenté par la figure ci-contre. Les trois faces non vues sont jaunes.
La face avant est bleue sauf un carré vert de 4 cm².
La face latérale est blanche sauf un carré vert de 4 cm².
La face supérieure est rouge sauf un carré vert de 4 cm².
La partie bleue a une aire de 62 cm², la partie blanche une aire de 73 cm² et la partie rouge une aire de 38 cm².



1°) Quelle est l'aire totale des trois faces jaunes ?

2°) Quel est le volume du parallélépipède ?

Un dessin en perspective cavalière et en couleur, avec la face avant en vraie grandeur sera le bienvenu.

- **Niveau scolaire :**

3e

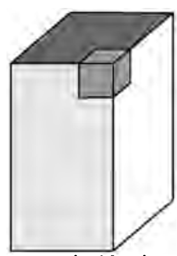
- **Domaine mathématique :**

Mesure – Calcul algébrique

- **Solution :**

1°) L'aire des trois faces visibles est de 62 cm² + 73 cm² + 38 cm² + 3 × 4 cm² = **185 cm²**. C'est aussi l'aire totale des trois faces jaunes.

2°) Les aires des trois faces sont 66 cm², 77 cm² et 42 cm². Ces aires ont deux à deux un diviseur commun : la longueur de l'arête commune à deux faces. En considérant 66 (face avant) et 77 (face latérale), et en éliminant 1 (trop petit), on prend 11 pour la hauteur, même si on ne sait pas a priori que ce sont des nombres entiers. Ce qui donne immédiatement 6 pour la largeur et 7 pour la longueur. D'où le volume 6 × 7 × 11 = **462 cm³**.



Méthode algébrique : si on note L, l et h les dimensions du parallélépipède son volume est donné par L x l x h qui peut aussi s'écrire $(Ll \times Lh \times hL)^{1/2}$, c'est-à-dire la racine carrée du produit des aires des trois faces visibles. Cela donne $(66^2 \times 77^2 \times 42^2)^{1/2} = 6 \times 11 \times 7$ et donc le volume est de **462 cm³**.

Commentaires

Si le calcul d'aire a été bien réussi, le calcul du volume l'a été moins, ce qui donne une réussite globale de 48 %. Toutes les classes qui ont trouvé correctement le volume ont cherché des solutions entières pour les arêtes à partir des aires des trois faces. Très peu de dessins en perspective ; il était seulement suggéré, mais il apportait quelques point de bonus !

Homage au dessinateur Philippe Druillet
J FC
www.lactamme.polytechnique.fr