TOURNOI MATHÉMATIQUE DU LIMOUSIN

PRÉSENTATION :

- **Historique :**

Il a été créé en 1987 par une équipe de professeurs soutenue par :
- ♦la régionale de Limoges de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques)
- ♦le département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Limoges
- ♦l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de Limoges
- ♦l'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques de l'Académie de Limoges

- **Compétition :**

Nombre de participants : environ 4000 élèves de collèges et 2000 élèves de lycées (y compris les lycées professionnels)

- **Niveaux d'études :**

Classes de quatrième pour les collégiens, toutes classes de lycées.

- **Type d'épreuves proposées :**

Une seule épreuve, de deux heures pour les quatrièmes et les lycées professionnels, de trois heures pour les lycéens ; l'épreuve est composée de 4 problèmes à résoudre par équipes de deux.

- **Fréquence :**

Chaque année à la fin du mois de janvier ; la remise des prix se déroule devant un public nombreux en avril ou en mai.

- **Liste des principaux partenaires :**

Conseil Régional du Limousin, Conseils Généraux des départements : Corrèze, Creuse et Haute-Vienne,

Fondation Partenariale de l'Université de Limoges, Faculté des Sciences et Techniques de Limoges, Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Limoges,

ÉSPÉ de l'Académie de Limoges,

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Comité International des Jeux Mathématiques,

Calculatrices CASIO, Calculatrices TEXAS INSTRUMENTS,

Association Limousine des Sports Aériens,

Banque Populaire Aquitaine Centre Atlantique,

- **Contact :**

IREM
123 avenue Albert Thomas
87060 Limoges cedex

☎ : 05 55 45 72 49

🖷 : 05 55 45 73 20

🖰 : **irem@unilim.fr**

Site Internet : **www.irem.unilim.fr**

- **Divers :**

Trois brochures éditées aux PULIM permettent une utilisation des sujets en classe.

Organisation à la BFM (bibliothèque) de Limoges d'une après-midi « Mathématiques pour tous » avec présentation de jeux mathématiques issus de sujets de Tournoi qui ont été transformés en activités mathématiques ludiques pour écoliers, collégiens, lycéens ou grand public.

MULTIPLE CACHÉ
SUJET POSÉ EN 2013 À DES ÉLÈVES DE QUATRIÈME

Enoncé :

Claude écrit tous les nombres de quatre chiffres distincts formés avec 2, 4, 5 et 7. Combien en écrit-il ?

Deux de ces nombres sont tels que l'un est multiple de l'autre. Lesquels ?

- **Solution :**

1) On trouve 24 nombres de quatre chiffres distincts formés avec 2, 4, 5 et 7 : 2457, 2475, 2547, 2574, 2745, 2754, 4257, 4275, 4527, 4572, 4725, 4752, 5247, 5274, 5427, 5472, 5724, 5742, 7245, 7254, 7425, 7452, 7524, 7542.

Explication du total égal à 24 : on choisit d'abord le premier chiffre : il y a 4 possibilités. Pour chacun des choix, on choisit ensuite le deuxième chiffre : il n'y a plus que trois possibilités. Pour chacun des choix, on choisit ensuite le troisième chiffre : il ne reste plus que deux possibilités. Enfin, pour le dernier chiffre il ne reste plus qu'une possibilité.

Il y a donc au total $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ possibilités.

2) Notons N le plus petit des deux nombres. Son premier chiffre est nécessairement égal à 2 car si c'était 4, l'autre nombre serait aux moins égal à 2N et débuterait par 8 ou 9, ce n'est pas possible.
Il y a donc 6 nombres à tester : 2457, 2475, 2547, 2574, 2745 et 2754.
Les doubles de ces 6 nombres valent respectivement: 4914, 4950, 5094, 5148, 5490, 5508. Aucun ne convient.
Les triples des 6 nombres à tester valent respectivement: 7371, 7425, 7641, 7722, 8235, 8262.
Les quadruples des 6 nombres sont trop grands.

On obtient donc une seule solution : $7425 = 3 \times 2475$.

Commentaires

Exercice de dénombrement abordable par tous. La première question ne pose pas de problème si on écrit méthodiquement tous les nombres demandés.
Pour la seconde question, le mot multiple a posé problème à certains élèves. Pour trouver tous les cas, il faut examiner avec rigueur toutes les possibilités en multipliant par 2, 3 ou 4 chacun des nombres écrits dans la première question. Certains ont obtenu le résultat par tâtonnements mais cela ne démontre pas qu'il n'y a qu'une solution.
On peut écrire un programme :
1) on calcule la liste des 24 nombres formés avec les 4 chiffres,
2) pour chacun de ces nombres, on le multiplie par 2, 3 et 4 puis on teste si le résultat est égal à l'un des nombres de la liste.

DIFFÉRENCE DE DEUX CARRÉS D'ENTIERS
SUJET POSÉ EN 2013 À DES LYCÉENS

Enoncé :

1) Quels sont les entiers compris entre 1 et 10 qui ne peuvent pas s'écrire comme la différence de deux carrés d'entiers ?

2) Montrer que tout nombre impair peut s'écrire comme la différence de deux carrés d'entiers.

3) Combien d'entiers entre 1 et 100 ne peuvent pas s'écrire comme la différence de deux carrés d'entiers ? Justifier votre résultat.

- **Solution :**

1) $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$.
Calculons les différences de deux de ces carrés.
De 1 en 1 : 1, 3, 5, 7, 9.
De 2 en 2 : 4, 8, 12, 16.
De 3 en 3 : 9, 15, 21.
De 4 en 4 : 16, 24.
On a obtenu seulement les entiers : 1, 3, 4, 5, 7, 8 et 9. Les entiers 2, 6 et 10 ne peuvent donc pas s'écrire comme une différence de deux carrés.

2) On a obtenu les premiers nombres impairs par différence de deux carrés consécutifs.
De façon générale, la différence de deux carrés consécutifs s'écrit :
$(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$.
On obtient bien ainsi tous les nombres impairs.

3) On a obtenu les premiers multiples de 4 par différence des carrés pris de 2 en 2.
De façon générale, la différence de deux carrés pris de 2 en 2 s'écrit :
$(k+2)^2 - k^2 = 4(k + 1)$.
On obtient ainsi tous les multiples de 4.

Plus généralement, une différence de deux carrés pris de p en p s'écrira :
$(k+p)^2 - k^2= 2kp+p^2$.

Si p est impair, cette différence est un nombre impair ; si p est pair, cette différence est un multiple de 4. Les nombres pairs non multiples de 4 ne sont jamais obtenus. Ce sont les nombres qui s'écrivent $N = 4k + 2$.

$N = 4k + 2$ est compris entre 1 et 100 quand k est compris entre 0 et 24.

Cela fait donc 25 entiers compris entre 1 et 100 qui ne peuvent pas s'écrire comme la différence de deux carrés d'entiers : 2, 6, 10, 14, …, 94, 98.

Commentaires

La première question à posé problème à certains élèves qui auraient préféré la question « Quels sont les entiers compris entre 1 et 10 qui peuvent s'écrire … », mais cela revient au même et il suffit d'écrire les premiers carrés puis de calculer leurs différences.

Les formules $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ *et* $(k+2)^2 - k^2 = 4(k+1)$ *montrent que l'on peut obtenir les nombres impairs et les multiples de 4.*

Pour montrer que les doubles des nombres impairs ne peuvent être obtenus, on peut aussi remarquer que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ *et que* $a + b$ *et* $a - b$ *ont la même parité. Par suite, si* $a + b$ *est impair alors* $a^2 - b^2$ *est impair ; si* $a = b$ *est pair alors* $a^2 - b^2$ *est multiple de 4.*

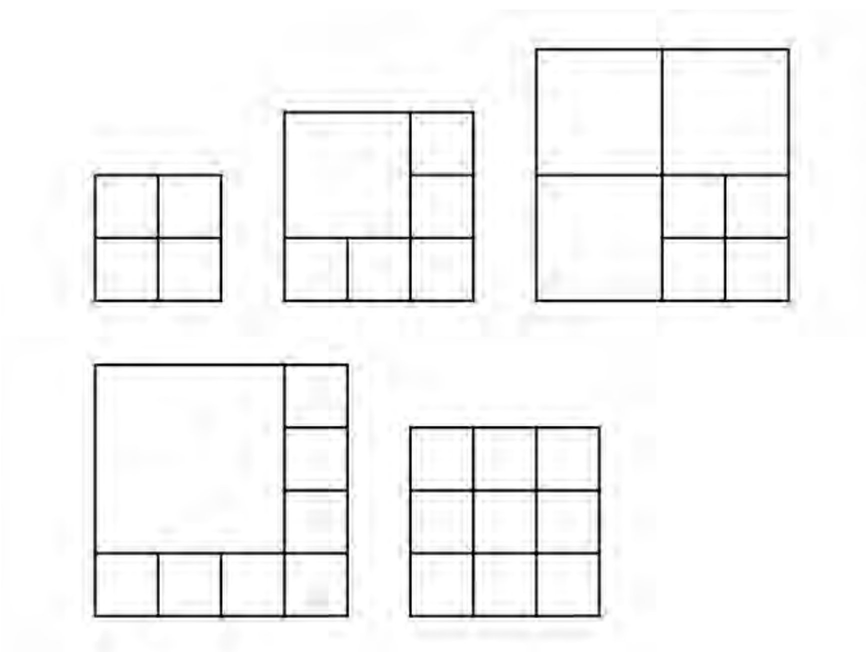
DES CARRÉS DANS UN CARRÉ
SUJET POSÉ EN 2014 À DES SECONDES
ET À DES QUATRIÈMES SANS LA GÉNÉRALISATION

Enoncé :

Partager un carré en 4, 6, 7, 8, 9 carrés (pas nécessairement de même taille).

Généralisation : pour quelles valeurs de N peut-on partager un carré en N carrés (pas nécessairement de même taille) ?

- **Solution :**



Si un carré peut être partagé en N carrés il peut l'être aussi en N + 3 carrés : en partageant l'un des carrés en 4 carrés cela ajoute 3 carrés.

Le partage est possible pour N=1 donc pour N = 4, 7, 10, … c'est-à-dire quand N = 3k + 1.

Le partage est possible pour N=6 donc pour N = 9, 12, … c'est-à-dire quand N = 3k avec k au moins égal à 2.

Le partage est possible pour N=8 donc pour N = 11, 14, … c'est-à-dire quand N = 3k + 2 avec k au moins égal à 2.

Les seuls entiers pour lesquels cela ne semble pas possible sont 2, 3 et 5 ; démontrons le.

Si on partage un carré en plusieurs carrés, il en faut au moins un pour chaque angle, donc il faut au moins 4 carrés ; cela élimine N = 2 et N = 3.

Si N est supérieur à 4, il y a au moins 3 carrés sur l'un des côtés et il n'est alors pas possible de compléter par deux autres carrés, donc le partage pour N = 5 n'est pas possible non plus.

Commentaires

Exercice classique qui peut être abordé par des collégiens. Il faut avoir un peu d'imagination pour obtenir les partages en 6 et 8 carrés.

On peut aussi partir d'un quadrillage 3×3 ou 4×4 puis regrouper des petits carrés pour en former un plus grand.

Le passage de N à N + 3 n'est pas difficile à trouver.

L'impossibilité pour N=2 et N=3 est facile à justifier, celle pour N=5 un peu plus difficile.

Comme prolongement on peut proposer de chercher de combien de façons différentes on peut partager un carré en 7 carrés (2 façons), en 8 carrés (6 façons), en 9 carrés 1(6 façons) : voir la suite A221841 de l'OEIS. Un problème voisin consiste à rechercher le nombre minimum de carrés qui partagent une grille n×n : le problème a été posé en 1907 pour n=13 par Sam Loyd en 1907 et repris par Henry Dudeney en 1917 sous le nom de Mrs Perkins's Quilt.

CHAMPIONNAT DE FOOTBALL
SUJET POSÉ EN 2014 À DES ÉLÈVES DE LYCÉES PROFESSIONNELS

Enoncé :

Lors de la saison 2012-2013 de ligue 1, à la fin de la 19^{e} journée, trois équipes (Paris Saint Germain, Lyon et Marseille) arrivent en tête avec 38 points.

Dans le championnat français de football, il est attribué :
3 points pour un match gagné, 1 point pour un match nul et 0 point pour un match perdu.

Indiquer les différentes possibilités pour obtenir 38 points après 19 matchs joués (nombre de matchs gagnés, nuls et perdus).

- **Solution :**

Possibilité 1 : 12 matchs gagnés, 2 matchs nuls et 5 matchs perdus car
$12 \times 3 + 2\times1 + 5\times0 = 38$ et $12 + 2 + 5 = 19$
Possibilité 2 : 1 match gagné, 5 matchs nuls et 3 matchs perdus car
$11 \times 3 + 5\times1 + 3\times0 = 38$ et $11 + 5 + 3 = 19$
Possibilité 3 : 10 matchs gagnés, 8 matchs nuls et 1 match perdu car
$10 \times 3 + 8\times1 + 1\times0 = 38$ et $10 + 8 + 1 = 19$

Il faut montrer qu'il n'y a pas d'autres possibilités.
Si une équipe gagne 13 matchs elle marque au moins 39 points ce qui est supérieur à 38.
Si une équipe gagne seulement 9 matchs, il lui restera au maximum 10 matchs nuls pour compléter donc elle marquera au maximum :
$9 \times 3 + 10\times1 + 0\times0 = 37$ points, elle ne peut donc pas atteindre 38.

Commentaires
C'est un exercice accessible aux collégiens. Il suffit de raisonner avec le nombre de matchs gagnés : seules les valeurs de 10 à 12 permettent d'atteindre un total de points égal à 38.
On peut aussi mettre en équations :
$x + y + z = 19$ et $3x + y = 38$ qui entraînent $y = 38 – 3x$ et $z = 2x - 19$.
Comme y et z doivent être positifs, cela entraine que x est compris entre 10 et 12.

On peut généraliser en demandant, toujours pour 19 matchs, quel est le total de points T qui donne le nombre maximal de solutions : on obtient T = 19 et T = 21 pour lesquels il y a 7 solutions.
On peut encore généraliser à N matchs et un total de points T : le nombre maximum de solutions est obtenu pour T égal à la partie entière de N/3 + 1.