TOURNOI FRANÇAIS DES JEUNES MATHÉMATICIENNES ET MATHÉMATICIENS

Le Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens (TFJM) est une compétition de mathématiques qui propose à des élèves de lycée de travailler par équipe sur une série de problèmes ouverts pendant plusieurs mois.

PRÉSENTATION :

- **Le principe**

Ce tournoi est destiné aux élèves de lycée. La participation se fait par équipes de 4 à 6 élèves, encadrés par deux professeurs ou chercheurs. Les participants ont deux mois pour chercher des solutions à une série d'une dizaine de problémes difficiles, dont les dernières questions n'admettent pas de solution compléte connue.

Les élèves rédigent les résultats de leur recherche et les envoient au jury. Puis, pendant un weekend, les équipes d'une même région se retrouvent. À ce moment, elles découvrent les solutions proposées par les autres équipes. Chaque équipe présente ses résultats sur un problème à un jury de chercheurs, puis est confrontée à la critique d'une seconde équipe, sous la forme d'un débat oral.
Un membre d'une équipe tierce joue le rôle d'arbitre du débat.
Puis les rôles changent, l'équipe qui a présenté devient critique, l'arbitre présente son probléme, etc...

Deux joutes mathématiques de ce type ont lieu pendant le weekend. Le but est de favoriser les échanges d'idées constructives afin d'aller le plus loin possible dans la résolution du problème. Le jury peut orienter le débat par des questions.

Les meilleures équipes de chaque région sont sélectionnées pour se retrouver ensemble lors d'une finale nationale, et même au niveau international lors de l'*International Tournament of Young Mathematicians* pour les meilleurs.

- **Modalités de participation**

Les énoncés sont publiés en ligne au mois de décembre ou janvier. En 2016, les épreuves régionales se dérouleront début avril et la finale nationale en mai. Les inscriptions se font en ligne aprés la publication des énoncés. Des tournois régionaux sont prévus à Strasbourg, Rennes, Toulouse, Paris mais aussi probablement à Lyon, Marseille et Lille. Toutes les informations relatives au TFJM sont disponibles sur le site Internet.

- **Contact**

TFJM - Animath,
IHP
11-13 rue P. et M. Curie, 75231 Paris Cedex 05

☎ : 01 44 27 66 70

🖱 : organisateurs@tfjm.org

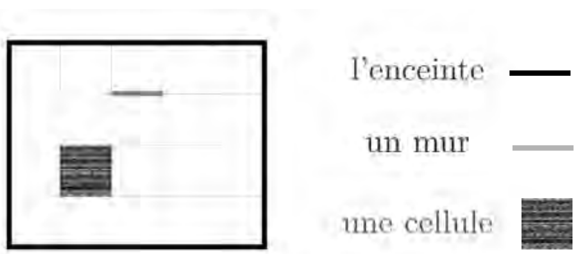
Site Internet : **www.tfjm.org**

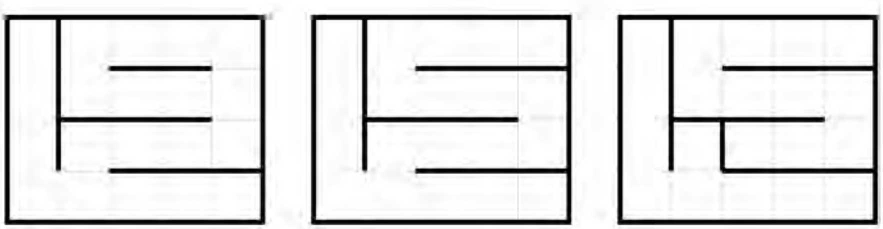
ANALYSE D'UN ÉNONCÉ

Étant donné que les problèmes du tournoi sont difficiles et font l'objet d'un temps de recherche long (plusieurs mois) il a semblé plus intéressant d'étudier dans le détail un problème que d'en survoler plusieurs. Voici l'analyse d'un problème issu de l'Édition 2014 du tournoi. Tous les énoncés des années précédentes sont disponibles en ligne.

Enoncé :

On considère une grille rectangulaire de taille $n \times m$. Le bord du rectangle est nommé *enceinte*. Les petits carrés sont appelés des *cellules*. Des *murs* peuvent être placés sur les côtés des cellules. On appelle *labyrinthe* un ensemble de murs tel que l'espace à l'intérieur de l'enceinte soit connexe et tel que l'ajout d'un mur fait nécessairement perdre la connexité (voir Figure). On note $\mathcal{L}(n,m$ l'ensemble des labyrinthes de taille $n \times m$, et son cardinal $L(n,m)$.





(a) (b) (c)

Figure 1 – Seul (b) est un labyrinthe :
(c) n'est pas un labyrinthe car il contient deux espaces séparés (et n'est donc pas connexe) et (a) n'en est pas un car on peut ajouter un mur sans perdre la connexité.

Étant données deux cellules A et B, on appelle chemin entre A et B une succession de pas verticaux et horizontaux, contigus, reliant A à B, sans passer deux fois par une même cellule.
On note $|AB|$ la longueur du plus court chemin entre A et B. Etant donné un labyrinthe λ, on appelle λ-chemin entre A et B tout chemin entre A et B ne transperçant pas les murs de λ. On note $\|AB\|_\lambda$ la longueur du plus court λ-chemin entre A et B.

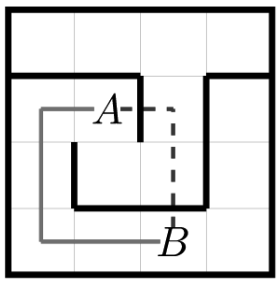


Figure ci-dessus : Ici, $|AB| = 3$ mais $\|AB\|_\lambda = 5$

1. Pour un labyrinthe λ, on note $G(\lambda)$ la longueur du plus long λ-chemin qu'il contient. Etudier $\min_{\lambda \in \mathcal{L}(n,m)} G(\lambda)$ et $\max_{\lambda \in \mathcal{L}(n,m)} G(\lambda)$.

2. Combien de murs peut avoir un labyrinthe de taille $n \times m$?

3. Soient A,B deux cellules données. Etudier $\max_{\lambda \in \mathcal{L}(n,m)} \|AB\|_\lambda$ et $\min_{\lambda \in \mathcal{L}(n,m)} \|AB\|_\lambda$.

4. Exprimer $L(2,m)$.

5. Étudier le comportement de $L(n,m)$ pour d'autres valeurs de n. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

Compréhension du sujet

La première chose notable sur cet énoncé est qu'il est difficile à comprendre. C'est évidement délibéré. Les participants ont du temps pour réfléchir, ils ne travaillent pas en temps limité. Ce n'est pas le cas de tous les énoncés du tournoi, mais les énoncés que l'on comprend du premier coup sont souvent les plus difficiles. Ici, la compréhension fait partie de l'épreuve. On notera que la compréhension est difficile car très théorique, pas parce qu'elle est incomplète. L'énoncé décrit en effet en termes mathématiques un objet assez simple, une grille de labyrinthe. Cette première barrière constitue une première étape du problème : on attend de l'élève qu'il s'approprie les définitions et notations proposées par l'énoncé et qu'il les rapproche seul des notions qui peuvent lui sembler naturelles. Pourquoi de telles notations ? Lors de l'élaboration du problème, les auteurs se sont rendu compte qu'il n'y avait pas de définition universelle d'un labyrinthe. Par conséquent il était nécessaire de bien fixer le cadre afin que chacun traite le même sujet et que les échanges puissent avoir lieu entre les équipes le moment venu. Les auteurs se sont efforcés de donner des définitions qui guident les recherches vers le format de labyrinthe le plus intéressant à étudier mathématiquement. Les définitions des éléments du labyrinthe portent volontairement des noms explicites et sont accompagnées de schémas afin qu'aucune confusion ne soit possible.

- **Attaquer une question**

L'objectif est de pousser le lecteur à faire des dessins de plein d'exemples de labyrinthes possibles, puis vérifier pour chacun s'il colle ou non à la définition de l'énoncé. C'est ainsi qu'il comprendra la notion de connexité. Par cette même série de petits exemples, le lecteur doit commencer à se rendre compte que pour m, n fixés, tous les labyrinthes ont le même nombre de murs, ce qui est la première étape importante pour répondre à la question 2. Il y a ensuite plusieurs façons de calculer ce nombre, qui est $nm-n-m+1$. On peut le faire directement avec des arguments difficiles à rédiger, un peu à la main, mais aussi avec une forme de récurrence. Néanmoins la réponse la plus facile à exprimer est en décomptant via un graphe connexe (dont les cellules du labyrinthe sont les sommets). Bien que rarement exprimé en ces termes, cette vision du probléme apparaît dans de nombreuses solutions.

- **Retour à la première question**

Après avoir bien compris les définitions, on peut chercher la première question. Celle-ci est intéressante car elle demande d'étudier le maximum d'un maximum, puis le minimum d'un maximum. Ce double niveau, qui revient au moins une fois par an dans nos énoncés, demande une gymnastique d'esprit intéressante sans être inabordable : *G(λ)* n'est rien d'autre que le chemin le plus long que l'on peut insérer dans un labyrinthe. Cela demande avant tout de regarder de nombreux petits exemples, qui permettent sans trop de difficulté de trouver les réponses. Pour le maximum, un labyrinthe "en escargot" fait bien l'affaire et $\max G(\lambda) = nm - 1$. Pour le minimum, il faut réfléchir un peu plus, mais on trouve après réflexion qu'un labyrinthe "en double peigne" donne $\min G(\lambda) = m + n - 2$, avec un petit cas particulier si les deux côtés sont impairs. Mais lorsqu'on a vu cela, comment rédiger une telle preuve ? Prouver que la valeur est atteinte est facile à l'aide d'un dessin, mais comment montrer qu'on ne peut pas la dépasser. Encore une question dont les éléves n'ont pas l'habitude. C'est souvent à ce moment que le professeur encadrant joue son rôle : comment argumenter que ce n'est pas possible ? On comprend alors que prouver que quelque chose n'existe pas, c'est bien plus difficile que prouver qu'une chose existe, puisqu'on ne peut pas la montrer. Néanmoins on y arrive, pour le maximum en argumentant que toutes les cases sont ainsi visitées. Pour le minimum il faut considérer qu'il existe un chemin reliant deux sommets opposés, avec quelques subtilités (on peut regarder les deux chemins qui relient les couples de sommets opposés, il existe un point d'intersection, un des quatre tels chemins fait alors au moins la longueur minimale affirmée). Ces résultats simples sur des objets abordables demandent déjà un raisonnement très intéressant.

- **Troisième question : les distances**

Là encore, on retrouve des min de max et max de min ... Pour la distance minimale, après compréhension du sens de la question par des petits exemples, on comprend qu'il s'agit de la distance "habituelle", c'est à dire $\min_{\lambda \in \mathcal{L}(n,m)} \|AB\|_\lambda = |AB|$

En effet, les murs du labyrinthe ne font qu'ajouter des contraintes, on ne peut donc pas faire moins que la distance en absence de murs. On l'a normalement déjà compris avec la question 2. Une bonne justification mathématique est de construire l'arbre couvrant suivant : on se donne un chemin minimal entre A et B , on trace ensuite des chemins verticaux dans toutes les colonnes, on relie entre eux les chemins verticaux voisins non reliés par le chemin minimal. Cela semble assez intuitif à qui a étudié un peu longuement la question puisqu'on a souvent retrouvé des algorithmes de traçage équivalents dans les solutions proposées par les élèves, bien que non décrits dans ces termes. Pour le maximum, c'est plus compliqué.

L'intuition nous dit qu'on va pouvoir tourner suffisamment pour recouvrir tout le labyrinthe et obtenir la longueur de $nm-1$. Néanmoins des problèmes de parité se posent et il faut faire une distinction de cas un petit peu exhaustive que nous ne ferons pas ici. Une chose élégante à montrer est que la valeur $nm-1$ n'est pas toujours atteinte, ce qui peut se faire avec des arguments de coloriages.

- **Quatrième question : décompter les labyrinthes**

Ici, on change un peu le sujet d'étude. On ne s'intéresse plus aux chemins, simplement au nombre de labyrinthes. La question de la valeur de $L(2,m)$ se résout bien par récurrence : on obtient une équation de récurrence d'ordre deux. En plus d'une bonne application du programme de terminale, cela pousse les élèves à chercher comment résoudre une telle équation, ce qui se trouve facilement et est à leur portée. De plus ils peuvent vérifier leur résultat (une grosse formule avec des $\sqrt{3}$ dont ils sont toujours très fiers) à partir de leurs exemples.

- **Généralisation**

La question 5 est clairement ouverte. L'étude d'autres valeurs de n est autrement plus compliquée. Même pour 3, une récurrence devient trop difficile. La seule approche connue par les auteurs du problème est l'utilisation du théorème de Kirchhoff sur les arbres couvrants, mais ce n'est pas ce qui était attendu ici. L'important est que les élèves voient la limite des méthodes qu'ils ont employées et pourquoi elles ne fonctionnent plus ici. Cette question a entraîné de nombreuses tentatives de généralisations des questions précédentes en 3 dimensions. Encore une fois, l'intérêt est de voir ce qui s'adapte bien (et déjà comment définir un labyrinthe en 3D) et si les méthodes passent à l'échelle ou non, plutôt que les résultats.

Réutilisation dans les classes et ailleurs

Le tournoi s'adresse en particulier aux élèves de première et terminale ayant déjà un bon niveau en mathématiques et souhaitant creuser un peu plus loin que le programme, avec une approche différente de la discipline. Par conséquent, on ne peut directement faire participer toute une classe à la compétition. Il existe cependant plusieurs répercussions indirectes de la participation d'une équipe d'un établissement sur le reste des élèves.

Le premier scénario observé, le plus naturel, est lorsqu'une équipe d' une même classe participe à la compétition. Alors, une dynamique de classe se crée autour de l'équipe qui représente sa classe dans la compétition.

Les énoncés, qui sont publics, sont lus par tous les élèves avec plus ou moins d'attention. Le calendrier du tournoi rythme la vie de la classe et, après la fin de la compétition, l'équipe peut présenter ses travaux aux autres élèves.

Des équipes de classes différentes existent également et même de niveaux différents. Les équipes avec une moitié de terminales et une moitié de premières fonctionnent trés bien. Depuis quelques années, le TFJM sert de support pour les clubs de maths existants dans certains lycées pendant toute la deuxième moitié de l'année. De plus, les élèves ayant pu participer en première reviennent l'année suivante et coachent la génération suivante. On trouve aussi des anciens participants, en classe préparatoire ou à l'université, qui viennent encadrer l'équipe de leur ancien établissement.

Une autre reprise qui a déjà été expérimentée est l'organisation d'un mini-tournoi au sein d'une classe : organisation de trois équipes d'une dizaine d'élèves, sur des énoncés de l'année précédente simplifiés. Après une petite semaine de recherche, les élèves présentent leurs résultats et débattent des problèmes.

Enfin, les élèves ayant participé peuvent présenter leurs problèmes à des publics plus variés. Cela a été expérimenté lors de la fête de la science, où d'anciens participants ont préparé des exposés d'une dizaine de minutes sur leurs problèmes. Cela demande de l'accompagnement car les élèves, qui connaissent très bien leur sujet puisqu'ils y ont consacré plusieurs mois, n'ont pas l'habitude de devoir l'expliquer à des personnes qui ne connaissent pas l'énoncé. Malgré cela, cette formule fonctionne bien car les élèves sont toujours fiers de présenter leurs travaux et le public est souvent plus intéressé par l'exposé d'un lycéen que par celui d'un chercheur, parce qu'il y trouve une plus grande proximité.

On remarque que la participation au tournoi a un impact important sur les participants. Ceux-ci sont très nombreux à continuer ensuite des études scientifiques longues en lien fort avec les mathématiques et beaucoup s'investissent dans l'organisation de l'événement les années suivantes. Ceci est expliqué par deux facteurs : l'investissement sur la durée qui marque plus fortement qu'une épreuve en temps limité, mais aussi l'expérience collective et non individuelle, qui crée de nombreux souvenirs.