RALLYE MATHÉMATIQUE DE HAUTE-NORMANDIE

PRÉSENTATION :

- **Historique :**

Le rallye Mathématique de Haute-Normandie a été créé en 2001 et a eu lieu tous les ans depuis. Il en est donc à sa 15^{e} édition ! Il a été en quelque sorte « importé » de l'IREM de Toulouse à celui de Rouen grâce aux rencontres Inter-IREM. A l'origine, il ne concernait que les classes de 3^{e} et de 2^{nde}. Il a constamment évolué et s'adresse maintenant aussi aux classes de CM2 et de 6ème depuis 2007 et à celles de Terminales (S et ES) et de Bac+1 depuis 2013. Mais les bases en sont restées les mêmes et surtout sa caractéristique essentielle : il s'agit d'une compétition inter-classes.

- **Compétition :**

Cette année, le nombre de participants est de **16541** venant de 624 classes différentes et qui se répartissent comme suit :

- CM2 : 98 classes – 2234 élèves
- 6ème : 238 classes – 6058 élèves
- 3ème : 160 classes – 4270 élèves
- 2nde : 100 classes – 3139 élèves
- Terminale : 22 classes – 618 élèves
- Bac + 1 : 6 classes – 222 élèves

- **Niveaux d'études :**

CM2 – 6^{e}– 3^{e} – 2^{nde} – 2^{nde} technologiques – Terminales – Bac + 1

- **Type d'épreuves proposées :**

Il s'agit d'épreuves en classes (classes entières). Les élèves s'organisent par petits groupes, comme ils le souhaitent, selon une stratégie généralement établie à l'avance.

- **Fréquence :**

Le rallye se décompose chaque année en 2 épreuves : l'une en classe, qualificative pour la seconde épreuve : elle se déroule le premier jour de la semaine des Maths et la seconde, la finale, ne s'adresse qu'aux 3 classes qualifiées par niveau ; elle se déroule à l'Université un vendredi du mois de mai. Au cours de ces 2 épreuves, les élèves travaillent par classe entière et doivent s'organiser, trouver une stratégie qui leur permettra de remettre, au terme du temps imparti, un seul bulletin-réponse pour l'ensemble de la classe. Les exercices variés et plutôt ludiques font appel à un large éventail de connaissances mathématiques, ainsi qu'au bon sens et à la logique. A de très rares exceptions près, aucune justification de réponse n'est demandée, mais les élèves doivent souvent justifier la solution qu'ils proposent pour l'imposer au reste de la classe. Le principe du rallye est que tous les élèves d'une même classe réfléchissent ensemble sur une série de problèmes. Un des principaux objectifs de cette manifestation est de favoriser le travail en équipe et l'intelligence active.

- **Durée**

Une heure pour les épreuves en classes qualificatives, non limitée pour la finale. Mais le temps de réponse est chronométré le jour de la finale ; cela fait partie de la stratégie qu'ils doivent mettre en place : répondre vite mais en prenant des risques ou réfléchir à toutes les possibilités, envisager tous les cas,... en prenant le risque d'être éliminé au temps !

- **Les défis**

Les problèmes sont les mêmes pour deux niveaux consécutifs :
CM2/6^{e} – 3^{e} /2nde – Terminales/Bac + 1

Nous prenons beaucoup de temps pour créer les épreuves. Nous nous efforçons qu'une grande majorité des défis que nous proposons soient des sujets originaux. L'équipe n'a cessé de s'agrandir au fur et à mesure de l'extension du rallye à de nouveaux niveaux d'études. Le groupe rallye comprend désormais 7 membres :

– 2 enseignants de l'école élémentaire,
– 1 enseignant du collège,
– 2 enseignants du lycée,
– 2 enseignants du supérieur.

- **Les spécificités de chaque épreuve**

Bien que très proches dans l'esprit et toujours fidèles à nos objectifs initiaux (compétitions entre classes entières qui était le point de départ du rallye pour les classes de 3^{e} et de 2nde), les 2 nouvelles épreuves ont amené avec elles quelques nouveautés :

– L'épreuve de CM2/6^{e} est basée tous les ans sur un thème dans lequel on trouve l'origine de chaque défi proposé : il y a eu ces dernières années les Jeux Olympiques, la gastronomie, les voyages,...

– l'épreuve de Terminale/Bac + 1 est celle où on retrouve la plus grande disparité de niveaux entre les élèves participants ; par exemple entre les élèves de Terminales ES et ceux de Maths Sup MPSI.

Comme nous tenions à proposer malgré cette difficulté une épreuve commune à tous ces niveaux, nous avons instauré un choix des défis de la part des élèves : le sujet comporte 13 ou 14 défis, mais les élèves ne doivent répondre qu'à 7 d'entre eux (7 exactement !) ; ils doivent donc faire le choix des défis qu'ils vont tenter de relever. Pour les guider dans leur choix, ils n'ont qu'une information : les 14 défis sont classés du plus simple au plus difficile et, plus ils sont difficiles, plus ils rapporteront de points, bien sûr. Les classes doivent donc doser le risque qu'ils ont envie de prendre en répartissant les 7 défis qu'ils résolvent entre les premiers défis faciles mais qui rapportent peu et ceux en bas de la feuille qui rapportent gros mais où le risque est d'avoir tout simplement .... zéro !

On s'aperçoit que les élèves sont des fins stratèges et le choix des exercices traités prend beaucoup de place dans la séance....

- **La finale**

Elle se déroule à l'université en mai. Elle entre dans le cadre d'une journée de festivités scientifiques et ludiques où se succèdent épreuves du rallye, visites de laboratoires de recherche de l'université, ateliers de découvertes de musiques et de jeux mathématiques présentés par l'APMEP. La journée se termine par une remise des récompenses autour d'un buffet en présence de nombreux enseignants ayant inscrit leur classe, des inspecteurs d'académie et de nos partenaires.

- **Liste des principaux partenaires :**

CASIO – Crédit Mutuel (de Seine-Maritime) Enseignants – VILLETARD – la CREA – Ville de Pont-Audemer – Ville de Louviers – Ville de Dieppe

Le rallye de Haute-Normandie est gratuit !

C'est une constante depuis sa création et nous y tenons malgré les difficultés toujours plus nombreuses pour trouver des subventions pour organiser le rallye et surtout la finale dans de bonnes conditions.

L'équipe du rallye est constitué en 2015 de :

CM2/6e :
- Christine BLAISOT - professeur des écoles
- Philippe DELBART - professeur des écoles

3e/2nde :
- Patrick FRÉTIGNÉ – PRAG
- Saïd BOUARISS – professeur en collège

Terminales/Bac + 1
- Anne-Marie LISEICKI - professeur en lycée
- Patrick FRÉTIGNÉ – PRAG
- Frédéric VIVIEN – professeur en lycée

- **Contact :**

Patrick FRÉTIGNÉ :
: **pf@univ-rouen.fr**
Secrétariat (de l'IREM) :
: **secretariat.irem@univ-rouen.fr**
Site Internet : **http://irem.univ-rouen.fr/node/rallye/**

Je vous propose d'étudier les énoncés et quelques défis proposés au rallye ces 2 dernières années. Ils sont classés par ordre croissant de niveau :

- Les épreuves de CM2/6e

- Les épreuves de 3e/2nde

- Les épreuves de Terminale/Bac +1

1. LES ÉPREUVES DE CM2/6ÈME

Défi 7 – 2014 :

The baker cooks 67 cakes : some are round and some are square.
He puts the cakes in twelve boxes : 5 round cakes in each round box and 6 square cakes in each square box.

Every box is full at the end and there isn't any cake left.

How many round and square boxes has he got ?

- **Solution :**

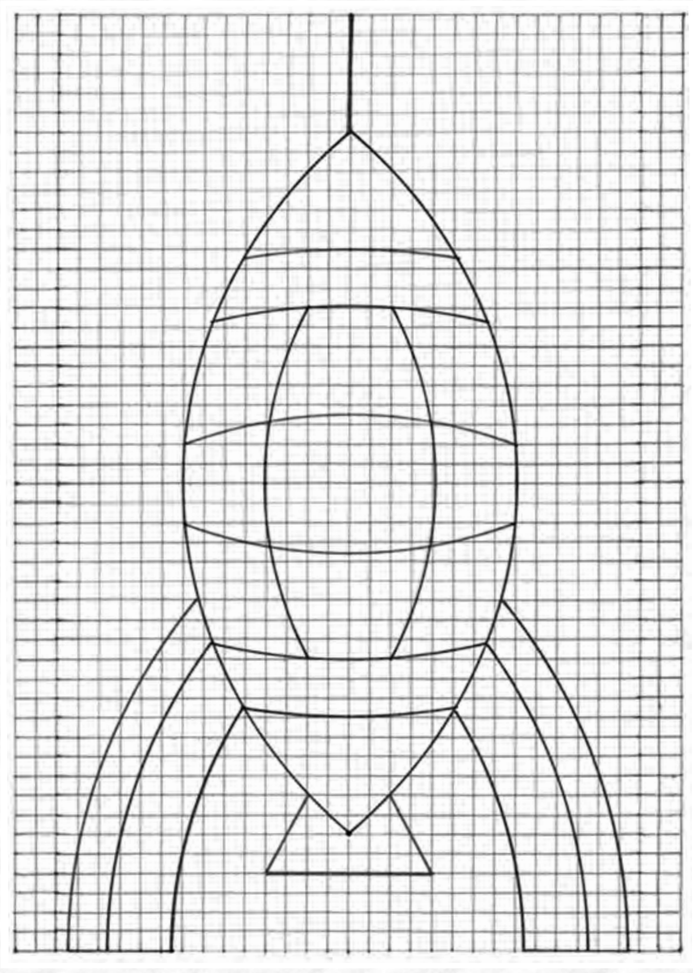
On peut commencer par compter les gâteaux ronds 5 par 5, tout en utilisant le fait que les multiples de 6 ne finissent jamais par 7, donc on peut compter les gâteaux ronds plutôt 10 par 10 en partant de 5. On s'aperçoit vite que le seul multiple de 6 qui finisse par 2 est 42. À partir de là, la solution apparaît rapidement : 42 gâteaux carrés et 25 gâteaux ronds, ce qui donne 7 boîtes pour les gâteaux carrés et 6 pour les ronds.

Commentaires

Le « tâtonnement » pour résoudre ce problème est la seule issue quand on est élève de CM2 ou de 6ème. Mais un tâtonnement qui a pu être facilité pour certains qui ont pensé utiliser les propriétés assez intuitives des multiples de 5 et de ceux de 6. C'est un des atouts de ces épreuves de rallyes : montrer toutes les facettes de la démarche scientifique. Et l'élimination des solutions à retirer, tout en optimisant cette recherche par la meilleure utilisation possible des données en est une ! Pas de honte, bien au contraire, à ne pas avoir recours systématiquement à la mise en équation.
The défi en anglais de l'année ! Vous l'avez évidemment remarqué. La première année, ça avait rebuté certains élèves et énervé certains enseignants : décidément, les langues étrangères, ça pose problème dans notre pays ! Nous ne sommes pas prêts de concurrencer les hollandais ou les scandinaves sur ce point … Maintenant, toutefois, c'est en quelque sorte rentré dans les habitudes : les élèves et leurs enseignants y sont préparés. Les dictionnaires sont prêts quand l'heure du rallye arrive ! Et quelques élèves mettent un point d'honneur à nous répondre dans la langue de Shakespeare !
Chapeau ! Euh « Hats off !» voulais-je dire.

Défi 10 – 2015 :

Reproduisez la fusée sur une feuille à petits carreaux en la réduisant de moitié.



Commentaires

Là aussi une constante, mais seulement dans nos épreuves de CM2/6e : reproduire un dessin à une échelle différente de celle du dessin proposé. Un élève s'y consacre avec beaucoup de soin généralement dans chaque classe participante.

LES ÉPREUVES DE 3E/2NDE

Défi1 – 2014 : Le nombre de Kaprekar !

Voici un nombre : 4965. On réorganise ce nombre :
1°) en écrivant les chiffres qui le composent par ordre croissant,
2°) en écrivant les chiffres qui le composent par ordre décroissant.
On obtient ainsi 2 nouveaux nombres. On soustrait le plus petit de ces 2 nombres au plus grand et on recommence l'opération avec le résultat obtenu. On ne s'arrête que quand le nombre ne varie plus.

Quel est alors le nombre obtenu ?

Dattatreya Ramachandra Kaprekar
Mathématicien indien (1905-1986)

- **Solution :**

On réorganise le nombre 4965 comme indiqué dans l'énoncé : ça donne 9654 et 4569. On effectue la soustraction 9654-4569, ce qui donne un nouveau nombre : 5085
et on recommence !
On obtient ainsi la suite de nombres suivante :
4965 – 5085 – 7992 – 7173 – 6354 – 3087– 8352 – 6174
Le nombre 6174 génère 2 nombres : 7641 et 1467 et quand on effectue la soustraction de ces 2 nombres, on obtient 6174. La suite s'arrête là et le nombre recherché est donc **6174**.

Commentaires
Petite touche historique (avec photo : c'est encore mieux !) : dès qu'on est en mesure de le faire, on ne s'en prive pas ! Quant au défi lui-même, il apporte selon nous le petit frisson que l'on ressent quand on aborde ce type de problème : on le lit, on commence les premiers calculs et on ne sait pas quand et même SI notre suite va converger. La convergence effective de notre calcul apportera le soulagement : si ma suite d'opérations converge, c'est que je dois avoir LA solution. Pour celui, plus scrupuleux (ou plus mathématicien) qui se demande ensuite s' il pouvait y avoir d'autres solutions, le singulier utilisé dans le titre du défi rassure certainement. Nous n'avons pas entendu parler d'élève qui soit allé jusqu'à partir d'un autre nombre que celui qui était proposé pour voir si la suite créée aboutissait elle aussi sur 6174 (vous sommes en temps limité ici et les meilleurs élèves sont souvent très sollicités par le reste de la classe pour résoudre un grand nombre de défis). Mais c'est ce genre de compléments que les enseignants proposent souvent à leurs élèves, le jour où ils corrigent le sujet du rallye en classe.

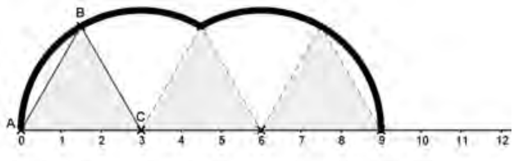
Défi 2 – 2015 :

Un triangle équilatéral ABC, de côté 3 cm, effectue des rotations sur une droite (d) autour de ses sommets. Dans sa position initiale, les sommets A et C sont sur la droite (d). On effectue une première rotation autour de C pour amener le point B sur la droite (d), puis on effectue une deuxième rotation autour de B pour amener le sommet A sur la droite (d) et on continue, toujours dans le même sens le long de la droite (d).

a) Dessiner le trajet parcouru par le sommet A pendant deux rotations.

b) Combien de rotations faut-il effectuer pour que la longueur du trajet parcouru par A dépasse 2015 cm ?

- **Solution :**



A la première rotation, A parcourt 2π ; à la seconde, même chose ; à la troisième, le point A est fixe puisqu'il s'agit d'une rotation de centre A.
Donc après trois rotations il a parcouru 4π.
Pour arriver à un trajet de 2015 cm, il faut $2015/4\pi$ séries de trois rotations, soit environ 160,35 soit un peu plus que $480/3 + 1/3$
Effectivement, après 160 séries de trois rotations, soit 480 rotations, la distance parcourue est encore inférieure à 2015 cm (2010,62 cm), après 481 rotations aussi, il a alors parcouru environ 2013,76 cm :
Il faut 482 rotations pour que la longueur du trajet parcouru par le point A dépasse 2015 cm.

Commentaires
Ce défi géométrique constitue un des défis les moins réussis que nous ayons été amenés à corriger. Les raisons ? Multiples, bien sûr. Certes il y a toujours des difficultés avec les sujets de géométrie, mais nous pensons qu'ici il y a eu en plus une mauvaise compréhension du sujet et plus particulièrement du mouvement du triangle. Les rotations ne sont pas bien maîtrisées, c'est certain, mais en plus ici le centre de la rotation change à chaque rotation. Il fallait aussi penser qu'une fois toutes les trois rotations, il s'agit d'une rotation autour du point A et que donc, pendant cette rotation, le point A ne parcourt aucune distance. La manipulation du nombre réel π associé dans une opération à des nombres entiers en est une autre et enfin, il y a cette difficulté à la fin (le fait qu'elle arrive en fin de calculs a sans doute compliqué encore) : le nombre de « triples rotations » du triangle ne tombe pas juste. Il est nécessaire de faire un calcul d'approximation relativement fin pour voir qu'après 160 triples rotations, il faut encore faire tourner 2 fois le triangle pour dépasser les 2015 cm.

Défi 4 – 2015 : Les experts

Cette année, à mi-saison, une équipe de handball a perdu 3 matchs, a fait 2 matchs nuls et a gagné quelques victoires. Si, dans la seconde moitié de la saison, elle obtient 0 défaite et autant de matchs nuls que de victoires, elle aura gagné 50% de ses matchs sur l'ensemble de la saison.

Combien y a-t-il d'équipes dans ce championnat ?

- **Solution :**

Notons G le nombre de matchs gagnés à la mi-saison dans la seconde moitié, appelons X le nombre de matchs nuls (qui est aussi le nombre de victoires). On a alors l'équation : G + X = 0,5×(3+2+G+0+X+X)
soit : 2G + 2X = 5 + G + 2X et donc G = 5
A la mi-saison il y avait eu 3 matchs perdus, 2 matchs nuls et 5 victoires, ce qui prouve qu'il y a eu en tout 10 matchs et que sur la saison entière, il y en aura 20. Dans la 2nde partie de la saison, l'équipe gagnera donc 5 matchs et fera 5 nuls. On a bien sur l'ensemble de la saison 3+2+5+0+5+5 = 20 matchs et 5 + 5 = 10 matchs gagnés. Comme à chaque demi-saison, ils rencontrent toutes les autres équipes et qu'ils ont joué 10 fois, il y a 11 équipes !

A la mi-saison	2^{e} moitié de saison
Nombre de matchs perdus : 3 Nombre de matchs nuls : 2 Nombre de victoires : g_1	Nombre de matchs perdus : 0 Nombre de matchs nuls : g_2 Nombre de victoires : g_2

Matchs gagnés de la saison : $g_1 + g_2$
Nombre total de matchs joués : $5 + g_1 + 2g_2$
$2(g_1 + g_2) = 5 + g_1 + 2g_2$, d'où $g_1 = 5$ et le **nombre de matchs joués : 20.**

Commentaires

Là, nous avons affaire à un type d'exercices plus rare dans nos énoncés. C'est en fait une mise en équation. L'énoncé est assez dense ce qui en rend le déchiffrage intéressant. Quand on le résout comme cela a été fait dans la solution ci-dessus, on voit qu'il faut faire attention aux parties gagnées, perdues, nulles dans les 2 demi-saisons : le fait qu'on soit à la mi-saison est à prendre en considération pour aboutir à la solution et les élèves n'ont pas souvent exploité cette donnée. Cet exercice n'a pas été bien réussi en fait. Je pense qu'il ne font pas réellement une mise en équation effective de toutes les données et du coup les notes qu'ils prennent sont vite peu claires, justement à cause de la densité de l'énoncé. Ils ont alors le plus grand mal à en tirer une et une seule solution. On a vu aussi plusieurs fois une confusion entre le nombre d'équipes et le nombre de matchs joués.

Défi 5 : Fasten seat belt

Quand il est midi à Paris, il est 7 heures du matin à New-York. Le vol de Paris à New-York dure 6h30 dans chaque sens.
Patrick décolle de Paris à 7h50 heure locale en direction de New-York et Saïd décolle de New-York en direction de Paris 1h20 plus tard. Leurs avions volent à la même vitesse et suivent le même parcours (à des altitudes légèrement différentes bien sûr).

A quelle heure (de New-York) se croiseront-ils ?

- **Solution :**

Le premier avion part de Paris et vol pendant 1h20 en direction de New-York. Après 1h20, il est donc à 6h30 – 1h20 = 5h10 de New-York.

C'est à ce moment-là que l'autre avion décolle de New-York en direction de Paris. Il est alors : 7h50 + 1h20, soit 9h10 à Paris et 9h10 – 5h = 4h10.

Ils vont se croiser après la moitié de 5h10 de vol, soit 2h35 après le décollage de New-York, où il sera alors 4h10 + 2h35 soit

6h45 (du matin)

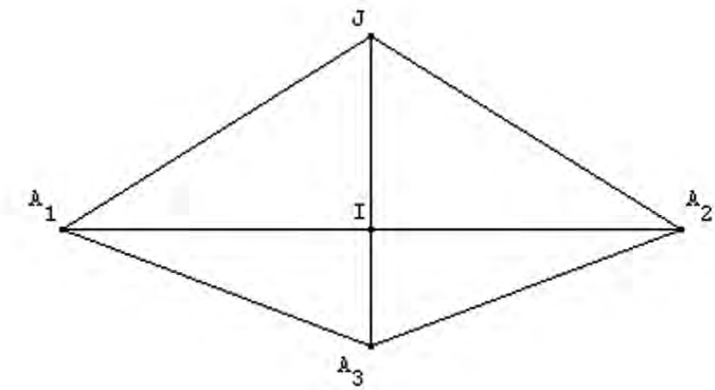
Commentaires
Les problèmes de trains, d'avions, de temps de parcours restent une difficulté importante pour les élèves. Nous n'avons pas encore osé le problème sur la baignoire qui se vide et/ou se remplit, mais qui sait dans les années à venir ….
Pour en revenir aux problèmes liés aux transports, les difficultés se cumulent : il y a les problèmes liés aux relations mal comprises entre temps, vitesse et distance et (c'était le cas ici) les difficultés liées à la bonne définition d'un référentiel (les avions vont dans deux sens différents), compliquées encore ici par le fait que l'heure locale n'est pas bien comprise. Il y avait cette année aussi, un problème (plus compliqué) sur les fuseaux horaires dans le sujet des Terminales/Bac +1 et qui a été très très mal géré par les élèves.

Défi 7 – 2014 : Justine et ses amies

Justine a beaucoup de chance, ses trois meilleurs amies d'enfance habitent près de chez elle.
Deux de ses amies habitent à 300 mètres de son domicile. La troisième, un peu plus loin encore, est située à 225 mètres des deux premières.
A quelle distance exacte, Justine est-elle de sa troisième amie, sachant que les deux premières amies habitent à 360 mètres l'une de l'autre ?

- **Solution :**

Les points J (Justine) et A_3 (3^e amie) sont équidistants des points A_1 et A_2 (les deux premières amies). Donc la droite (JA_3) est la médiatrice du segment [A_1A_2].



En utilisant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles IJA_2 et IA_2A_3 , on obtient :

IJ= 240 et IA_3=135.

Ainsi JA_3 = 375 m. (C'est la réponse attendue).

Commentaires
Comment réaliser un problème de rallye au niveau de la 3^e et de la seconde sans y insérer un défi qui nécessite l'utilisation du thèorème de Pythagore ? Vu les résultats obtenus (très moyens), les élèves s'en seraient bien passés, eux...

Défi 1 – 2013 : Pinocchio et Dorante

Pinocchio ment le mardi, le mercredi et le jeudi, mais il dit la vérité les autres jours de la semaine.
Dorante ment le samedi, le dimanche et le lundi, mais il dit la vérité les autres jours de la semaine.

Un jour où *Pinocchio* et *Dorante* se rencontrent,
Pinocchio dit : « Hier je mentais » et *Dorante* dit : « Moi aussi ».

Quel jour de la semaine se sont-ils rencontrés ?

- **Solution :**

De deux choses l'une : en disant « *hier je mentais* », *Pinocchio* ment ou ne ment pas. Imaginons dans un premier temps qu'il ne mente pas : on n'est donc ni mardi, ni mercredi, ni jeudi ; alors, c'est que la veille il mentait et on était mardi ou mercredi ou jeudi. Finalement, aujourd'hui on serait vendredi.

Mais le vendredi *Dorante* ne ment pas et le jeudi non plus. On arrive à une contradiction.

Donc, *Pinocchio* ment en disant « *hier je mentais* » : on est donc mardi ou mercredi ou jeudi. Et la veille, il ne mentait pas, donc on n'était ni mercredi, ni jeudi ; il ne reste donc que mardi. Vérifions pour *Dorante* : le mardi, il ne ment pas, donc s'il dit « *hier je mentais* », c'est qu'il mentait vraiment. Ment-il le lundi ? Oui.

Donc c'est bon, **on était mardi** !

Commentaires

Un exercice abordable et …. jamais choisi, mais rappelons-le dans cette épreuve plus on choisit un exercice au numéro élevé et plus il rapporte de points. Le défi 1 n'est donc pas un bon calcul…

Défi 5 – 2013 : L'invasion des 1 !

Soit $n = 9 + 99 + 999 + \ldots. + 99\ldots9$, où le dernier nombre ajouté est constitué de 999 chiffres 9.

Combien de fois le chiffre 1 apparaît-il dans n ?

- **Solution :**

Observons tout d'abord les premières étapes : *n* vaudra successivement : 9-108-1107-11106-111105-1111104-11111103-...

Il semblerait donc qu'à chaque étape, n hérite d'un « 1 » supplémentaire (au début de son écriture). Mais attention à son dernier chiffre : 9-8-7-6-... ça va de temps en temps (toutes les 10 étapes en fait) passer par un « 1 ». Débarrassons-nous tout de suite de ce problème : comme on va ajouter 999 nombres et que ce dernier chiffre commence à 9 et diminue d'une unité à chaque étape, il va finir par un 1, il finira donc bien par un « 1 ». Pour les « 1 » du début, faisons un raisonnement par récurrence :

Notre hypothèse, c'est : quand on ajoute un nombre composé de k « 9 », *n* commence par k – 1 « 1 ».
Si c'est le cas, *n* vaut alors : $n = 10^k + 10^{k-1} + \ldots + 10^2 + a$ (a étant un chiffre compris entre 0 et 9)
On lui ajoute $10^{k+1} - 1$
Il vaut alors : $10^{k+1} + 10^k + 10^{k-1} + \ldots + 10^2 + (a-1)$ et commence alors par k « 1 ». Notre hypothèse est avérée.

La réponse est donc : 998 « 1 » au début et un « 1 » à la fin soit :

999

Commentaires

Exercice très peu choisi : les calculs sur les chiffres et les dates font peur. Une erreur de 1 ou de 10 et c'est 0 à la question. Nous glissons toujours des défis de ce type dans le sujet des Terminales/ Bac +1 mais aussi dans celui des 3es/2des car nous pensons que c'est une occasion de manipuler des chiffres, des nombres, des opérateurs à la main vraiment : la calculatrice n'est pas d'une grande aide ici. Et même s'il n'est pas totalement exploité ici, le recours au raisonnement par récurrence est très satisfaisant. Il faudrait vérifier si les élèves sont aussi capables de le rédiger correctement mais, lors du rallye, le problème n'est pas là.

Défi 6 – 2013 : L'hélicoptère

Un hélicoptère décolle de l'aéroport de Boos (49°23'N, 1°11'E), près de Rouen et s'en va droit vers le nord. Au bout de 500 km, il tourne vers l'est, parcourt 500 km, puis met le cap vers le sud. Ayant encore franchi 500 km, il tourne vers l'ouest, parcourt de nouveau 500 km, puis se pose.

Indiquer le plus précisément possible sur la carte ci-dessous, la position de son atterrissage.

- **Solution :**

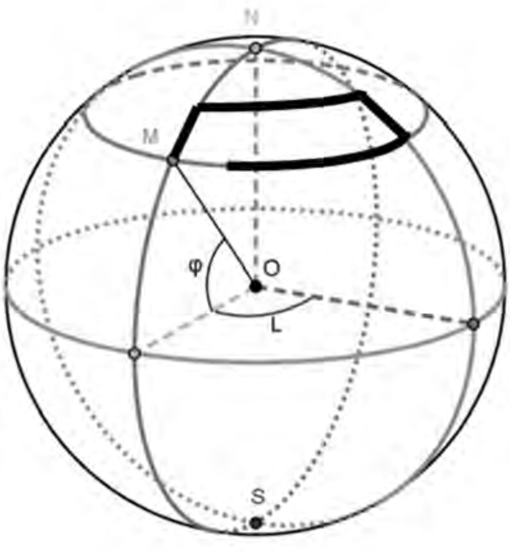
A partir du point M représentant la ville de Boos, l'hélicoptère va remonter le méridien vers le Nord passant par cette ville. Il parcourra ensuite 500 km vers l'Est sur une latitude constante mais sur un cercle de rayon plus petit que celui représentant la latitude de Boos. Comme 500 km sur le cercle le plus au Nord permet de "parcourir" plus de méridiens que celui à la latitude de Boos, une première réponse, sans le moindre calcul, serait de dire que l'hélicoptère va atterrir à l'est de Boos. La seule ville sur la carte proposée à la même latitude de Boos étant Auneuil cette réponse sera la bonne.

Par le calcul, il s'agit de déterminer l'angle au centre de la sphère terrestre (supposée de rayon 6371 km ou approché) correspondant à la distance de 500km. Par proportion avec le périmètre d'un cercle de rayon 6371 km, cela correspond à 4,4966°.

Il faut ensuite déterminer le rayon du disque, section de la sphère terrestre par un plan perpendiculaire à l'axe (NS) et passant par la latitude égale à celle de Boos plus l'angle trouvé précédemment. On trouve, en pratiquant les lignes trigonométriques dans un triangle rectangle construit dans le plan (OMN), on trouve r = 3755,57km environ.

La distance de 500km sur un tel cercle conduit à parcourir un angle autour de l'axe (NS) environ égal à 7,628°. Or, sur la latitude de Boos, un tel angle conduit à parcourir la distance de 552,18km. Il manque donc environ 52 km pour revenir au point de départ. En utilisant l'échelle donnée sur la carte, on retrouve la ville d'Auneuil.

Commentaires
Merveilleux défi ! La première lecture donne l'impression d'une évidence mais la place dans le rallye (ce n'est pas un défi 1, mais 6 !!!) laisse aussitôt penser qu'il y a un piège ou du moins qu'il faut s'y atteler avec beaucoup de sérieux. Comme on peut facilement le deviner, il a été très peu choisi par les élèves et même par les étudiants post-bac, mais ceux qui ont osé l'ont pour la plupart très bien traité. C'était même une surprise pour nous car nous pensions qu'il était vraiment très difficile. Bien évidemment, les élèves n'ont aucune notion de trigonométrie sphérique, mais l'intérêt qu'ils ont porté à résoudre ce problème concret est intéressant. L'attrait de l'aviation est encore bien réel chez les jeunes scientifiques et surtout la présentation du problème sous la forme d'une vraie carte routière les a attirés et les a poussés à mobiliser les connaissances dont ils disposent.



Défi 7 – 2014 : Pas le moment de faire une erreur de calcul ...

Flavius Josèphe est un historien du premier siècle. D'après la légende, ses talents de mathématicien lui auraient sauvé la vie. Pendant une guerre avec des soldats romains, il faisait partie d'un groupe de 41 rebelles piégés dans une cave qui, plutôt que de se rendre, avaient décidé de se suicider de la façon suivante : ils formèrent un cercle puis, en suivant la circonférence, ils tuèrent un homme sur trois parmi les survivants en partant du premier, jusqu'à ce qu'il ne reste plus personne. Josèphe et un autre rebelle ne voulaient pas ce suicide absurde.
Josèphe calcula donc où lui et son ami devaient se placer dans le cercle pour qu'à la fin ils restent vivants tous les deux.

Où doivent se placer Flavius Josèphe et son ami dans le cercle de départ pour rester vivants ?

Commentaires

Problème typique de ceux que nous cherchons à introduire dans nos épreuves : le problème n'est pas simple, mérite de la concentration, mais n'est pas infaisable non plus. Il nécessite le passage à l'outil algorihtmique. Il nécessite également de s'investir dans la lecture et la compréhension du texte et de sa traduction en mode mathématique. Enfin, il constitue un problème sinon célèbre (pour les élèves) mais historique et le sujet même du défi donne envie de s'y investir : on ne sent pas une quelconque mise en scène totalement artificielle juste pour donner prétexte à un problème mathématique abstrait. Au contraire, on perçoit l'utilité du raisonnement mathématique (et même algorithmique ici) pour résoudre un problème qu'il n'est pas possible de résoudre de façon « littéraire ». Ces dernières années, on a senti par nos épreuves l'évolution de la place de l'outil algorithmique dans la pratique des élèves et des étudiants ; après un rejet qui s'éternisait, il est entré récemment mais rapidement dans le catalogue des outils à disposition des élèves pour résoudre un problème. Une certaine assurance dans son utilisation a permis d'en faire un outil sur lequel l'élève ou l'étudiant peut compter.

- **Solution :**

Voici un programme Python permettant d'obtenir la solution :

```
v = list(range(1,42))
i=0# correspondant à la première personne, les indices commencent à 0 en Python
v=v[1:42]
while len(v)>2:
    i=i+3
    if i>=len(v):
        i=i-len(v)
    v=v[0:i]+v[i+1:len(v)]
    print(v)
```

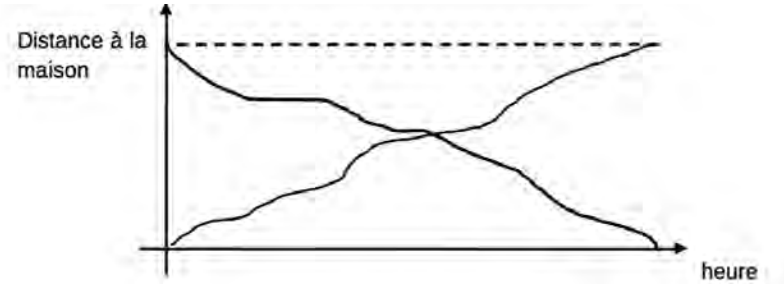
et son exécution
[2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]
[2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]
[2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]
[2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]
[2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]
[2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]
[2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]
[2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]
[2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41]
[2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 39, 40]
[2, 3, 4, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 39, 40]
[2, 3, 4, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 39, 40]
[2, 3, 4, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 39, 40]
[2, 3, 4, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 39, 40]
[2, 3, 4, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 26, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 39, 40]
[2, 3, 4, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 26, 28, 30, 31, 34, 35, 36, 38, 39, 40]
[2, 3, 4, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 26, 28, 30, 31, 34, 35, 36, 39, 40]
[2, 4, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 26, 28, 30, 31, 34, 35, 36, 39, 40]
[2, 4, 7, 8, 12, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 26, 28, 30, 31, 34, 35, 36, 39, 40]
[2, 4, 7, 8, 12, 14, 15, 19, 20, 23, 24, 26, 28, 30, 31, 34, 35, 36, 39, 40]
[2, 4, 7, 8, 12, 14, 15, 19, 20, 23, 26, 28, 30, 31, 34, 35, 36, 39, 40]
[2, 4, 7, 8, 12, 14, 15, 19, 20, 23, 26, 28, 30, 34, 35, 36, 39, 40]
[2, 4, 7, 8, 12, 14, 15, 19, 20, 23, 26, 28, 30, 34, 35, 36, 40]
[2, 4, 8, 12, 14, 15, 19, 20, 23, 26, 28, 30, 34, 35, 36, 40]
[2, 4, 8, 12, 14, 19, 20, 23, 26, 28, 30, 34, 35, 36, 40]
[2, 4, 8, 12, 14, 19, 20, 23, 28, 30, 34, 35, 36, 40]
[2, 4, 8, 12, 14, 19, 20, 23, 28, 30, 34, 36, 40]
[2, 8, 12, 14, 19, 20, 23, 28, 30, 34, 36, 40]
[2, 8, 12, 14, 20, 23, 28, 30, 34, 36, 40]
[2, 8, 12, 14, 20, 23, 28, 34, 36, 40]
[8, 12, 14, 20, 23, 28, 34, 36, 40]
[8, 12, 14, 23, 28, 34, 36, 40]
[8, 12, 14, 23, 28, 34, 40]
[8, 12, 23, 28, 34, 40]
[8, 12, 23, 28, 34]
[8, 12, 23, 34]
[8, 12, 34]
[8, 12]

Flavius et son ami doivent donc se mettre aux places 8 et 12 pour avoir la vie sauve !

Défi 11 – 2014 : Le randonneur

Un randonneur prévoit une journée de promenade. Il part de chez lui à 8h du matin pour arriver au lieu de sa destination le soir à 20h. Sa journée comporte des arrêts et sa vitesse n'est pas nécessairement constante lorsqu'il se déplace. Le lendemain, il reprend sa marche à la même heure de départ pour revenir chez lui de nouveau à la même heure le soir, 20h, en empruntant le même trajet. Existe-t-il sur le chemin un point sur lequel il se sera trouvé exactement à la même heure lors des deux trajets ?

- **Solution :**



Observons le graphe ci-dessus exprimant, en km, la distance à la maison du randonneur. La vitesse n'étant pas nécessairement constante, nous n'avons pas des segments sur cette représentation. Mais segments ou pas, les courbes se coupent obligatoirement en un point, et en un seul d'ailleurs, puisqu'il n'est pas envisagé qu'il revienne sur ses pas ! L'abscisse de ce point donne l'heure à laquelle il se trouve au même endroit et l'ordonnée donne la distance de ce point à la maison.

Commentaires

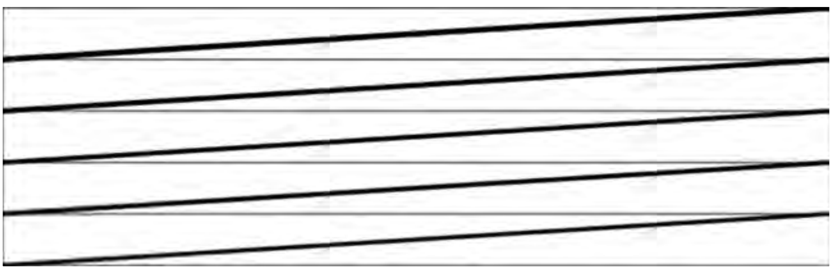
Là, le sujet est troublant et la réponse aussi. La façon de la justifier peut-être aussi ? En tout cas, même si ça paraît très surprenant aux élèves, la réponse est claire : oui, le randonneur se trouvera au même endroit à la même heure une fois dans la journée. Et une seule car il n'a pas le droit de rebrousser chemin. Sur un défi comme celui-ci, la justification a posteriori est indispensable car l'intuition qui pousse à donner la réponse opposée est forte (si il va très vite au début le premier jour puis très lentement et si il fait la même chose (ou le contraire d'ailleurs, selon les étudiants interrogés), il ne sera pas du tout dans la même partie du parcours. Et bien si ! Une fois !

Défi 12 – 2014 : Le parking

Cette rampe d'accès à un parking possède une structure en hélice et tourne exactement 5 fois autour de l'espace central qui a la forme d'un cylindre de hauteur 20 mètres et de largeur 10 mètres.
Quelle est la longueur de la rampe qui se trouve à 20 cm du cylindre central et qui suit la rampe sur toute sa longueur ?

- **Solution :**

Il suffit d'imaginer le cylindre sur lequel repose la rampe que l'on déplie en son patron et d'y indiquer le chemin que prend la rampe.



Un tour de cette rampe a donc comme longueur celle de la diagonale du rectangle formé par une hauteur de 4 mètres et une longueur de
$2\pi \times (5 + 0{,}20) = 10{,}40\pi$.
La diagonale du rectangle mesure $\sqrt{4^2 + (10{,}40\pi)^2}$.

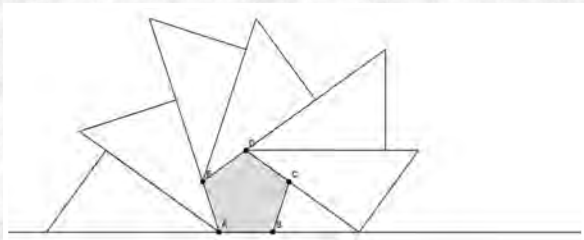
La longueur totale de la rampe est de 5 $\times \sqrt{4^2 + (10{,}40\pi)^2}$

Commentaires
On aime bien les défis qui commencent par un dessin, ou comme ici, une photo. On ne sait pas comment s'y sont pris les élèves, puisqu'on ne demande pas de démonstration, mais ceux qui ont choisi de tenter ce défi, l'ont plutôt bien réussi. Il nous paraissait pourtant assez difficile : géométrie, énoncé très court, il faut savoir en tirer les données et les mettre en équation, vision dans l'espace, longueur d'une courbe.... d'ailleurs nous l'avions intitulé « défi 12 », donc le plus dur ou presque. Il s'est passé un peu l'inverse de ce qui s'est produit sur le défi 9 (les fuseaux horaires) : les étudiants qui ont tenté le défi ont eu raison de le faire !

Défi 13 – 2013 : Le Sangaku

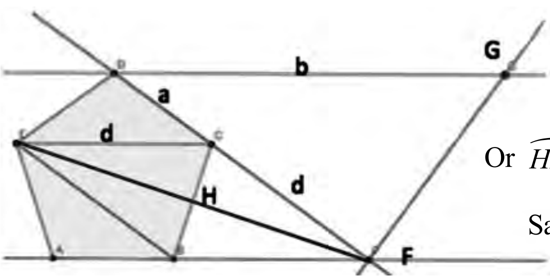
Sangaku : une énigme géométrique japonaise (d'après Gery Huvent, Dunod)
Ce Sangaku est relativement récent car daté de 1912, fin de l'ère Meiji.
On considère un pentagone régulier autour duquel s'enroule un éventail de six triangles rectangles isométriques selon la figure suivante.

Exprimer la longueur de l'hypoténuse des triangles en fonction de celle du côté du pentagone.



- **Solution :**

On considère ABCDE le pentagone régulier de côté a. ECFB est un losange de côté *d*. *b* est la longueur de l'hypoténuse du triangle DFG, rectangle en F.



$$b \times \cos(\widehat{FDG}) = a + d$$

et $d \times \sin \widehat{HEC} = \dfrac{a}{2}$

Or $\widehat{HEC} = \dfrac{\pi}{10}$ et $\widehat{FDG} = \dfrac{\pi}{5}$

Sachant que $2 \times \cos \dfrac{\pi}{5} = \Phi$:

(nombre d'or) et $\sin \dfrac{\pi}{10} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi}{5}\right) = \cos \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{1}{2\Phi}$

On obtient : $\dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{\Phi}\left(1 + \dfrac{1}{2\frac{1}{\Phi}}\right) = 2\Phi = 1 + \sqrt{5}$

Commentaires

Sans surprise cette fois, les élèves de Terminale et même ceux de Bac +1 (à l'exception des classes de Maths Sup) n'ont pas tenté ce défi, ou en tout cas, n'ont pas reporté sur la copie les résultats qu'ils avaient trouvés. Certes le sujet est assez difficile, mais il n'est pas interdit de penser que des facteurs psychologiques ont joué aussi : c'est le défi qui a le numéro le plus élevé, énigme géométrique japonaise (3 mots sur 3 qui font un peu peur....). Cette énigme est intéressante pourtant et mérite peut-être d'être vue dans un autre contexte que le sujet d'un rallye.