RALLYE MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE DE LYON

HISTORIQUE

Le rallye a été créé en 2006. Le principe est celui d'une recherche collective sur des problèmes suffisamment variés pour que tous les élèves puissent participer.

En plus, un problème ouvert est proposé aux classes volontaires. La recherche se fait de manière collaborative : les classes postent leurs trouvailles au fur et à mesure sur un site. Ces trouvailles peuvent être enrichies par d'autres classes.

L'année du rallye se clôture avec la fête des mathématiques. Sur une journée, les classes finalistes viennent s'affronter autour d'énigmes puis assistent à des conférences faites par des universitaires. La journée se termine par une remise des prix.

FICHE TECHNIQUE

- **Compétition :**

Nombre de participants : En 2014, plus de 22 000 élèves ont participés soit 766 classes de l'académie.

Niveaux d'études : 3^e, 2^{de} (générale et professionnelle) et $1^{ère}$ professionnelle.

- **Type d'épreuves proposées :**

◊ Le problème ouvert.

◊ L'épreuve écrite de deux heures (une version 1 heure est à l'essai pour les classes qui le souhaitent). Il y a trois niveaux d'énigmes.

Parmi les énoncés proposés, les élèves en choisissent un qu'ils illustrent. Trois exercices sont écrits en langue étrangère (le même exercice en anglais, espagnol, allemand et italien).

Le thème Astronomie est également abordé à travers plusieurs énoncés.

◊ La journée de la finale

- **Calendrier 2015 :**

◊ De février à mars 2015 : recherche du problème ouvert.
◊ Jeudi 5 mars 2015 : épreuve écrite du Rallye.
◊ Mardi 19 mai 2015 : finale pour les classes lauréates.

- **Partenaires organisateurs**

- l'APMEP
- l'IREM de LYON
- l'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques.

- **Contact**

Christian Mercat, directeur de l'IREM de Lyon, Président.
L'organisation et la gestion du Rallye sont assurées par l'association RMAL (Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon).

: **Rallye.Math@ac-lyon.fr**

Site Internet : **http://rallye-math.univ-lyon1.fr**

GRANDE OURSE (NIVEAU 2 - RALLYE 2014)

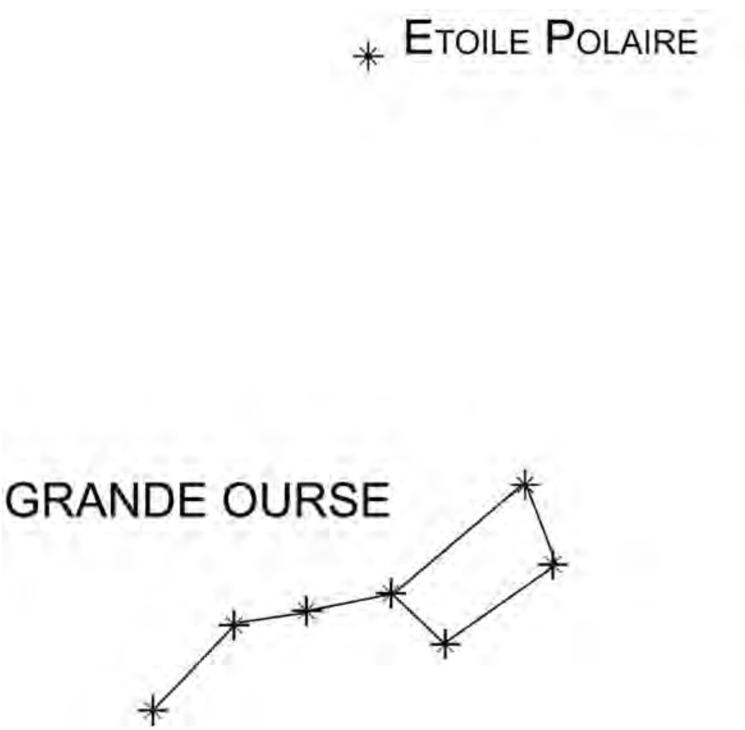
Enoncé :

Au cours de la nuit, dans l'hémisphère Nord, on voit les étoiles tourner autour de l'étoile Polaire à la vitesse d'un tour par jour.

L'étoile Polaire indique toujours la direction du Nord.

On a dessiné la Grande Ourse un jour à 21 h (voir ci-dessous).

La dessiner 3 heures plus tard.

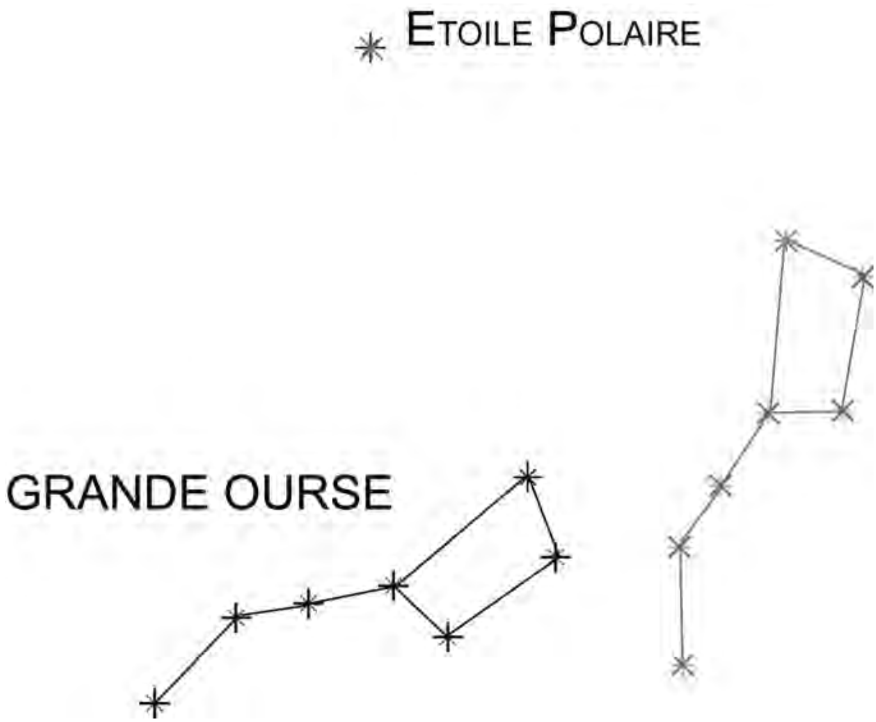


Analyse

Cet exercice a pour thème l'astronomie. Depuis 2012, nous proposons des exercices sur ce sujet dans le cadre de notre partenariat avec l'observatoire de St-Genis Laval. La classe qui réussit le mieux les exercices à thème astronomique a la chance de recevoir la visite d'un astronome de l'observatoire qui lui fera observer les étoiles un soir de juin dans la cour de son établissement.

Outre cette récompense, ce thème nous permet de développer l'intérêt des élèves et des enseignants pour les mystères de l'univers.

- **Solution :**



Commentaires :
Le thème de l'astronomie permet de développer un travail commun avec les enseignants de sciences physiques, notamment en classe de seconde. D'un point de vue mathématique, cet exercice fait intervenir la notion de rotation, abordée en 3^e, et réactivée lors de la construction du cercle trigonométrique en 2^e.

Cet exercice est issu du HS n°10 des Cahiers Clairaut, titré « Mathématiques et Astronomie », qui contient beaucoup d'exercices de niveaux très variés (de l'école élémentaire au lycée).

LE GRAND HUIT (NIVEAU 2 - RALLYE 2013)

Enoncé :

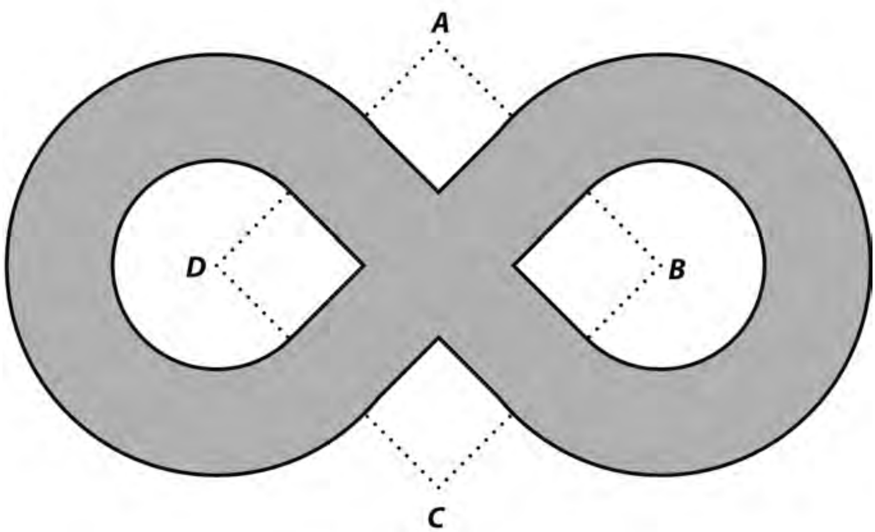
Die Ränder der Achterbahn schneiden die Seiten des Quadrats ABCD in drei gleiche Teile, und der Flächeninhalt des Quadrats ABCD ist 144 m². Welches ist der Flächeninhalt der Achterbahn?

Los bordes de la montaña rusa cortan los lados del cuadrado ABCD en tres partes iguales, y la área del cuadrado es de 144 m². ¿Cual es la área de la montaña rusa ?

I lati dell'otto volante tagliano i lati del quadrato ABCD in tre parti uguali, e la superficie del quadrato ABCD è di 144 m². Qual è la superficie dell'otto volante ?

The edges of the big dipper cut the sides of the square ABCD in three equal parts, and the surface of this square is 144 m². What is the surface of the big dipper ?

Arrondir à 0,01 prés



Analyse :

Les énoncés en 4 langues sollicitent d'autres capacités d'élèves dans la classe. L'exercice, une fois traduit, est assez classique pour le calcul d'une surface par découpage.

- **Solution :**

Le carré a pour côté 12 m ($12^2 = 144$). La largeur du grand huit est donc de 4 m.
On découpe le grand huit en 3. La partie centrale, à l'intérieur du carré ABCD, est constituée de 5 carrés de côté 4. Cela correspond aux 5/9ème du carré initial.
La partie centrale a donc une aire de $5 \times 16 = 80$ m²

Les deux autres parties sont symétriques donc ont la même aire.
Elles sont constituées des 3/4 d'une couronne. L'aire du petit disque, de rayon 4 m, est 16π. L'aire du grand disque, de rayon 8m, est 64π m².

Les 3/4 de la couronne de gauche a donc pour aire $(64\pi - 16\pi) \times \frac{3}{4} - 36\pi m^2$

Finalement, le grand huit a une aire de $2 \times 36\pi + 80 \simeq 306{,}19 m^2$.

Commentaires :
L'exercice d'apparence simple nécessite de la méthode. Les élèves qui en ont l'habitude vont chercher le découpage du grand huit en figures plus simples. Les autres ont besoin d'un peu plus de réflexion.

Des erreurs sont faites sur l'approximation : les élèves remplaçant le nombre π par 3,14 perdent la précision demandée.

Une conjecture sur Géogébra est possible mais pas évidente. Essayer de construire la figure demande un découpage similaire à celui proposé en solution.

Les compétences travaillées dans cet exercice peuvent être réutilisées dans des problèmes de recherche d'aire.

TRIANGLES DE HÉRON (NIVEAU 3 - RALLYE 2014)

Les trois côtés d'un triangle ABC mesurent 20 cm, 21 cm et 29 cm
Quel est le périmètre de ce triangle (en cm) ?
La formule de Héron d'Alexandrie permet de calculer l'aire d'un triangle à partir des longueurs a, b et c de ses côtés et de son demi-périmètre p :
aire = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Quelle est l'aire du triangle ABC ? (donner la réponse en cm², arrondir si besoin à 0,1 près).

On appelle triangles frères deux triangles ayant le même périmètre et la même aire.

Le but est de trouver un triangle frère du triangle ABC ayant un côté de longueur 28 cm. Ceci peut se faire de plusieurs manières, par le calcul ou le dessin, de manière exacte ou approximative. L'utilisation de ficelle est également possible.

Dessiner le triangle frère cherché, et expliquer votre manière de procéder.

Analyse :
Les premières questions sont simples, permettant aux élèves d'entrer dans le sujet. Pour la 1ère année, nous avons demandé une justification de résultat. Cet exercice peut être résolu de différentes façons, il est assez riche pour être retravaillé.

Enoncé :

- **Solution :**

Le périmètre du triangle est égal à 20 + 21 + 29 = 70 cm.

L'aire du triangle est égale à $\sqrt{35(35-20)(35-21)(35-29)} = 210\,cm^2$.

Méthode 1 : On essaie plusieurs valeurs
On sait qu'un côté est de 28 cm. Le périmètre étant de 70 cm, la somme des deux autres côtés est donc de 42
On peut alors essayer des triplets de côtés, (28 ; 17 ; 25) convient.

Méthode 2 : On raisonne avec l'aire. Elle est de 210 cm² et la base est de 28 cm. On a alors une hauteur de 210/28 = 7,5 cm
On peut tracer un segment de 28 cm puis une parallèle à cette base à une distance de 7,5 cm. A l'aide d'une ficelle de longueur de 70 – 28 = 42 cm, on cherche comment placer la ficelle avec un sommet sur la parallèle

tracée : cela garantit l'aire de 210 cm².

Méthode 3: On met le problème en équation. On note b la longueur d'un des côtés. Le 3^{e} côté a alors pour longueur $70 - 28 - b = 42 - b$

L'aire est alors égale à $\sqrt{35(35-b)(35-28)(35-42+b)} = 210$

Cette équation mise au carré puis développée donne $b^2 - 42b + 425 = 0$

> ***Commentaires :***
> *Cet exercice fait travailler les notions d'aire et de périmètre conjointement. Il permet de découvrir une formule utile et simple d'utilisation. A noter, le jeu de mots (dû à Daniel Perrin) pour les triangles frères : « deux triangles de même périmètre et de même aire » : on entend « deux triangles de même PERE(imètre) et de même MERE ».*
> *(Prolongement sur ce sujet pour les professeurs sur :*
> *http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/meme_aire_meme_perimetre_et_pourtant/)*
> *On peut en 2^{nd}, utiliser cet exercice pour travailler l'algorithmique et les fonctions.*

En seconde, on peut résoudre graphiquement cette équation.

Voilà un TD construit à partir de cet exercice :

1) La formule de Héron ; travail sur un algorithme

On fait ouvrir l'algorithme « Héron » programmé sur Algobox ou on le

Variables	a, b, c, p, q, S sont du type nombres
Entrée	Afficher : « Donner les longueurs des trois côtés du triangle » Lire a Lire b Lire c
Traitement	p prend la valeur a + b + c q prend la valeur p/2 S prend la valeur sqrt(q*(q-a)*(q-b)*(q-c))
Sortie	Afficher « L'aire du triangle est égale à » Afficher S

fait programmer

Puis on demande quelle formule il nous apprend.

On l'applique au triangle ABC de côtés 20, 21 et 29 cm pour trouver son aire. Demander aussi le périmètre

2) Recherche du problème des triangles frères

On pose le problème et on incite à poser une équation :
On note a le côté de 28 cm ; b et c les deux autres longueurs du triangle frère cherché. Exprimer c en fonction de b puis l'aire S du triangle « frère » d'ABC en fonction de b seulement.

Méthode de résolution 1 : par l'étude de la fonction polynôme du second degré et de l'équation $f(b) = 210$. Si on ne simplifie pas l'équation, il est intéressant sur la calculatrice de travailler sur les fenêtres d'affichage.

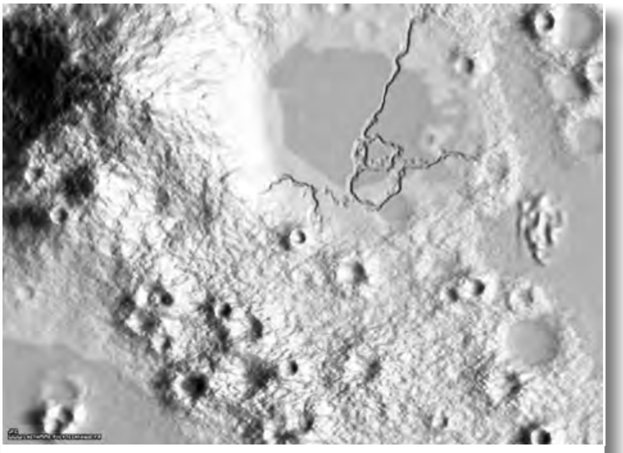
Méthode de résolution 2 : on essaie des valeurs entières et on remplit le

b	15	15	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$c = 42 - b$											
A											

tableau à l'aide de l'algorithme programmé dans la 1ère partie.

On en déduit la solution.

L'utilisation des propriétés des fonctions polynômes du second degré permet de justifier qu'il n'y a pas d'autres solutions (les deux solutions de l'équation donnent un seul triangle frère).



L'anomalie de Boticelli sur la Lune
J FC
www.lactamme.polytechnique.fr