RALLYE DYNAMIQUE ET VIRTUEL DE L'IREM DE BASSE-NORMANDIE

PRÉSENTATION :

Le rallye mathématique de l'Irem de Basse-Normandie consiste en une épreuve unique au cours de laquelle des classes des niveaux 3^{e} et 2^{nde} tentent de résoudre le plus grand nombre possible de problèmes qu'il découvrent au fur et à mesure de l'épreuve en franchissant une à une un certain nombre d'étapes (il y en a 6 dans la formule actuelle).

Le principe de ce rallye est le suivant : les classes ont accès aux énoncés des problèmes grâce au programme nommé "rdv..." (rdv15 pour l'année 2015 par exemple) que le professeur responsable de la classe aura pris soin de copier sur les postes utilisés par les élèves le jour du rallye. L'accès à internet n'est pas nécessaire pour les élèves. Seul un poste utilisé par le professeur responsable doit être connecté au site du rallye pour la transmission des réponses obtenues par la classe en cours de jeu.

Le jour du rallye, à 14 h, est transmis à tous les participants un mot de passe qui permet d'accéder à la $1^{\text{ère}}$ étape. Les élèves ont alors accès aux énoncés de plusieurs problèmes. L'un d'eux est appelé « énigme », les autres sont appelés « bonus ». C'est la réponse à l'énigme qui permet d'obtenir le code d'accès à l'étape suivante. Il est donc important de la résoudre en priorité. La recherche des bonus quant à elle, peut être effectuée pendant toute la durée du jeu.

Quand une énigme est résolue, le programme "rdv" permet aux élèves d'accéder à l'étape suivante et la réponse obtenue doit alors être transmise au serveur du rallye par Internet, grâce au poste connecté. Les réponses obtenues pour les bonus sont également transmises en cours de jeu ainsi que l'instant où la classe accède à une nouvelle étape.

Pour certaines énigmes, la classe a la possibilité d'accéder à une aide. En cas de blocage, elle peut aussi avoir recours à un joker lui permettant de passer à l'étape suivante sans résoudre l'énigme. Mais chaque classe n'a droit qu'à deux jokers au plus. Tout cela est assorti d'un ensemble de pénalités suivant que la classe utilise une aide ou un joker.

Pour une classe donnée, le rallye prend fin lorsqu'elle est arrivée au terme des 6 énigmes, ou au terme des 90 minutes imparties pour le jeu.

Le classement est réalisé à partir d'un nombre de points calculés selon un barème précis liés à la nature des problèmes résolus. En cas d'égalité de points, c'est le décompte du temps enregistré pour chaque classe qui permet de départager, en tenant compte des pénalités.

L'originalité de ce rallye réside essentiellement dans sa conception par étapes à franchir, comme dans un rallye au sens habituel du terme. Il amène à une réflexion en amont dans la classe sur l'organisation à mettre en place pour que le travail collectif des élèves soit plus efficace. La dimension « travail collaboratif et collectif » , en plus de la recherche des problèmes proprement dite, est en effet essentielle pour la réussite d'une classe dans cette épreuve.

FICHE TECHNIQUE

- **Historique :**

Avril 2004 : Mise en place de la $1^{\text{ère}}$ édition du Rdv. Cette année là , en plus de l'épreuve elle-même, a été mise en place une finale entre la meilleure classe de 3^{e} et la meilleure classe de 2^{nde}. Cette finale a eu lieu en mai dans l'enceinte du château de Caen et fut principalement basée sur la mesure de grandeurs inaccessibles utilisant notamment des copies d'instruments de mesure anciens tels le bâton de Jacob.

Seule une autre édition, celle de 2006, a également été assortie d'une finale, au mémorial de Caen, autour de problèmes de cryptographie (en lien avec la machine énigma dont le mémorial possède un exemplaire).

Entre 2004 et 2013, le programme Rdv utilisé par les élèves pour avoir connaissance des problèmes, a été conçu sous la forme de pages pdf protégées par mot de passe.

A partir de l'édition 2014, le Rdv est un fichier exécutable au format « flash », format conçu au départ pour faire de l'interactivité mais aussi et surtout de l'animation. C'est cette dimension que nous avons voulu intégrer. Ainsi la compréhension de certaines des énigmes est parfois basée non seulement sur un texte mais aussi sur l'observation d'une image animée. Ce sont des énigmes d'une autre nature qui peuvent ainsi être proposées.

- **Niveaux concernés :**

3^{e} et 2^{nde} .
Jour de l'épreuve : en général un vendredi au mois d'avril.
Durée de l'épreuve : 1h30

- **Partenaires :**

CASIO ; TANGENTE ; APMEP

- **Contact :**

rdvmath-caen@laposte.net
Site du rallye : **http://irem.crdp.ac-caen.fr/rallye/debut.php**

LA MOSAIQUE DE CARRES (RDV 2014)

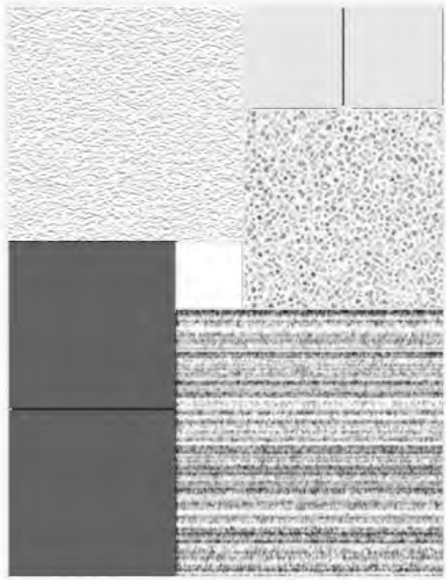
Enoncé de l'énigme :

Le rectangle ci-contre est une mosaïque de 8 carrés.

Le côté du plus petit carré (en rose) mesure 142 mm.

Quelles sont les dimensions du grand rectangle ainsi formé ?

La réponse attendue est l'aire de ce rectangle en mm².



Légende du dessin

- **Solution :**

Prenons par exemple comme inconnue la longueur en mm d'un des deux carrés identiques en haut à droite, et notons-la x .

On en déduit, étape par étape, une expression de la longueur des côtés des autres carrés en fonction de x.

Les deux côtés, supérieur et inférieur, ayant même longueur, on obtient l'équation :

$3x - 142 + 2x = x + 142 + 2x + 142$

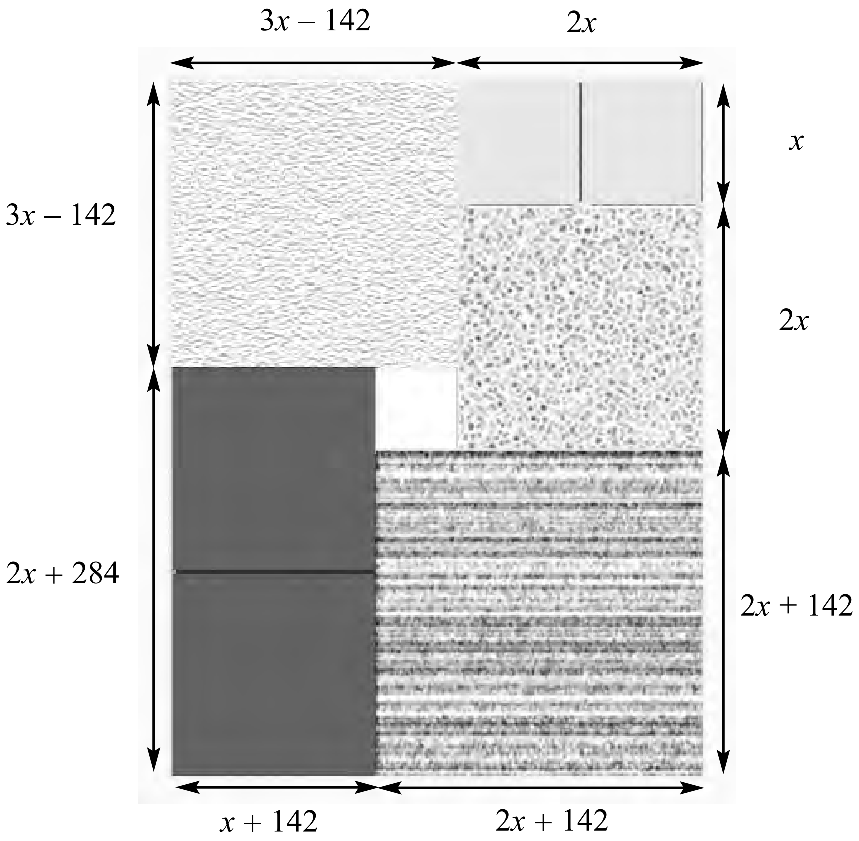
Soit en simplifiant : $x = 213$

D’où les dimensions suivantes du rectangle :

Largeur : $3x + 284 =$ **923 mm**

Longueur : $5x + 142 =$ **1 207 mm**

Aire : **1 114 061 mm²**



- **Pourquoi cette énigme ?**

- L’énoncé est court, avec une figure simple, formée uniquement de carrés et une seule donnée numérique.

- Un des atouts de cette énigme est de faire prendre conscience aux élèves que la seule donnée du côté du carré blanc suffit à définir entièrement les dimensions de la mosaïque. (Etonnant non ?)

- Nous espérions une mise en équation du problème. Le choix de l’inconnue est laissé à l’initiative de l’élève ce qui nous plaît également.

- **Aide proposée lors du rallye :**

Dans le rallye dynamique et virtuel, les élèves ont la possibilité de prendre une aide. (Ce qui enlève 2 points à leur score (sur les 5 points prévus initialement) mais peut leur permettre d'avancer dans la résolution.) Sur cette énigme nous leur avons proposé l'aide suivante : « On note x la longueur du côté d'un carré jaune. Exprimez la largeur du grand rectangle de 2 façons différentes en fonction de x. »

Nous avons beaucoup débattu sur cette aide. Comment aider les élèves sur cette énigme sans imposer une méthode ? N'est-il pas dommage de proposer le choix de l'inconnue au risque de couper toute prise d'initiative ? D'un autre côté, si les élèves demandent une aide, c'est qu'il y a un blocage. L'aide doit donc réellement leur être utile. Il n'est pas évident de trouver le juste équilibre entre ces deux impératifs. D'autant qu'il s'agit d'une aide à distance… contrairement à ce qui se passe en classe où l'élève pose directement la question au professeur.

- **Réinvestissement en classe :**

Cette énigme a été proposée en différenciation dans 2 classes de 3e lors d'un chapitre sur les équations et inéquations. Elle a été donnée en exercice supplémentaire pour les élèves les plus performants qui se sont attelés à la tâche avec plaisir. (4 élèves dans une classe et 2 élèves dans l'autre.)
Une fois l'idée d'utiliser comme inconnue l'un des côtés des carrés, les élèves s'amusent beaucoup à exprimer les différents côtés des autres carrés en fonction de l'inconnue choisie. Il y a un plaisir à trouver les différentes expressions de proche en proche.
De même que plusieurs élèves ont pu constater avec satisfaction qu'ils avaient la même solution finale en ayant choisi des inconnues différentes et en ayant obtenu des équations différentes.
En revanche, j'ai constaté que certains élèves expriment la longueur du rectangle de 2 façons différentes en fonction de x… mais ne pensent pas à transformer cette observation en équation et donc ne parviennent pas à conclure.
Une (bonne) élève a même exprimé l'aire en fonction de x en espérant que les « x » allaient « s'annuler » m'a-t-elle dit, lors du calcul de l'aire.

- **Prolongement avec un logiciel de géométrie dynamique :**

Avec Géogébra, on peut facilement montrer aux élèves que cette figure ne fonctionne que pour une seule valeur possible de longueur et de largeur du rectangle. (Sinon l'assemblage des 8 carrés « ne se ferme pas » pour reprendre l'expression des élèves.) La construction n'est pas très compliquée et plutôt amusante.

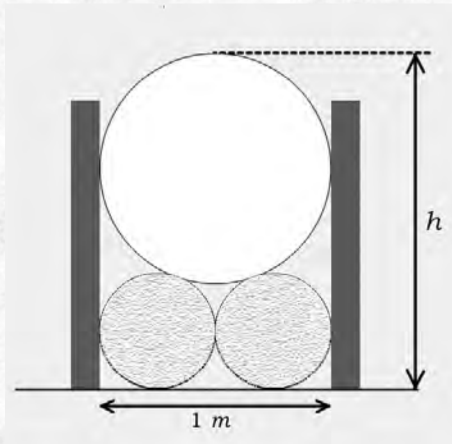
L'OBSTACLE (RDV 2014)

Enoncé de l'énigme :

Voici un obstacle pour l'épreuve de saut des jeux équestres mondiaux à Caen.

Sachant que l'écart entre les poteaux est d'un mètre,

quelle est la hauteur de l'obstacle ?



- **Solution :**

L'obstacle mesure 1457 mm

- **Pourquoi cette énigme ?**

Dans le rallye que nous réalisons, comme nous nous adressons à des élèves de 2^{nde} et de 3^{e}, nous essayons de proposer chaque année des énigmes qui utilisent des propriétés et théorèmes de géométrie classique. (Pythagore, Thalès, propriétés des triangles et des cercles…).
Cette énigme présente des critères intéressants pour le rallye :

- Le sujet est court avec peu de données, un peu à la manière d'un sangaku. (Ici une seule véritablement : la largeur entre les poteaux.)

- Le lien avec une situation réelle et la simplicité apparente de la figure. (Apparente car les élèves qui ont constaté que ce n'était pas si simple de faire une figure précise à l'échelle…)

- L'outil mathématique le plus simple pour résoudre cette énigme (ici le Théorème de Pythagore) n'est pas induit pas l'énoncé. (Pas de triangle rectangle.)

- Les élèves vont devoir prendre des initiatives. (Faire apparaître les centres des cercles, un triangle isocèle, une hauteur…)

- Pas de grosse difficulté de calcul et donc un temps raisonnable pour la résolution, ce qui est important dans un rallye comme le nôtre d'une durée de 1h30.

- **Quel réinvestissement possible en classe ?**

Cette énigme est typiquement une tâche complexe de niveau 3ᵉ /4ᵉ . On peut la donner en classe ou en exercice de recherche à la maison. Il est intéressant de demander aux élèves de laisser toutes les traces de leurs recherches afin de comprendre leur raisonnement. (Ce qu'on ne demande pas pour ce rallye où seule la réponse est attendue, sans justification.)

Il est facile de proposer des coups de pouces simples pour aider à la résolution en fonction du niveau des élèves. Exemples d'aides possibles :

Aide n°1 : trace la figure à l'échelle. Fais apparaître les centres.

Aide n°2 : que dire du triangle formé par les 3 centres ? Peut-on calculer sa hauteur ?

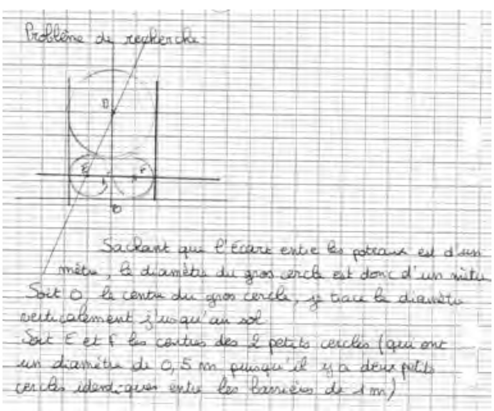
Quelques observations sur le travail d'élèves de deux classes de 3ᵉ :

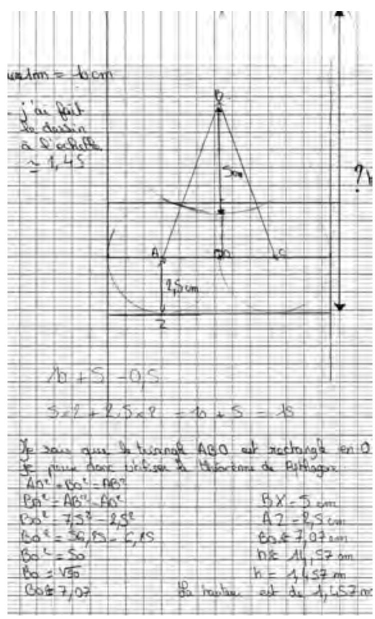
- Un nombre important d'élèves a considéré que l'obstacle mesurait 1,50 m de haut exactement par manque de rigueur.

- Certains ont écrit que la hauteur serait légèrement inférieure à 1,50 m sans pouvoir être plus précis.

- Une minorité a fait un dessin à l'échelle pour s'approcher de la réponse.

- Quelques élèves ont réussi la tâche sans aide. En voici un exemple :



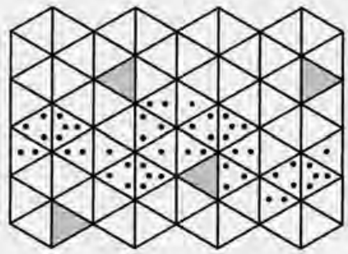


LE DE TETRAEDRIQUE (RDV 2014)

Enoncé de l'énigme :

Sur le quadrillage ci-contre, on a fait rouler sans glisser un dé à 4 faces identiques ayant la forme d'un triangle équilatéral.
Les faces du dé ont laissé leur empreinte sur le papier. Certaines empreintes sont encore visibles, les autres ont été effacées.

Retrouvez le nombre de points imprimés sur chacun des 4 triangles gris.



La réponse demandée est le produit de ces quatre nombres.

- **Solution :**

Le produit des quatre nombres est : $(4\times3\times4\times4) = 192$

- **Méthodes de recherche :**

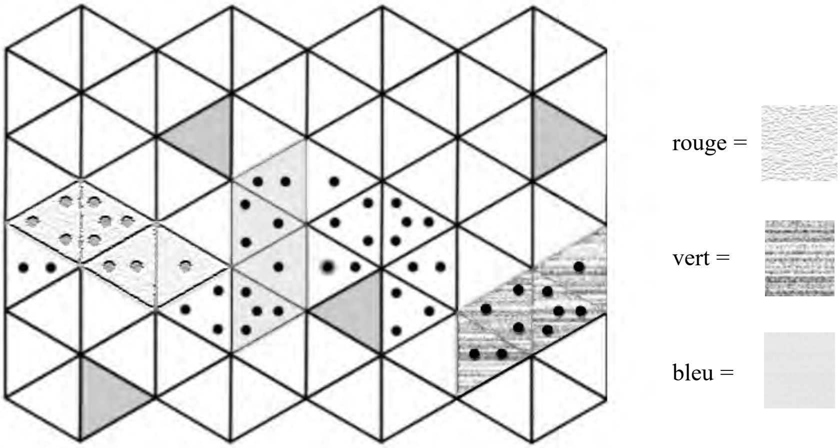
Cette énigme est ce que nous appelons un bonus ; c'est-à-dire que la résolution n'est pas nécessaire pour poursuivre le rallye. Les bonus sont classés en trois catégories de difficulté ; celui-ci fait partie des plus simples.

C'est une énigme qui peut faire appel à de la géométrie dans l'espace (construction d'un tétraèdre régulier), ou simplement de l'observation de transformations du plan directement sur le quadrillage.

Construction d'un dé :
Une première idée peut être de construire le dé de l'énigme afin de la faire « rouler » sur le quadrillage. Les élèves qui veulent le construire peuvent chercher un patron possible : quatre faces, chacune étant un triangle équilatéral ayant un côté commun avec au moins un des trois autres triangles.
Alors des questions se posent :
Comment placer les points sur les faces ?
La façon de les placer peut-elle engendrer des dés différents ?
En faisant des essais on comprend qu'il y a deux possibilités. Laquelle est la bonne ?

On peut aussi avoir l'idée de découper le patron directement sur le quadrillage. On s'aperçoit qu'on ne peut pas choisir quatre triangles adjacents quelconques (par exemple quatre triangles adjacents d'un même hexagone).

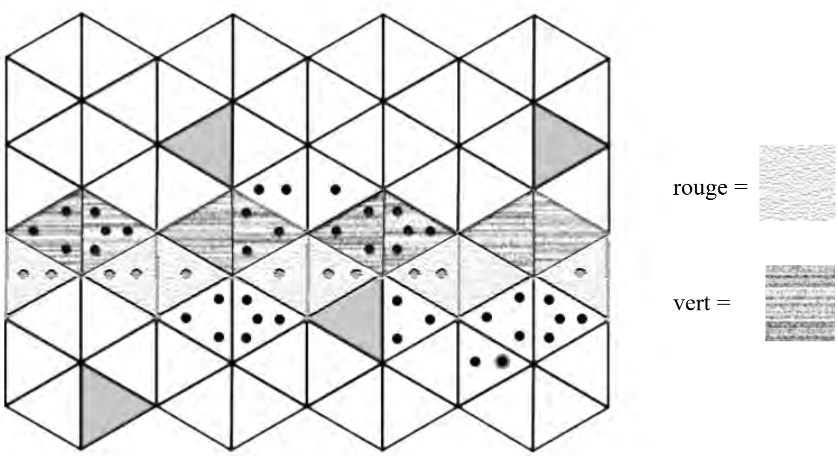
Il suffit de choisir quatre triangles adjacents portant des nombres différents.



Ce peut être quatre triangles formant un triangle équilatéral dont les dimensions sont doubles.
Ou quatre triangles formant un parallélogramme dont deux côtés opposés ont des dimensions doubles des deux autres.
Exemple en rouge, en vert ou en bleu.

On observe aussi que l'on peut opérer une translation de ces « bandes » (c'est-à-dire répéter la suite des quatre nombres mis en évidence : par exemple en rouge 3 ; 4 ; 2 ; 1)
Ceci permet de compléter le quadrillage et donc de résoudre l'énigme.
Observation de tranformations du plan sur le quadrillage :

On peut observer des « bandes » constituées alternativement des nombres 1 et 2 (en rouge) ; mais aussi des nombres 3 et 4 (en vert).



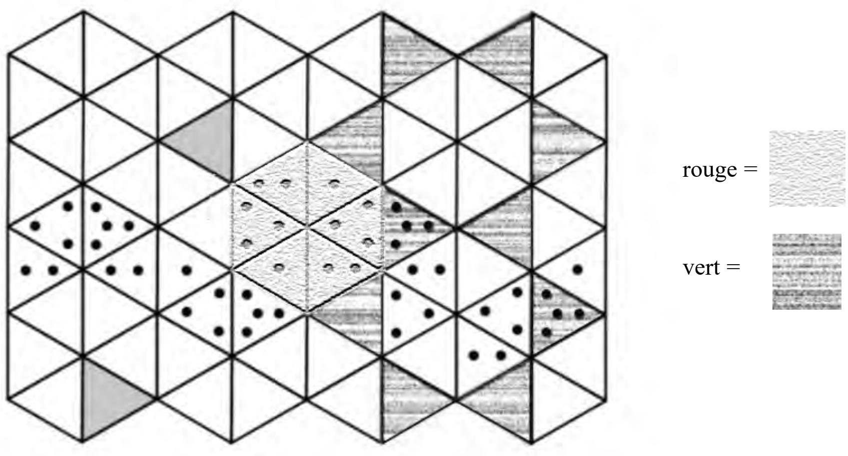
Comment sont construites ces « bandes » :
Une fois le motif de départ choisi (deux triangles adjacents de même couleur), on le répète par symétrie centrale ou axiale.

Ce qui permet de compléter le quadrillage et de résoudre l'énigme.

On peut également observer que dans chaque hexagone régulier constitué de 6 triangles équilatéraux, les triangles qui sont opposés par la pointe portent le même numéro (ce qui met en place une symétrie centrale ; exemple en rouge).

On peut donc colorier (en vert par exemple) les trois triangles opposés par le sommet à un triangle portant le numéro 4.

De proche en proche, on peut atteindre les faces recherchées.



Il est artistique de constater que l'on peut compléter entièrement ce quadrillage par un assemblage de quatre couleurs dessinant chacune des « étoiles » entrelacées.